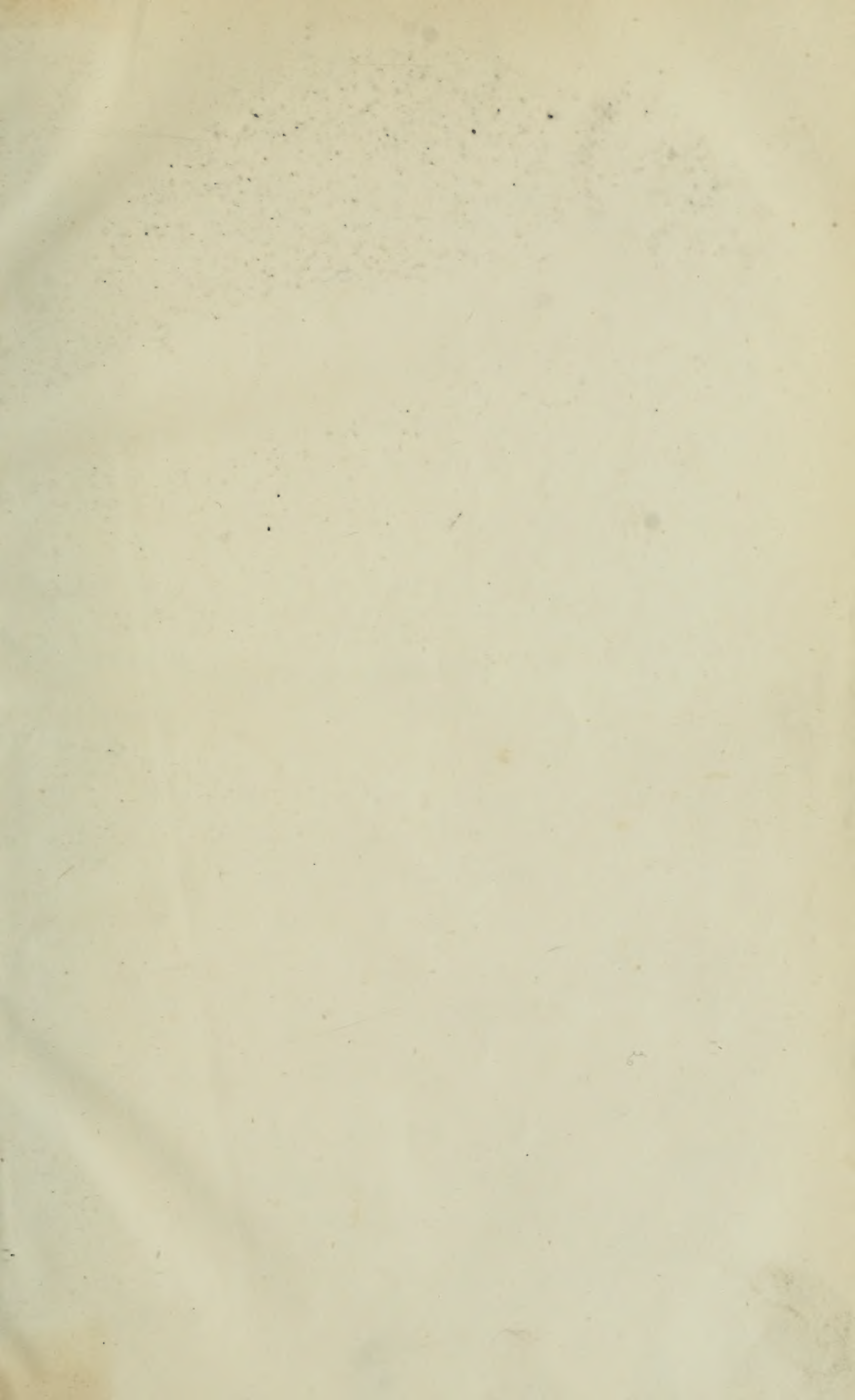




[illegible]

L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES

DE CLEBSCH

[illegible]

C.

THÉORIE

DE

L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES

Alfred

DE CLEBSCH

Traduite par MM.

BARRE DE SAINT-VENANT

MEMBRE DE L'INSTITUT

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE

ET

FLAMANT

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES

Avec des Notes étendues

DE M. DE SAINT-VENANT

PREMIER FASCICULE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES ET TÉLÉGRAPHES

QUAI DES AUGUSTINS, 49

1881

TABLE

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES CORPS ÉLASTIQUES DE DIMENSIONS FINIES EN TOUS SENS

CHAPITRE I. — ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES.

CHAPITRE III. — PLAQUES D'ÉPAISSEUR QUELCONQUE.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES CORPS ÉLASTIQUES DONT UNE OU DEUX DIMENSIONS SONT TRÈS PETITES (INFINIMENT PETITES).

CHAPITRE IV. — TIGES MINCES.

CHAPITRE V. — PLAQUES MINCES.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATIONS.

CHAPITRE VI. — EXTENSION ET COMPRESSION LONGITUDINALE DES TIGES.

CHAPITRE VII. — FLEXION DES TIGES.

CHAPITRE VIII. — SYSTÈMES DE TIGES OU BARRES.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

L'intention primitive de l'auteur était de ne mettre dans ce livre que ce dont il avait besoin pour se guider dans les leçons qu'il professe à l'École polytechnique de Carlsruhe. Mais bientôt il sentit tellement la nécessité de fonder sur une base solide les recherches dont les résultats servent aux applications techniques, qu'il se détermina à entreprendre la rédaction d'un traité de la théorie de l'élasticité qui, autant que cela était possible dans une étendue modérée, présentât un système complet des principes et des usages de cette théorie : travail devenu possible aujourd'hui, grâce aux belles recherches de MM. Kirchhoff et de Saint-Venant. Il fallait assurément, pour cela, traiter brièvement bien des points, mais il convenait, avant tout, d'exposer en détail ce qui est désirable pour une connaissance suffisante de cette branche nouvelle de la science. Ainsi, pour tout ce qui regarde les transformations analytiques que M. Lamé a enseigné à opérer avec une si grande élégance sur les équations fondamentales de l'élasticité, il fallait renvoyer à l'ouvrage si connu et si répandu de cet illustre savant. Il fallait aussi exclure toutes les intéressantes recherches sur la théorie de la lumière qui occupent dans son livre une étendue notable, et qu'il sera peut-être donné un jour à l'auteur de traiter dans un ouvrage spécial (*).

Au contraire, les travaux de M. de Saint-Venant, sur des tiges dont la section a des dimensions finies, paraissent de nature à être exposés

(*) Clebsch n'a malheureusement pas eu le temps de réaliser son projet. On peut voir, au reste, pour une analyse et un jugement de ce qui a été écrit, sur ce sujet, par Lamé, Cauchy, M. Boussinesq, etc., un article : *Sur les différentes manières de présenter la théorie des ondes lumineuses*, que j'ai publié aux *Annales de Ch. et de Phys.*, 4e série, t. XXV, 1872, page 335.

d'une façon détaillée, d'autant plus qu'ils se rattachent à ceux de M. Kirchhoff sur des tiges extrêmement minces, en sorte qu'il en résulte une transition naturelle entre la théorie la plus rigoureuse et les formules usuelles des applications (*).

Parallèlement à ces recherches, qui ne sont qu'en partie nouvelles, on en trouvera d'autres presque entièrement neuves qui peuvent conduire à une classe d'applications peu tentées jusqu'ici. De même que l'on considère des tiges avec des dimensions transversales d'abord arbitraires, puis supposées très petites, il y a lieu de traiter ce qui est relatif à des plaques auxquelles on attribue d'abord une épaisseur finie, et ensuite une épaisseur très petite (infiniment petite). On arrive ainsi à des résultats qui comprennent ceux de la célèbre théorie de M. Kirchhoff sur les *figures sonores* (*Klangfiguren*), et qui paraissent susceptibles d'applications variées, quoiqu'à la vérité mon livre, bien que fort accru par là, n'offre souvent à cet égard que de simples indications. Ces indications, sur des sujets d'un pareil intérêt, seront, je l'espère, favorablement accueillies.

On ne peut évidemment pas s'attendre à voir traiter des problèmes de cette nature sans voir exposer en même temps les moyens de solution tirés du calcul intégral. Je me suis efforcé de limiter autant que possible de pareilles expositions, et de ne point aborder les cas et les problèmes qui ne peuvent l'être que par l'étude des parties les plus élevées de ce calcul. On est aidé en cela par une particularité qui se rencontre généralement dans les sujets physico-mathématiques. Dans les recherches y relatives, les difficultés géométriques sont tellement simplifiées par les considérations qui ressortent de la nature même du sujet, que le lecteur et l'étudiant peuvent marcher à l'aise dans l'étude de problèmes dont les difficultés, pour être surmontées d'une manière purement mathématique, réclameraient les efforts les plus extrêmes. Bien plus, dans l'étude de la branche dont nous nous occupons, si l'on n'a en vue que l'intérêt physique, la connaissance des théories mathématiques qui s'y rapportent n'est pas

---

(*) Ces considérations se trouvent complétées et généralisées dans deux mémoires : *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres* : 1° *Tiges*, 2° *Plaques*, présentés à l'Académie par M. Boussinesq le 3 et le 10 avril 1871 (Comptes rendus, t. LXXII, p. 407, 449) et insérés au Journal des Mathématiques de M. Liouville, la même année, t. XVI, p. 125 et 241, avec des *Compléments*, même journal, 1879, p. 163 et 329.

absolument nécessaire ni même spécialement utile. Je citerai seulement comme exemple la théorie des équations aux dérivées partielles que l'on ne pourrait pas facilement mettre en usage dans les applications (*).

Espérons que le temps approche où l'on cessera de reculer d'effroi devant l'étude de la physique mathématique à cause des difficultés imaginaires dont on l'a hérissée. Lorsqu'on en sera venu là, on reconnaîtra sans doute que ces études physiques constituent, pour le mathématicien lui-même, possédant les éléments de la science, l'introduction la plus convenable pour les parties supérieures qui, attaquées immédiatement et abstractivement, paraissent souvent aussi étranges qu'obscures; mais qui, revêtues d'applications physiques comme d'un riche et agréable vêtement, viennent au-devant de nous comme réconciliées avec notre intelligence et semblent nous inviter à des découvertes plus avancées.

Il ne me reste qu'à réclamer pour mon livre la bienveillante indulgence des mathématiciens, des physiciens, et de tous les hommes de l'Art qui ont à cœur de jeter un coup d'œil plus profond sur la nature des opérations qu'ils exécutent.

Carlsruhe, le 30 septembre 1862.

A. CLEBSCH.

(*) Ces observations de l'auteur me paraissent être le résultat d'une illusion et se trouver contredites par la suite de son livre. Il est impossible, sans l'usage des procédés d'intégration d'équations aux dérivées partielles, par des séries de sinus tant circulaires qu'hyperboliques, de déterminer, par exemple, la torsion d'une prime à base rectangle, ou les vibrations d'une tige heurtée transversalement; et ces procédés analytiques, convenablement exposés, peuvent être réduits à quelque chose de simple et d'une pratique facile.

AVERTISSEMENT DES TRADUCTEURS

Clebsch, comme on sait, né à Kœnigsberg le 19 janvier 1833, est mort, généralement regretté, à Göttingue le 7 novembre 1872, ou dans sa quarantième année. Diverses notices ont paru sur sa vie si courte et si bien remplie, une, entre autres, en une brochure de 1873, publiée à Leipsig sous le titre *Alfred Clebsch, Versuch*... Essai d'une exposition et d'une appréciation de ses œuvres scientifiques, par un de ses amis, et aussi *Zum Andenken*... A la mémoire de R. Fr. A. Clebsch.

Son livre, dont nous donnons la traduction, a été édité en septembre 1862, lorsqu'il était âgé de vingt-neuf ans, après un Cours professé en 1861 à Carlsruhe. Il offre toujours un grand et actuel intérêt. Mais, quelques travaux dont il n'a pas eu connaissance avaient été faits sur le même sujet; d'autres, plus nombreux, ont paru depuis, la plupart en de courts extraits ; et la rédaction ultérieure de quelques-uns encore inédits a donné ouverture à des idées nouvelles.

Nous avons donc cru devoir accompagner notre publication de Notes nombreuses et étendues, dont quelques-unes forment des sortes de traités sur plusieurs points, dont on sentira, nous le croyons, l'importance.

Parlons d'abord d'un changement opéré dans un grand nombre de formules afin de les rendre applicables aux solides tels qu'ils sont presque tous.

Les formules du livre de Clebsch n'ont été dressées (excepté au § 11) comme sont celles de Navier, Lamé, Poisson, etc., que pour les corps dont la matière est complètement *isotrope* ou d'égale contexture et d'égale élasticité dans tous les sens autour de chaque point.

Cette sorte de contexture n'existe presque jamais.

Si, en effet, dans les corps prismatiques, employés comme matériaux de construction, l'on peut assez ordinairement supposer l'élasticité sensiblement égale suivant les divers sens transversaux, ou, au moins, ne faire entrer dans les calculs, pour ces sens, qu'une élasticité et une résistance *moyennes*, il n'en est nullement de même pour le sens de la longueur; car

dans les bois, diverses expériences ont fait reconnaître que le coefficient ou module d'élasticité d'extension désigné par E était jusqu'à vingt fois et même cinquante fois plus grand pour les fibres longitudinales, que pour de petits prismes taillés transversalement; et il doit y avoir, pour les fers forgés ou laminés, et même fondus, des différences analogues et sensibles quoique bien moins grandes.

Les formules de Clebsch, pour avoir quelque utilité, avaient donc besoin qu'on les modifiât.

C'est ce que nous avons fait.

Cette généralisation ne les a pas rendues plus compliquées. Il nous a suffi, pour les formules d'extension, flexion et torsion des *tiges*, de laisser tout à fait indépendants les uns des autres le module E d'extension longitudinale, le module G de glissement ou de torsion, et la fraction η désignant le rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale qui l'engendre, sans supposer, avec Clebsch, ces trois quantités liées par la relation $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ qu'il démontre, à la fin du § 3, pour les corps complètement isotropes.

Nous avons donc pu simplement, en ce qui concerne les tiges, ou jusqu'au § 38, mettre 2G là où Clebsch mettait $\frac{E}{1+\eta}$, et $\frac{E}{2G}$ là où il mettait $(1+\eta)$ pour obtenir la généralisation désirée.

Pour les *plaques*, qui ont ordinairement aussi une élasticité différente dans le sens de leur épaisseur, et dans les sens parallèles à leurs bases, il a fallu une modification d'une autre sorte. Nous l'avons fondée sur les formules (g), page 76, de la Note du § 16, des six composantes des pressions ou plutôt *tensions* dans l'intérieur des solides qui sont *hétérotropes*, mais où il se trouve assez généralement trois plans rectangulaires de symétrie de contexture. Il nous a fallu, pour modifier en conséquence et facilement les solutions données par Clebsch des problèmes sur les plaques d'épaisseur quelconque (§§ 39 à 46), nous borner au cas ordinaire [formule (h), p. 77, de la même Note du § 16] où leur élasticité peut être regardée comme la même dans les divers sens parallèles aux bases, mais aussi différente qu'on veut dans le sens de l'épaisseur. Les formules ne diffèrent guère alors de celles de Clebsch qu'en ce qu'il y a lieu *d'accentuer* E et η, c'est-à-dire au lieu du module E relatif à tous les sens et de la fraction η dont nous venons de parler, de mettre $E' = E_x = E_y$, module d'élasticité des sens perpendiculaires à celui z de l'épaisseur, ou module d'extension de bandes taillées dans la plaque suivant les sens x, y, ou d'autres parallèles à ses bases, avec $\eta' = \eta_{xy} = \eta_{yx}$, en y joignant quelquefois $\eta'' = \eta_{xz} = \eta_{yz}$ (Note du § 16, p. 80, 85) rapports respectifs, aux extensions qu'on ferait subir à ces bandes dans le sens x ou y de leur longueur, des contractions qu'en même temps elles éprouveraient dans le sens y ou x de l'autre dimension parallèle

aux faces de la plaque, et dans le sens z de son épaisseur; ou bien encore, et ce que nous préférons presque toujours, ainsi que nous l'avons indiqué comme variante aux § 39, 40, 44, 45, et employé exclusivement dans notre Note du § 45, en remplaçant E′ par $4f\left(1-\frac{f}{a_1}\right)$, η' par $1-\frac{2f}{a_1}$, et η'' quand il y a lieu, par $\frac{2f}{a_1}\frac{d'}{c}$, f étant le coefficient de $t_{xy}=fg_{xy}$, a_1, un module spécial d'élasticité relatif aux plaques (note du § 16, p. 85) qui est assez souvent les $\frac{16}{15}$ du module E′, et d′, c deux autres des paramètres des formules (g), (h) de la même Note du § 16.

Nous avons même pu, pour les plaques minces, modifier ou établir la plupart des formules (2e partie § 64 à 81 et Note du § 75) pour le cas d'une élasticité inégale dans les trois sens de symétrie.

Nous n'avons pas besoin de motiver ici les autres modifications de détail apportées à la rédaction de Clebsch et qui, bien que quelques-unes embrassent des pages entières dans une vue d'éclaircissement, auraient certainement été approuvées de cet éminent professeur, comme nous pouvons le juger par des lettres que nous avons eu le bonheur de recevoir de lui, et que nous avons sous les yeux, où il nous exprimait, avec son assentiment à notre œuvre, son contentement de ce que nous avions l'intention de faire connaître son livre en France. Nous avons aussi changé quelques notations pour les mettre en rapport avec celles de notre pays ou de l'Angleterre, ou pour éviter des confusions. Nous avons, par de nombreux renvois, donné diverses explications.

Mais disons quelques mots de nos grandes Notes ou additions.

Dans celles de la fin du § 11 et surtout du § 16, nous avons discuté d'abord, le plus clairement que nous avons pu, un point fortement controversé, la raison ou l'explication de la forme linéaire des expressions les plus générales des six composantes des tensions en fonction des six déformations élémentaires ∂, g, mais principalement le nombre de leurs coefficients distincts ou inégaux, nombre qui est de 21 suivant Green, et de 15 seulement (d'où un seul et non deux quand il y a isotropie) d'après la loi que chaque action entre deux points matériels dépend de la seule distance où elle s'exerce (n°s 6, 7, 8, 9 de la Note du § 16). Après ces raisonnements et réserves, faisant à l'opinion contraire une concession sans danger, rendue transparente par des accents dont la simple suppression suffit pour rentrer dans la nôtre, nous donnons les formules de composantes de tension pour les divers cas de symétrie de contexture et d'isotropie partielle ou totale, et diverses conséquences de ces formules quant aux expressions des modules d'élasticité E des prismes taillés dans le corps, ou aux rapports η, etc.

Mais pour les corps non cristallins et en même temps non isotropes, il doit y avoir, entre les coefficients des formules des tensions, des relations telles que les rapports de celles-ci aux dilatations ne varient que d'une manière continue et simple, quand on passe d'une direction à une autre. La recherche de pareilles relations, en s'aidant du peu de faits jusqu'ici possédés, et de suppositions naturelles, occupe toute la seconde partie, n°s 17 à 25 de la même Note, que nous terminons en proposant, pour ces sortes de corps comprenant tous ceux que nous employons comme matériaux de nos constructions, des formules plausibles et bonnes à employer en attendant que des expériences désirables de mesurage des coefficients, dont la même Note indique le mode, aient donné plus de lumières.

La Note du § 22 (et surtout celle du § 28 justifient par des faits, et aussi par des raisonnements ainsi que par une analyse de M. Boussinesq basée simplement sur la nature particulière des solides allongés appelés *tiges*, la supposition ($t_{xx}, _{yy}, _{xy} = 0$ approximativement) sur laquelle on fonde l'établissement des formules de leurs extensions, flexions et torsions. Celle du § 28 expose les raisons d'employer ces formules avec confiance, même lorsque les forces appliquées aux tiges ne sont pas distribuées ou appliquées aux extrémités de la manière qu'exigent ces formules pour donner des résultats tout à fait exacts.

Celle du § 31 donne la théorie de la torsion des prismes ou cylindres à base quelconque eu égard au gauchissement qu'éprouvent nécessairement les sections non circulaires pour rester normales aux arêtes latérales devenues des hélices; ce qui fait que le moment de torsion est toujours moindre que ce qui résultait d'une théorie supposant que les sections restent planes. On y donne comme exemple le calcul en série transcendante, pour un prisme à base rectangle, des ordonnées de la section devenue courbe, ainsi que la formule du moment de torsion. Celle de Cauchy, de 1829, n'y est conforme que dans le cas où un côté du rectangle est extrêmement petit par rapport à l'autre; cas où le plan de la section devient un paraboloïde hyperbolique, comme quand son contour est une ellipse, etc. On donne finalement une formule du moment de torsion, exacte pour un cylindre elliptique, et qu'on a reconnue numériquement donner une suffisante approximation pour toutes les autres formes de section pour lesquelles ce moment a été calculé.

Celle du § 37 donne, en la généralisant d'une manière nouvelle, après en avoir discuté le principe, l'établissement des conditions de stabilité de la cohésion, ou de résistance permanente à la rupture, même éloignée, des solides d'une contexture quelconque; conditions qui reviennent à imposer une limite, censée fournie par l'observation, à la plus grande des dilatations, si le corps est isotrope, et, s'il ne l'est pas, à la dilatation dont le quotient,

par la limite particulière à sa direction, est le plus grand possible. Ce *quotient maximum* est fourni par une équation du troisième degré, de composition analogue à l'équation connue qui fournit la dilatation maximum. Elle se réduit le plus ordinairement au second degré. On donne les résultats variés de l'application de cette méthode d'abord aux exemples simples, puis à des exemples complexes où il y a en même temps extension ou compression, glissement, flexion et torsion.

Dans la Note finale du § 45 se trouvent résolus, d'une manière nouvelle et rigoureuse, des problèmes de flexion de plaques d'épaisseur quelconque qui, si on les suppose placées horizontalement, sont sollicitées au contour par des forces horizontales faisant couples et par des forces verticales faisant efforts tranchants. Ce mode de solution s'applique surtout aux plaques circulaires symétriquement sollicitées; et on obtient ainsi, pour une plaque épaisse, sans aucune suppression de termes, les mêmes équations du feuillet moyen et les mêmes flèches centrales, pour les cas d'encastrement et de simple pose autour, qui ont été tirées par Poisson de l'équation de Lagrange dont l'établissement et l'usage se fondent sur de pareilles suppressions, possibles seulement quand la plaque est mince. On embrasse le cas où la plaque serait appuyée sur un ou plusieurs cercles fixes de rayon moindre que celui de son contour; et, quand il ne s'agit d'avoir que la flèche centrale, la solution peut être obtenue pour un mode quelconque, continu ou discontinu, symétrique ou non, de répartition des charges sur la surface de la plaque.

A la fin du § 46 qui termine la première partie de l'ouvrage, nous avons introduit une Note que M. Boussinesq a bien voulu rédiger à notre demande, et où il traite de l'équilibre des corps élastiques de grandes dimensions, sollicités par des forces appliquées sur une petite partie de leur surface ou en un point intérieur. Les problèmes résolus par lui concernent la résistance et la déformation d'un sol élastique horizontal, de longueur, largeur et profondeur indéfinies, à la surface duquel s'exercent des pressions tantôt connues, tantôt réparties de manière à faire prendre à leur région d'application une forme (plane ou courbe) donnée, ce qui revient à considérer l'effet produit sur un corps élastique par des forces appliquées à une petite partie de sa surface, et le mode de transmission, à son intérieur, des actions ainsi exercées, lorsqu'on se borne à étudier la région directement atteinte, avec son voisinage. Un autre problème est celui des déplacements que fait naître, dans un solide, autour de son point d'application, une force extérieure venant s'exercer au dedans de ce corps, assez loin de la surface pour que celle-ci n'en ressente pas l'influence. Les solutions ainsi données, bien propres à mettre en vue la manière dont se répartissent et se modèrent les efforts transmis d'une partie d'un corps élastique aux parties voisines, sont d'une forme extrêmement simple, fécondes en

conséquences ; et elles révèlent l'usage que l'on peut faire, dans la théorie de l'élasticité, des potentiels connus d'attraction Newtonienne et surtout d'un potentiel nouveau dit logarithmique à trois variables.

La grande Note finale du § 61 est comme un Traité étendu, quoique succinctement présenté, de ce que Poncelet a appelé la *résistance vive* et Young, la *résilience* des pièces solides, supposées, ici, recevoir transversalement ou un choc, ou une impulsion graduelle et tranquille, et vibrer ensuite avec le corps qui les a mises en mouvement, ce qui exige une tout autre analyse que quand la pièce élastique vibre seule. Les solutions obtenues sont en séries de sinus tant circulaires qu'hyperboliques dont les arcs ont pour multiplicateurs les racines, en nombre infini, d'équations transcendantes. On donne deux formules générales pour les coefficients de sinus et de cosinus destinés à satisfaire aux conditions initiales, et un moyen d'en calculer, sans intégration, les dénominateurs. Le premier terme de ces séries, en le développant algébriquement, fournit non seulement cette première approximation où, avec Young et Poncelet, l'on néglige l'inertie de la pièce heurtée, mais aussi une seconde approximation, d'une forme nouvelle et presque aussi simple, qui en tient compte et donne, pour les flèches dynamiques, des valeurs presque aussi exactes que la formule complète et rigoureuse. Et cette seconde et suffisante approximation peut être obtenue directement d'une manière élémentaire susceptible d'être enseignée partout; singularité curieuse et heureuse, dont l'explication a été, sur notre invitation, l'objet d'un mémoire de M. Boussinesq où se trouvent embrassés des systèmes quelconques de barres élastiques et de corps heurtants ou entraînés dans leurs vibrations. Cette même grande Note contient un examen de l'emploi, pour des systèmes flexibles et à points fixes, du théorème de perte de forces vives appliqué jusqu'ici aux seuls corps sans élasticité et libres ou pivotants; et, aussi, l'examen de l'application à ces mêmes systèmes du principe des vitesses virtuelles pour des quantités de mouvement finies. Mais le calcul des *plus grandes courbures* prises et, par conséquent, l'établissement exact des conditions de résistance paraît, jusqu'ici, ne pouvoir être convenablement fait qu'au moyen des solutions nouvelles et transcendantes, ou en calculant tant numériquement que graphiquement plusieurs termes des séries.

La Note se termine par des comparaisons aux expériences faites en Angleterre sur des chocs de barres, et aussi, par la solution des problèmes de la charge en mouvement, telle qu'une locomotive et un train, avec mise en compte nouvelle, dans le résultat final, de l'inertie des poutres sur lesquelles la charge roule.

Enfin, la Note du § 73, sur les plaques minces de toute forme, donne un établissement direct et simple, jusqu'ici désiré, des équations indéfinies de leur équilibre, surtout de celle de quatrième ordre, en le fondant sur des

relations qui sont les conséquences naturelles, suffisamment approchées, tant cinématiques que statiques, de la forme même de ces corps aplatis, ou qui sont comme l'énoncé analytique de la question qui leur est relative; et, cela, sans recourir à la méthode de leur partage en éléments ayant leurs coordonnées particulières et mobiles, qu'il faut ensuite unir par des conditions de raccordement délicates; méthode ingénieuse mais compliquée, donnant lieu à des obscurités et paraissant comporter l'annulation, de prime abord, des glissements qui constituent les efforts tranchants. Les conditions *définies* ou au contour sont celles de l'éminent M. Kirchhoff, au nombre de quatre, vu la fusion en une seule, très remarquablement opérée par lui, de deux des conditions de Poisson. Mais nous opérons cette réduction ou fusion, sans recourir au calcul des variations, en changeant simplement, comme M. Boussinesq a eu l'idée de faire, chaque couple dit de torsion, en un couple statiquement équivalent et autrement tourné, ce qui est permis quand la plaque est mince et peut s'opérer sans annulation des glissements, ainsi que le prouve une analyse donnée en sous-note et de laquelle il résulte que le changement ainsi opéré n'entraîne que la suppression de quantités de l'ordre de celles que déjà on est forcé de négliger; détails utiles et qui paraissent devoir mettre fin à une polémique soutenue en 1878. La même Note examine et discute des méthodes de Poisson et Cauchy auxquelles on a renoncé. Elle se termine en rapportant, avec quelques modifications et des explications nécessaires pour faire cesser un paradoxe, les admirables solutions, à peu près inédites, données par Navier en 1820 (ou avant qu'il eût inventé ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie de l'élasticité), du problème de l'équilibre et de la résistance des plaques rectangles appuyées au contour et chargées de différentes manières; ce qui confirme un résultat particulier déjà présenté en 1683 par Mariotte, d'après des comparaisons que la fin de la Note éclaircit.

Au moyen de ces explications et annexes, auxquelles nous aurions pu donner plus d'étendue en rapportant d'autres résultats inédits de nos recherches déjà anciennes, nous espérons, si l'on veut bien y donner quelque attention, que la traduction offerte par nous aura une réelle utilité et que la belle et intéressante branche de physique mathématique ayant, avec l'art des constructions, des rapports si intimes, pourra être de mieux en mieux comprise, étudiée et appliquée.

THÉORIE

DE

L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES CORPS ÉLASTIQUES DE DIMENSIONS FINIES EN TOUS SENS

CHAPITRE PREMIER

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES

---

§ 1. — Exposition générale des principes qui servent de base à la théorie des corps élastiques.

La Mécanique, dans le sens restreint que l'on a, jusqu'à notre époque, attaché à ce mot, s'occupe de la théorie des *corps rigides*. En partant de ce fait expérimental que tout corps solide, soumis à des forces qui ne dépassent pas certaines limites dépendant de sa nature ou de sa contexture individuelle, n'éprouve que des changements de forme insensibles ou presque insensibles, on arrive à conclure qu'un changement excessivement petit des positions respectives de ses molécules développe, entre celles-ci, des forces intérieures suffisamment intenses pour faire équilibre aux forces extérieures, limitées comme on vient de le dire, qui agissent sur lui. Sans doute, pour faire naître ces forces intérieures, il faudra toujours produire un certain rapprochement ou éloignement des molécules, si petit qu'il soit; mais ce rapprochement ou éloignement sera évidemment d'autant plus petit que l'action des molécules les unes sur les autres aura plus d'énergie. On peut donc se figurer un corps dans lequel les déplacements inté-

rieurs produits par les forces extérieures tendent indéfiniment vers zéro et enfin s'annulent. En substituant au corps réel celui qui résulte d'une pareille abstraction, on le considère comme *rigide*; et, grâce à cette hypothèse, il devient l'objet de la Mécanique des corps parfaitement durs et invariables.

Cette abstraction peut être considérée comme une première approximation dont on se sert avec succès pour beaucoup de problèmes, et qui revient, dans le fait, à négliger les petits déplacements des molécules les unes par rapport aux autres, vis-à-vis de leurs distances mutuelles primitives.

Mais, dans beaucoup de questions de physique et de technologie, il n'est pas permis de se borner à une approximation de cette sorte. Un grand nombre de problèmes ne peuvent, en effet, s'aborder qu'en ayant égard aux déplacements dont il s'agit, quelque petits qu'ils puissent être. On dit qu'un corps est *élastique*, en tant que l'on considère ses petits changements de forme, et l'on peut caractériser cette considération comme un *deuxième degré d'approximation* vers ce qui se passe réellement à son intérieur; pure approximation, en effet : car il ne sera nullement nécessaire de traiter avec une exacte précision les changements de grandeur qui surviennent dans les plus petites parties du corps; on ne perdra pas de vue, au contraire, que ces changements étant minimes par rapport aux dimensions primitives des mêmes parties, l'on *peut*, l'on *doit* même, comme on va le voir, en négliger sans crainte les puissances supérieures, par rapport aux puissances de même ordre des dimensions primitives.

Si l'on exprime les conditions de l'équilibre et du mouvement de ce système de molécules que nous appelons un corps solide, et si l'on regarde les déplacements relatifs des molécules voisines les unes des autres comme très petits par rapport à leurs distances initiales, les équations exprimant ces conditions se partagent en deux classes. Celles de la première classe contiennent des grandeurs finies à côté des déplacements très petits ou même infiniment petits des molécules; il est permis d'y négliger ceux-ci vis-à-vis de celles-là, ou de poser les mêmes équations que si le corps était considéré comme rigide. On arrive alors à cette importante conclusion que *les conditions de l'équilibre et du mouvement d'un corps supposé rigide doivent rester valables quand le même corps est considéré comme élastique* (*).

(*) Il y a de cela une raison meilleure, qui prouve que les conditions en question sont toujours *parfaitement exactes* et non pas simplement approximatives, quel que soit le degré d'élasticité ou de variabilité de forme du système. C'est que, comme les forces *intérieures*

Mais à côté de ces équations, il s'en présente d'autres qui sont des combinaisons d'une espèce particulière, d'où les termes finis ont disparu complètement, et qui, par conséquent, se réduiraient à l'identité $0=0$ aussitôt que l'on poserait égaux à zéro les déplacements moléculaires relatifs, ainsi que les autres quantités de même ordre qui s'y trouveraient engagées d'une manière quelconque. Mais il n'est réellement permis de négliger, dans ces dernières équations, que les carrés et les puissances supérieures des petites quantités dont nous parlons, vis-à-vis de leurs premières puissances : car celles-ci doivent être nécessairement conservées, attendu qu'alors les équations où figurent ces premières puissances, ont tout à fait le caractère des équations entre grandeurs finies. Qu'on se figure, en effet, les termes très petits du premier ordre qui entrent dans ces équations, divisés tous par l'un d'eux ; alors, on a des équations où entrent seulement des rapports entre quantités très petites, rapports qui sont des quantités finies. On voit ainsi, manifestement, qu'entre les changements très petits ou même infiniment petits, c'est-à-dire tendant vers zéro, il peut être posé une série d'équations qui ne s'obtiennent pas dans la théorie des corps rigides, et qui seules sont propres à donner la connaissance des divers états de l'intérieur des corps.

Mais il est essentiel, avant tout, d'insister sur ce point que, dans la théorie exposée, c'est seulement dans les plus petites parties des corps que l'on considère de pareils changements des dimensions, et qu'on les suppose très petits vis-à-vis de ces dimensions elles-mêmes. Tout corps se trouve dans l'état qui répond à cette supposition, tant que les forces extérieures qui agissent sur lui restent, avons-nous dit, en deçà de certaines limites. Ces limites des forces ne produisant que de très petits changements relatifs des dimensions sont très diverses pour les divers corps ; et, pour certains d'entre eux, dits vulgairement *très élastiques*, comme le caoutchouc, elles sont si resserrées que, dans la réalité, on les outrepasse toujours. La théorie que nous exposons exclut donc, *a priori*, les états qui se produisent dans les corps de cette espèce, et pour l'étude desquels les connaissances expérimentales acquises sont, jusqu'ici, insuffisantes (*).

---

sont égales deux à deux et *directement* opposées, elles se détruisent mutuellement lorsque l'on compose, soit la résultante générale, soit le moment résultant de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures ; d'où il suit que l'équilibre, soit de translation, soit de rotation, a lieu à chaque instant dans un système non rigide comme dans un système supposé rigide, *entre les seules forces extérieures*, au nombre desquelles il faut mettre, bien entendu, les *inerties*, s'il y a mouvement.

(*) Cette remarque judicieuse de Clebsch vient à l'appui de ce que nous avons dit, aux §§ **59** et **73** de l'*Appendice* V de notre nouvelle édition de Navier (1864), de l'impossibilité

Au contraire, la théorie que nous allons exposer s'applique entièrement aux matériaux de construction de bâtiments ou de machines dont l'emploi exige un certain degré de consistance et de fermeté, comme le bois, le fer, les pierres. Des solides de cette espèce peuvent être soumis à des forces d'intensités très variées, mais pourtant toujours astreintes aussi à des limites; dès qu'on en applique qui dépassent celles-ci, même si elles ne produisent encore que de très petites déformations, on ne sait pas si ces déformations seront simplement temporaires, c'est-à-dire si le solide reprendra sa forme primitive lorsque les forces cesseront d'agir, ou si elles seront permanentes. Si les forces extérieures appliquées vont jusqu'à produire des déformations permanentes, ce qu'on appelle la *limite d'élasticité* est dépassée; le corps n'est plus, dans sa contexture ou sa constitution intime, ce qu'il était primitivement, et le changement persistant des situations mutuelles de ses molécules a produit un nouveau corps; la possibilité que ces sortes de changements continuent de s'opérer exclut toute sécurité, et un corps, dans de pareilles conditions, ne peut, sans danger, faire partie d'une construction quelconque.

Dans les matériaux dont on vient de parler, la limite d'élasticité est telle que, même lorsqu'elle est atteinte, les changements de forme des petites parties sont encore minimes par rapport à leurs dimensions. Si de plus, à cause de l'hétérogénéité possible, et toujours à craindre, de la matière, on a l'intention de rester notablement en deçà de cette limite, il est évident que les notions ci-dessus sont applicables, et qu'on est parfaitement en droit de regarder les changements de forme des plus petites parties de ces mêmes corps comme très petits du premier ordre par rapport aux dimensions primitives de ces parties. On voit donc dans quelle étendue la théorie est applicable; cette étendue n'embrasse ni les états dépassant la limite de l'élasticité, ni, à plus forte raison, ces états mathématiquement indéfinissables qui précèdent la désagrégation et la rupture.

Si les plus petites parties d'un corps n'éprouvent que des changements dont les proportions sont très faibles, il en est généralement de même pour le corps entier. Mais cette conclusion souffre des exceptions que l'on ne doit pas perdre de vue pour ne pas tomber dans de graves erreurs. Ces exceptions se produisent quand une ou deux dimensions du corps sont très petites, soit partout, soit en quelques

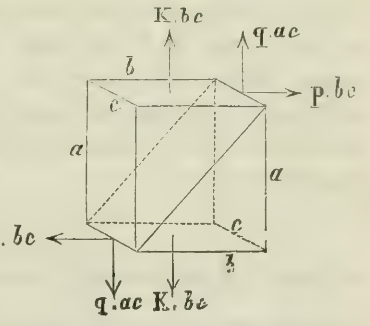
---

de rien conclure, contre les résultats du calcul des forces moléculaires, de certaines expériences faites sur des plaques de caoutchouc (Voy. ci-après le n° 4 de la note de la fin du § **16**.)

points, vis-à-vis de l'autre ou des deux autres dimensions. Une tige élastique très mince, une plaque peu épaisse peuvent être ployées en arc, de manière que les points situés à leurs extrémités ou sur leurs bords changent notablement de distance, bien que les dimensions de chacune des plus petites parties de ces corps ne changent que dans des proportions extrêmement minimes. On a des exceptions du même genre si l'une des dimensions du corps devient extrêmement grande, comme on aurait dû le supposer dans les considérations que l'on a quelquefois présentées sur la solidité des colonnes, où, faute d'y faire attention, on est arrivé aux conséquences les plus contraires au sens commun.

§ 2. — Extension d'un parallélépipède solide d'égale contexture dans les divers sens perpendiculaires à quatre de ses arêtes parallèles, sous des tractions ou pressions appliquées normalement sur les bases ou faces perpendiculaires à ces mêmes arêtes, regardées comme longitudinales. — Contractions latérales ou transversales accompagnant les dilatations ou extensions longitudinales.

Pour arriver à déterminer les états résultant de l'application de forces extérieures à un corps élastique, considérons un parallélépipède rectangle extrait de ce corps, et appelons a, b, c, ses côtés. Supposons sa matière homogène et non cristalline, en sorte que sa structure puisse être la même dans toutes les directions, ou au moins, comme ici nous le supposons, dans toutes celles qu'on regarde comme transversales, bien que différente, ainsi qu'il arrive communément, dans le sens de la longueur (*). Appliquons sur deux de ses faces opposées transversales, $b\,c$, et dans une direction normale, des tractions



d'égale grandeur, uniformément distribuées sur chacune et d'intensité p par unité superficielle. Le parallélépipède éprouvera, dans la direction de ces tractions, un allongement d'une grandeur dépendant

(*) La première de ces deux structures est celle que Cauchy a appelée *isotrope*. L'auteur reconnaît bien, un peu plus loin, qu'il ne suffit point, pour qu'elle existe, que le corps ne soit pas cristallin ou cristallisé. Les pièces métalliques forgées ou laminées, les fontes elles-mêmes, en pièces minces, les bois, les schistes, etc., n'ont pas la structure cristalline et sont cependant *hétérotropes* ou d'inégale structure dans les sens de la longueur, de la largeur et de l'épaisseur, ou au moins dans un de ces trois sens comparé aux deux autres.

de la nature de sa matière et évidemment proportionnelle à la longueur du côté de même direction, à savoir, le côté a. Le nouvel état d'équilibre ne pourra s'établir avant que les molécules du corps ne se soient assez éloignées les unes des autres pour que les couches contiguës et perpendiculaires à la direction de la traction s'attirent mutuellement avec la même intensité qu'elles sont tirées de part et d'autre en sens contraire. Il se développe ainsi, à l'intérieur du corps, dans la direction de la traction, une *tension* (*spannung*) qui a aussi une intensité p par unité de surface. Le changement qu'éprouve la distance de deux couches moléculaires voisines, et par conséquent aussi l'allongement que nous appellerons

$$\partial,$$

qu'éprouve chaque unité de longueur du côté a du parallélépipède, sont évidemment dépendants, d'une manière inconnue quelconque, de la traction p. En d'autres termes, la force p, par unité superficielle des bases bc, nécessaire pour augmenter de ∂ l'unité de leur distance a, est une fonction de ∂. Écrivons ainsi

$$\mathrm{p} = f(\partial).$$

Nous ne savons rien de la relation entre p et ∂, si ce n'est que ces deux quantités doivent s'évanouir ensemble. De plus, comme ∂ est une quantité très petite, si l'on suppose $f(\partial)$ développée en série suivant les puissances de ∂, on peut, dans cette série (où il ne doit y avoir aucun terme indépendant de ∂ puisque p doit s'évanouir avec ∂), négliger les puissances supérieures de ∂ devant sa première puissance. On a donc, pour de petits changements de forme, p proportionnel à ∂ ou

$$\mathrm{p} = \mathrm{E}\partial,$$

et E seul dépend encore de la nature de la substance du corps (*).

Le nombre E, qui doit être très grand pour que $\partial = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}}$ puisse avoir de très petites valeurs sans que celles de p soient petites, s'appelle le

(*) L'expression $\mathrm{p} = \mathrm{E}\partial$ est juste, mais le raisonnement par lequel l'auteur pense la démontrer est défectueux, bien qu'il ait été fait par quelques géomètres éminents : en effet, comme nous le dirons en note au § **11** pour les formules sextinômes dont cette expression n'est qu'une conséquence particulière, une fonction n'est point nécessairement linéaire ou du premier degré par cela seul que sa variable est *très petite*. D'ailleurs, en général, une loi physique doit se fonder sur des faits, et non sur quelque prétendue nécessité mathématique. (Voy. la note du § **11**, après les formules 23.)

module d'élasticité du corps. Il acquiert immédiatement une signification importante si l'on pose $p=1$. On a alors

$$\partial = \frac{1}{E},$$

c'est-à-dire que *l'inverse du module d'élasticité représente l'allongement qu'éprouve l'unité de longueur quand le corps est soumis à la traction* 1 *pour chaque unité superficielle de sa section transversale.*

Mais l'extension dans la direction de la traction n'est pas le seul changement qu'éprouve le parallélépipède considéré; car, lorsque ses faces latérales sont libres, c'est-à-dire n'éprouvent pas des tractions en même temps que ses bases, l'expérience prouve qu'en même temps il se contracte dans toute direction perpendiculaire, de sorte que chacune des deux dimensions transversales éprouve une diminution qui est égale à une fraction déterminée de l'extension dont on a d'abord parlé (*). La grandeur de cette fraction n'est pas égale pour les différentes matières (**). Voici sur quelle raison s'appuie l'opinion qu'elle ne saurait excéder $\frac{1}{2}$. Désignons-la par

$$\eta,$$

en sorte que, ∂' étant la *dilatation* dans les sens transversaux, on a

$$\partial' = -\eta\partial,$$

ou des *contractions* $\eta\partial$ si ∂ est positif. Cherchons quel sera le changement correspondant du volume, changement que presque toutes les observations ont montré être positif (***). Un cube pris dans l'inté-

(*) La nécessité de cette diminution ou contraction transversale, restée longtemps inaperçue, peut être prouvée par des considérations relatives au jeu des actions réciproques des molécules, qui varient avec leurs distances les unes des autres. Une analyse fondée sur les mêmes principes dont Navier était parti en 1821, l'avait révélée à Poisson en 1827, ou avant que Cagniard de Latour eût donné les résultats des premières expériences faites pour constater cette contraction provoquée par une traction.

(**) Vu (et c'en est, à notre avis, la seule raison) les différences variées entre les contextures dans le sens longitudinal, qui est celui des tractions appliquées, et les contextures dans les sens transversaux ou latéraux où il ne s'en exerce aucune.

L'auteur paraît penser que cette fraction η peut varier d'une matière isotrope à l'autre. Cette opinion sera discutée dans la note de la fin du § **16**.

(***) Des expériences de Wertheim que Clebsch ne connaissait pas ont fait reconnaître que certains allongements de prismes augmentent la densité de leur matière, ou donnent un *changement négatif*. Il est vrai qu'elles ont été faites ou sur des bois dont l'élasticité est très différente dans le sens transversal et dans le sens longitudinal, ou sur des métaux étendus fort au delà des limites dans lesquelles ils peuvent revenir à leurs dimensions premières. La conclusion relative à la limite 1/2 de η ne peut donc être adoptée que pour les cas les plus ordinaires des applications. (Voy. *Appendice complémentaire* de l'édition annotée de Navier, § **92**. Voyez aussi le n° 18 de la note du § **16** ci-après.)

rieur du parallélépipède, et dont les côtés avaient primitivement pour longueur l'unité possède, après l'allongement, des côtés $1+\partial$, $1-\eta\partial$, $1-\eta\partial$; et par conséquent un volume

$$(1+\partial)(1-\eta\partial)^2,$$

qui, si l'on néglige les puissances supérieures du très petit nombre ∂, se réduit à

$$1+(1-2\eta)\partial.$$

Chaque unité de volume du corps est ainsi accrue de $(1-2\eta)\partial$, qui ne peut représenter un accroissement véritable qu'autant que $(1-2\eta)$ est positif. D'où résulterait que η doit être moindre que $\frac{1}{2}$.

Ces considérations s'appliquent encore lorsque p et ∂ deviennent négatifs, c'est-à-dire lorsqu'une force appelée alors traction négative, ou *pression* (*Druckkraft*), diminue la dimension regardée comme longitudinale, cas où les dimensions transversales augmentent en même temps. On voit donc, lorsqu'on ne sort pas des limites entre lesquelles les considérations précédentes sont applicables, que les effets produits par des pressions sont rigoureusement égaux et opposés à ceux qui proviennent de *tractions* (*Zugkraften*) de même grandeur (*).

C'est bien ce qui a lieu dans les limites restreintes où l'on est ici supposé se tenir. Mais, pour des extensions et des contractions plus considérables, l'expérience indique qu'il n'en est pas de même. En effet, dès qu'il n'est plus permis de négliger les puissances de ∂ supérieures à la première, la conclusion précédente n'est plus vraie; alors la force de traction $p=f(\partial)$, produisant un allongement ∂, n'est plus nécessairement égale et opposée à la force de pression capable de produire une diminution de longueur mesurée par le même nombre ∂, attendu qu'alors, en général, $f(-\partial)$ n'est pas égal à $-f(\partial)$ (**).

Entre les limites dont on a parlé, les deux coefficients E, η, dont le premier est une force divisée par une surface, et dont le second est une simple fraction numérique, déterminent complètement l'état relatif d'un corps élastique. Tous deux sont différents pour les différentes

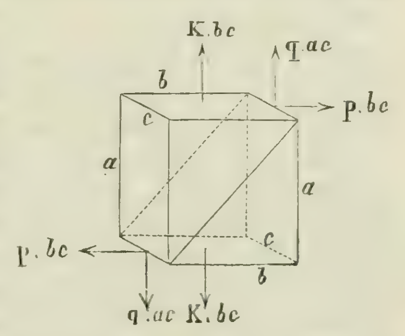
(*) On ne voit pas que cette égalité des effets opposés de tractions et pressions égales résulte de ce qui vient d'être dit. (Voy. la note déjà annoncée de la fin du § **16**.)

(**) $f(-\partial)$, alors est généralement moindre en valeur absolue que $-f(\partial)$. Les contractions, lorsque leur *proportion* cesse d'être très petite, exigent, pour être opérées, plus de force que des extensions de même proportion : cela tient, sans aucun doute, à ce qu'un rapprochement de deux atomes en exige plus, aussi, qu'un écartement égal, lorsque ces changements de distance sont assez notables, relativement à la distance primitive ; et c'est ce qui explique, ainsi que je l'ai fait observer depuis longtemps, comment les vibrations calorifiques dilatent les corps ou augmentent la grandeur moyenne de chacune de leurs dimensions.

substances; seulement, le second peut être regardé comme généralement compris entre les limites 0 et $\frac{1}{2}$.

§ 3. — Deuxième sorte de déformation. Déplacement des tranches ou couches parallèles du corps, par glissement les unes devant les autres.

Outre les déformations par pression et par traction, le parallélépipède élastique considéré peut subir une déformation d'une autre espèce, consistant en ce que chaque section transversale cheminerait dans son propre plan, sans changer de grandeur ni de forme, et de sorte que la dimension longitudinale *a* qui leur était perpendiculaire leur devienne légèrement oblique. Figurons-nous, par exemple, que quatre faces du corps, savoir, les deux qui sont perpendiculaires aux côtés *a*, et les deux qui sont perpendiculaires aux côtés *b*, se trouvent sollicitées par des forces uniformément réparties sur ces faces et dont les directions soient déterminées de la manière suivante : 1° que les forces sollicitant chacune des deux faces perpendiculaires à *a* agissent dans le plan de ces faces *b c*, et soient parallèles à *b*, mais que dans les deux faces elles aient des directions opposées l'une à l'autre; 2°, que les forces sollicitant les deux faces *a c* perpendiculaires à *b* soient parallèles à *a*, et aussi dirigées en sens contraire sur les deux faces parallèles opposées. Les deux premières forces, si elles ont des intensités p par unité de surface, sont équivalentes à un couple p.*ab*, avec un bras de levier *a*. De même, les autres forces, si leur intensité est q par unité superficielle, sont équivalentes à un couple q. *ac*, avec un bras de levier *b*. Pour que ces forces se fassent équilibre sur le parallélépipède, considéré comme un corps rigide, il est nécessaire que les couples soient de sens opposés et que leurs moments soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait q. $acb = $ p. bca, d'où



$$q = p.$$

La même condition doit aussi être remplie pour assurer l'équilibre du corps élastique, arrivé, par sa petite déformation, à l'état d'équilibre.

L'effet que de telles forces produisent sur le parallélépipède consiste manifestement en ce que le rectangle *ab* se change en un parallélo-

gramme dont les côtés, au lieu d'être perpendiculaires l'un à l'autre, forment entre eux des angles $\frac{\pi}{2} - g$, expression où g représente le très petit angle de déformation, ou la grandeur très petite du cosinus de l'angle presque droit dans lequel s'est changé l'angle primitivement droit des deux côtés *a*, *b*. Ce petit angle, ou ce cosinus de son complément, s'appelle généralement *glissement*, car il mesure la quantité dont les deux côtés opposés *b*, ou les deux côtés opposés *a*, ont glissé l'un devant l'autre, pour l'unité de leur distance *a* ou *b*. La grandeur de ce glissement dépend de l'intensité p, ainsi que de la nature du corps, et comme une force p assez grande ne produit qu'un très petit glissement ou angle de déformation g, on peut, tout à fait de la même manière qu'on a dite pour l'extension de l'unité de longueur, supposer p proportionnel à g et poser

$$\text{(1)} \qquad p = Gg \text{ (*)}.$$

Dans les corps isotropes ou d'égale contexture en tous sens, le coefficient G peut s'exprimer en fonction du coefficient E et de la fraction η à l'aide des considérations suivantes.

Revenons au parallélépipède dans l'état où il se trouve amené par une force de traction parallèle à son côté *a*. Soit K cette force, par unité superficielle des faces *b c*. Supposons $a = b$, en sorte que les sections perpendiculaires à *c* soient des carrés; figurons-nous le parallélépipède élastique partagé en deux prismes par un plan parallèle à ce troisième côté *c*, et passant par les diagonales de ces carrés *a b*. Si l'on sépare l'un de ces prismes triangulaires de l'autre, il ne peut rester dans l'état d'équilibre produit primitivement par l'application de la force de traction K, à moins que certaines forces tangentielles ou normales ne soient appliquées et également réparties sur sa face oblique. Les grandeurs de ces forces sont faciles à déterminer. Les forces tangentielles étant supposées avoir, par unité de surface, l'intensité T, doivent faire équilibre à la composante de K suivant la même direction. Décomposons K en deux forces, l'une suivant la tangente, l'autre suivant la normale à cette nouvelle face avec laquelle K fait un angle de 45 degrés, chacune de ces composantes sera égale à $K\sqrt{\frac{1}{2}}$. Si nous considérons en outre que la surface sur laquelle agit

(*) Cette proportionnalité du petit glissement g à la force qui le produit a besoin, comme la proportionnalité analogue de la petite dilatation ∂ du § précédent, analogiquement à ce que nous avons dit à la deuxième note de ce § **2**, page 6, d'être prouvée par des faits ou par quelque raisonnement basé sur des faits. (Voyez encore, ci-après, la grande note du § **11** après les formules (23)].

K est à celle sur laquelle s'exerce T dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, nous aurons comme condition d'équilibre de T avec la composante de K de même direction tangentielle à la nouvelle face :

$$T\sqrt{2} = K\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{K}{2}.$$

Cela fait voir que les plans parallèles à la section diagonale doivent, dans le parallélépipède, être poussés l'un devant l'autre, parallèlement à eux-mêmes, et qu'une force $\frac{K}{2}$, appliquée par unité superficielle, est nécessaire pour les maintenir dans les positions relatives où ils sont ainsi amenés. D'après ce qui précède, une ligne droite, primitivement perpendiculaire à ces plans obliques, formera avec eux, par l'effet de la traction K, un angle $\frac{\pi}{2} - g$, g devant avoir la valeur tirée de la formule (1) $p = Gg$, où l'on aurait mis, à la place de p, la force tangentielle que nous venons de reconnaître égale à $\frac{K}{2}$, c'est-à-dire devant avoir la valeur

$$g = \frac{K}{2G}.$$

Mais on peut trouver directement cet angle g; car la ligne droite dont nous parlons, primitivement perpendiculaire à la section faite suivant la diagonale du carré *a b*, n'était autre chose que la deuxième diagonale. Si les deux diagonales doivent former entre elles l'angle $\frac{\pi}{2} - g$, après que la traction K a fait prendre au côté *a* du carré la longueur $a\left(1 + \frac{K}{E}\right)$, et, par suite (§ 2), à l'autre côté du carré la longueur $a\left(1 - \eta\frac{K}{E}\right)$, l'on a pour la tangente de la moitié de cet angle actuel des deux diagonales

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{g}{2}\right) = \frac{1 - \eta\frac{K}{E}}{1 + \frac{K}{E}},$$

ou, si l'on considère que l'angle g est très petit, ce qui permet de remplacer tang $\frac{g}{2}$ par $\frac{g}{2}$,

$$\frac{1 - \frac{g}{2}}{1 + \frac{g}{2}} = \frac{1 - \eta\frac{K}{E}}{1 + \frac{K}{E}},$$

ou enfin, en négligeant les quantités très petites d'ordre supérieur,

$$g = \frac{K}{E}(1+\eta).$$

Cette formule comparée avec l'expression de g ci-dessus, donne

$$(1a) \qquad G = \frac{E}{2(1+\eta)},$$

qui est l'expression cherchée. Il en résulte, puisque η reste généralement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, que G n'est généralement pas plus grand que la moitié, ni plus petit que le tiers du modèle d'élasticité E (*).

§ 4. — Équilibre d'un parallélépipède fini ou élémentaire, soumis à des tractions ou pressions quelconques, uniformément distribuées sur ses faces. Expressions des six déformations élémentaires (dilatations et glissements) en fonction de leur six composantes suivant trois directions rectangulaires.

D'après ces préliminaires, il est facile de déterminer l'état d'équilibre d'un parallélépipède, dont les faces sont sollicitées par des tractions uniformément distribuées sur chacune, et de directions quelconques, mais les mêmes en tous les points d'une même face. Pour ramener ce cas au précédent, il suffit de se rappeler un principe de mécanique, que l'on présente habituellement à propos de la théorie des petites oscillations, et qui consiste essentiellement en ce qu'un ensemble de causes dont chacune est capable isolément de produire un très petit effet, engendre purement et simplement la somme de ces effets particuliers (**).

(*) Ce raisonnement ingénieux par lequel Clebsch arrive à la relation (1 *a*) sans invoquer les formules de *composantes de tension*, qu'il donne plus loin, ni celles de changements de plans de tensions ou de pressions, suppose que les contextures sont les mêmes longitudinalement que transversalement.

Aussi, voulant donner des formules applicables lorsqu'elles sont différentes, comme cela se présente presque toujours, nous ne ferons, dans ce qui va suivre, aucun usage de cette relation entre E, G et η, que nous supposerons indépendants les uns des autres, ainsi que nous avons dit dans notre *Avertissement.*

Nous verrons, toutefois, que lorsque la contexture est la même seulement dans les divers sens transversaux, il y a une relation de même forme f ou $G_1 = \frac{E'}{2(1+\eta')}$ sans doute démontrable de la même manière, entre le module E' *d'élasticité latérale*, ou d'extension de petits prismes taillés transversalement, la proportion η' de leurs contractions aussi latérales, et le coefficient G_1 de glissement des éléments des sections transversales du prisme. (Voir le n° 16 de la note de la fin du § **16**.)

(**) J'ai démontré ce principe, en 1838, dans les feuilles lithographiées de Leçons faites à l'École des Ponts et Chaussées, en considérant simplement deux molécules dont l'une peut être supposée restée immobile tandis que l'autre a éprouvé une suite de déplacements extrêmement petits par rapport à leur ligne de jonction : comme, en les projetant sur celle-ci,

En conséquence de ce principe, si un parallélépipède est sollicité par des forces quelconques agissant sur sa surface, on peut décomposer ces forces, de manière que chaque composante soit capable de produire, suivant sa nature, un des effets qui viennent d'être considérés, et examiner ce qui résulte de l'addition de ces divers effets.

Bornons-nous, ici, au cas où la matière est tout à fait isotrope.

Considérons deux à deux les faces opposées du parallélépipède, et d'abord, par exemple, celles qui sont perpendiculaires à son côté a. Ces deux faces doivent être sollicitées par des forces d'égale intensité et de même direction, mais de sens opposé. Je les décompose suivant les directions des côtés a, b, c, et je désigne, pour l'une des deux faces, les composantes respectives par

$$\mathfrak{t}_{aa}, \quad \mathfrak{t}_{ab}, \quad \mathfrak{t}_{ac},$$

et pour la face opposée par les mêmes lettres affectées d'un signe contraire. Je décompose de la même manière les forces qui agissent sur les faces perpendiculaires à b, en

$$\mathfrak{t}_{ba}, \quad \mathfrak{t}_{bb}, \quad \mathfrak{t}_{bc},$$

pour l'une des faces, et en forces opposées pour l'autre; enfin, de même les forces qui agissent sur les faces perpendiculaires à c, en

$$\mathfrak{t}_{ca}, \quad \mathfrak{t}_{cb}, \quad \mathfrak{t}_{cc};$$

en sorte que la première des deux sous-lettres indique constamment la face *par sa normale*, et la seconde, le sens de la décomposition. On obtient de cette manière des forces de traction $\mathfrak{t}_{aa}$, $\mathfrak{t}_{bb}$, $\mathfrak{t}_{cc}$ parallèles respectivement aux trois côtés, et, en outre, des couples de forces qui agissent sur le parallélépipède à la manière de celles qui ont été considérées au § précédent (c'est-à-dire dans le plan même des faces sur lesquelles elles sont appliquées). Ces couples doivent, pour que l'équilibre puisse se maintenir, être égaux deux à deux, d'après ce qui précède, en sorte que

$$(1\,b) \qquad \mathfrak{t}_{bc} = \mathfrak{t}_{cb}, \quad \mathfrak{t}_{ca} = \mathfrak{t}_{ac}, \quad \mathfrak{t}_{ab} = \mathfrak{t}_{ba}. \qquad (*)$$

---

on a des quantités proportionnelles aux forces qui les ont produits, le déplacement résultant, ainsi projeté, est celui qui aurait été engendré par la résultante des forces.

On peut tirer ce même principe de la linéarité des expressions des composantes des pressions en fonction des dilatations et des glissements. (Voir la note à la fin du § **11**.)

(*) Il s'agit ici de l'équilibre de rotation. Il est évident qu'en prenant pour axe des moments un des côtés a, l'équation de moments ne sera à poser qu'entre les composantes $_{bc}$ parallèles à c, agissant sur chaque unité superficielle de la face ac, qui est à la distance

L'action de ces diverses forces allonge les côtés a, b, c, et change les grandeurs de leurs angles; et il ne faut pas perdre de vue que le changement de longueur de chaque côté est dû, non seulement à l'allongement que produit la traction agissant suivant sa direction, mais encore aux accourcissements que déterminent les tractions agissant dans les directions des deux autres côtés : chacun des trois allongements apparaît donc comme une différence entre un allongement réel produit par la traction correspondante et deux accourcissements résultant des deux autres tractions.

Qu'on désigne donc les longueurs nouvelles des côtés a, b, c par

$$a(1+\partial_a), \quad b(1+\partial_b), \quad c(1+\partial_c)$$

et aussi, sous l'influence des forces t, les angles nouveaux que forment entre eux les côtés

$$b, c \quad \text{par} \quad \frac{\pi}{2} - g_{bc},$$

$$c, a \quad \text{par} \quad \frac{\pi}{2} - g_{ca},$$

$$a, b \quad \text{par} \quad \frac{\pi}{2} - g_{ab},$$

alors, les valeurs des six quantités ou fractions numériques très petites $\partial_a, \partial_b, \partial_c, g_{bc}, g_{ca}, g_{ab}$, sont, d'après les §§ 2 et 3, et eu égard à ce que l'on a ($1a$) $G = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\eta}$ dans les corps tout à fait isotropes

$$(1\,c) \quad \begin{cases} \partial_a = \frac{1}{E}\left[t_{aa} - \eta\,(t_{bb} + t_{cc})\right], & g_{bc} = \frac{2\,t_{bc}}{E}(1+\eta) \\ \partial_b = \frac{1}{E}\left[t_{bb} - \eta\,(t_{cc} + t_{aa})\right], & g_{ca} = \frac{2\,t_{ca}}{E}(1+\eta) \\ \partial_c = \frac{1}{E}\left[t_{cc} - \eta\,(t_{aa} + t_{bb})\right], & g_{ab} = \frac{2\,t_{ab}}{E}(1+\eta) \end{cases} \quad (*)$$

---

b de ce côté, et les composantes t_{cb} parallèles à b, agissant sur chaque unité superficielle de la face ab, qui est à la distance c du même côté a; car les autres composantes ne fournissent que des moments nuls ou qui se détruisent. On a donc

$$ac.t_{bc}b = ab.t_{cb}.c \quad \text{d'où} \quad t_{bc} = t_{cb}.$$

Les deux autres égalités se démontrent de même en prenant les moments autour d'un côté b et autour d'un côté c.

(*) De ces six équations, en les résolvant par rapport aux six composantes t, et écrivant x, y, z, au lieu de a, b, c, l'auteur tire au commencement du § 17 les expressions de

§ 5. — Déformation ellipsoïdale d'un élément sphérique, dans un corps d'une contexture quelconque.

Occupons-nous ici un moment, et sauf à y revenir plus tard (§ 15) (*), de la loi géométrique des déformations éprouvées autour de chaque point du corps et qui, pour tous les points, sont nécessairement les mêmes.

Soit, primitivement, ou avant l'action des forces extérieures, une sphère décrite autour d'un point intérieur, pris comme centre, et sur la surface de laquelle se trouvent les molécules situées (toujours primitivement) à des distances de son centre égales à son rayon. Cette sphère, par suite des déplacements qu'éprouvent ses diverses molécules, se change en une autre surface, et on s'assure facilement, comme on va voir, que cette surface est un ellipsoïde différant peu d'une sphère. Figurons-nous pour cela, et en supposant d'abord le corps isotrope, que les forces

$$\mathfrak{t}_{aa}, \quad \mathfrak{t}_{bb}, \quad \mathfrak{t}_{cc}$$

agissent seules. Les trois dimensions de la sphère, parallèles aux côtés a, b, c, se trouvent étendues dans la proportion de 1 à $1+\partial_a$, $1+\partial_b$, $1+\partial_c$; et l'on a, au lieu de la sphère, un ellipsoïde dont les axes sont parallèles à ces côtés, les demi-axes ayant pour longueurs, si r était le rayon de la sphère,

$$r(1+\partial_a), \quad r(1+\partial_b), \quad r(1+\partial_c).$$

Que maintenant on fasse agir les forces

$$\mathfrak{t}_{bc}, \quad \mathfrak{t}_{ca}, \quad \mathfrak{t}_{ab},$$

nulle autre extension ou contraction n'est produite par là dans les

---

composantes de tension en fonction des six déformations ∂, g, auxquelles il substitue leurs valeurs exprimées par les neuf dérivées en x, y, z des déplacements u, v, w, supposés très petits.

Cette manière, due à Clebsch, d'établir les formules d'élasticité du cas de l'isotropie parfaite, avec deux constantes, le module E et la fraction numérique η, au lieu des coefficients λ, μ, de Lamé, est élémentaire et fort ingénieuse. Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit à la note de la fin du § **3**, ces formules ne seront d'aucun usage pour les applications, excepté pour celle qui est faite §§ **18** et **19** aux déformations et aux vibrations d'une sphère qui, toutefois, aurait pu être supposée, aussi, d'élasticité différente dans le sens de ses rayons et dans les sens qui leur sont perpendiculaires.

(*) Voyez aussi la note de la fin du § **37**.

directions orthogonales a, b, c; mais les forces t_{bc} déplacent les unes relativement aux autres les couches ou tranches de l'ellipsoïde comprises entre des plans parallèles aux faces $b\,c$ du parallélépipède; les forces t_{ca} déplacent de même, en les faisant glisser l'une devant l'autre, les couches parallèles aux faces $c\,a$, et les forces t_{ab} produisent un déplacement semblable des couches parallèles aux faces $a\,b$. La surface reste ellipsoïdale après ces divers changements. De plus, les points qui appartenaient à un axe principal du premier ellipsoïde sont restés les centres de tranches ou de coupes parallèles entre elles. Cela montre que les trois lignes résultant des ensembles de ces points, et qui, restées parallèles aux côtés du parallélépipède déformé, comprennent entre elles des angles $\frac{\pi}{2} - g_{bc}$, $\frac{\pi}{2} - g_{ca}$, $\frac{\pi}{2} - g_{ab}$, sont devenues des diamètres conjugués de l'ellipsoïde final.

On peut ainsi énoncer ce théorème :

Les points du corps qui formaient primitivement, par leur ensemble, une surface de sphère, forment, après leurs déplacements, la surface d'un ellipsoïde qui a trois diamètres conjugués parallèles aux côtés du parallélépipède déformé, et dont les longueurs sont entre elles comme

$$1 + \partial_a : 1 + \partial_b : 1 + \partial_c,$$

∂_a, ∂_b, ∂_c *désignant les proportions des allongements de ces trois côtés, par unité de longueur.*

Or, il est facile de voir que la même transformation aurait lieu si chacune des dilatations ∂, au lieu d'être due à une tension exercée dans son seul sens, était produite par plusieurs; et la même chose peut être dite des glissements. Le théorème énoncé, purement géométrique ou cinématique, et résultant de la seule loi de continuité, peut donc être appliqué à des corps de contexture continue quelconque, comme a fait Cauchy qui l'a donné le premier (*).

§ 6. — Ellipsoïde d'élasticité (**) et surface directrice. Tension sur une surface quelconque en fonction des six composantes des tensions sur trois surfaces rectangulaires.

Il y a deux autres surfaces du second degré que celle des dilatations

---

(*) Ce dernier alinéa du § 5 est de nous. Voyez § **15** et note du § **37**.

(**) On peut ajouter DE LAMÉ : il a donné en effet le premier, dans un mémoire de 1828 fait avec la collaboration de Clapeyron, cette surface du second degré. Cauchy avait déjà donné la surface directrice et d'autres surfaces dont il tirait également l'existence des trois tensions principales.

du § 5. L'une est toujours un ellipsoïde, dont la construction donne immédiatement les tensions sur toutes les faces se croisant en un point quelconque de l'intérieur d'un corps.

L'autre, appelée *directrice*, donne, par ses plans tangents, les directions de ces faces.

Concevons, pour les déterminer, un plan passant par un point quelconque du parallélépipède considéré et qui divise en deux parties le corps solide dont ce parallélépipède est un élément. Pour maintenir l'équilibre dans chaque partie, il faudra faire agir, sur ce plan de section, certaines tractions uniformément distribuées, dont la direction ne sera généralement pas perpendiculaire au plan. Comme ces tractions ne sont, évidemment, autre chose que les forces élastiques qui étaient exercées par la partie supposée retranchée sur celle dont on s'occupe, nous obtiendrons les forces élastiques de l'intérieur du corps en déterminant les tractions dont nous parlons, de manière que la partie restante soit maintenue en équilibre après qu'on aura retranché l'autre. Supposons que cette portion retranchée du petit prisme soit un tétraèdre, et figurons-nous, à cet effet, qu'on ait mené, par un point intérieur, trois axes coordonnés x, y, z, parallèles respectivement aux côtés a, b, c de l'élément prismatique rectangle considéré. Désignons par

$$p,\ q,\ r$$

les angles que la normale au plan de la section fait avec les axes, et par

$$\varpi,\ \varkappa,\ \rho$$

les angles que la traction s'exerçant sur ce même plan fait avec les mêmes axes. Soient T l'intensité inconnue de cette traction pour l'unité superficielle de la section opérée, et σ la superficie de cette section. Alors, l'intensité de la force totale agissant sur la coupe sera $T\sigma$, et ses composantes, parallèles aux axes coordonnés, seront :

$$T\sigma \cos \varpi, \quad T\sigma \cos \varkappa, \quad T\sigma \cos \rho.$$

Les trois faces latérales du tétraèdre, qui sont des portions des faces du parallélépipède, ont pour grandeurs respectives, $\sigma \cos p$, $\sigma \cos q$, $\sigma \cos r$, projections de σ sur les trois plans coordonnés des yz, des zx et des xy; par conséquent, les forces qui y agissent, prises ensemble, sont les suivantes :

Dans la direction de l'axe des x : $t_{xx}\,\sigma \cos p + t_{yx}\,\sigma \cos q + t_{zx}\,\sigma \cos r$ (*);

(*) Les trois directions rectangulaires étant maintenant désignées par x, y, z, les indices a, b, c employés précédemment pour les t, les ∂, les g, sont naturellement remplacés par les indices x, y, z.

Dans celle de l'axe des y : $t_{xy}\,\sigma \cos p + t_{yy}\,\sigma \cos q + t_{zy}\,\sigma \cos r$;

Dans celle de l'axe des z : $t_{xz}\,\sigma \cos p + t_{yz}\,\sigma \cos q + t_{zz}\,\sigma \cos r$.

Les conditions pour que la traction T leur fasse équilibre sont, en supprimant le facteur commun σ,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} T \cos \varpi &= t_{xx} \cos p + t_{yx} \cos q + t_{zx} \cos r \\ T \cos \chi &= t_{xy} \cos p + t_{yy} \cos q + t_{zy} \cos r \\ T \cos \rho &= t_{xz} \cos p + t_{yz} \cos q + t_{zz} \cos r \end{aligned}\right. \quad (^*)$$

Ces équations, avec la relation connue

$$\cos^2 \varpi + \cos^2 \chi + \cos^2 \rho = 1,$$

déterminent complètement la force T et la direction suivant laquelle elle agit, en sorte qu'on peut toujours trouver l'intensité T et la direction (ϖ, χ, ρ) de la tension que supporte une petite portion quelconque de surface plane imaginée n'importe où, et n'importe dans quelle direction déterminée par les angles p, q, r, à l'intérieur du corps qui éprouve, sur trois faces rectangulaires, en cet endroit, des tractions dont on connaît les six composantes, t_{xx}, etc.

Mais pour pouvoir comparer entre elles les grandeurs ainsi que les directions de ces tensions ou tractions (**) s'exerçant sur divers plans qui passent par le même point, nous ferons usage d'une interprétation géométrique des équations (2) qui a été donnée, dans ce qu'elle a d'essentiel, par M. Lamé.

(*) C'est le théorème dit du *tétraèdre*, dû à Cauchy comme celui (1 *b*) de *réciprocité* des composantes tangentielles. Je crois utile de l'énoncer ainsi en langage ordinaire :

La tension intérieure sur un élément plan est la résultante des tensions que supportent les projections de cet élément sur trois plans rectangulaires menés au même endroit du corps.

Ce théorème, ainsi que celui de réciprocité des tractions tangentielles qu'exprime $t_{zy} = t_{yz}$, est applicable aux corps élastiques ou non élastiques, solides ou fluides, en repos ou en mouvement, même lorsque toutes leurs molécules reçoivent l'action de forces qui émanent de points extérieurs, comme fait la pesanteur. En effet, ce que fournissent ces forces, ainsi que les inerties, dans les équations d'équilibre, de translation ou de rotation des très petits éléments, en forme soit de prisme soit de tétraèdre, est très petit de troisième ordre comme le volume, et négligeable devant les tensions qui s'exercent sur leurs faces et qui ne sont petites que du second ordre comme leurs superficies, ainsi qu'il sera dit au § 12.

(**) C'est une heureuse innovation de Clebsch, que d'appeler ces forces ou résultantes d'actions moléculaires *tensions* ou *tractions* et non pas *pressions*, comme ont fait les autres auteurs ; car tous, avec lui, affectent du signe + celles qui sont attractives, ou qui tendent à rapprocher les deux parties du corps que sépare la face considérée, et du signe — celles qui sont répulsives ou qui tendent à les éloigner, c'est-à-dire les pressions proprement dites, comme celles qui s'exercent dans les fluides (hors des petits espaces où les forces capillaires dominent). Au lieu de la notation t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} qui m'a été indiquée par Coriolis et que Cauchy avait finalement adoptée, Clebsch emploie la notation t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{23}, t_{31} que je crois moins claire.

Si l'on résout ces équations (2) par rapport aux variables cos p, cos q, cos r, et si l'on désigne par Δ le dénominateur commun des valeurs qu'on en tire, c'est-à-dire si l'on pose

$$(2\,a)\qquad \Delta = t_{xx}t_{yy}t_{zz} + 2\,t_{yz}t_{zx}t_{xy} - t_{xx}t_{yz}^2 - t_{yy}t_{zx}^2 - t_{zz}t_{xy}^2$$

et si l'on désigne de même par Δ_{xx}, Δ_{yy} .... les expressions suivantes :

$$(2\,b)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Delta_{xx} = t_{yy}t_{zz} - t_{yz}^2, & \Delta_{yz} = t_{zx}t_{xy} - t_{xx}t_{yz} \\ \Delta_{yy} = t_{zz}t_{xx} - t_{zx}^2, & \Delta_{zx} = t_{xy}t_{yz} - t_{yy}t_{zx} \\ \Delta_{zz} = t_{xx}t_{yy} - t_{xy}^2, & \Delta_{xy} = t_{yz}t_{zx} - t_{zz}t_{xy} \end{array}\right.$$

l'on obtient les solutions des trois équations du premier degré (2) sous la forme suivante :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta \cos p = \mathrm{T}\,(\Delta_{xx}\cos\varpi + \Delta_{xy}\cos\varkappa + \Delta_{xz}\cos\rho) \\ \Delta \cos q = \mathrm{T}\,(\Delta_{yx}\cos\varpi + \Delta_{yy}\cos\varkappa + \Delta_{yz}\cos\rho) \\ \Delta \cos r = \mathrm{T}\,(\Delta_{zx}\cos\varpi + \Delta_{zy}\cos\varkappa + \Delta_{zz}\cos\rho) \end{array}\right.$$

Considérons maintenant la surface du second ordre représentée par l'équation suivante, où k est une constante arbitraire :

$$(4)\qquad \Delta_{xx}x^2 + \Delta_{yy}y^2 + \Delta_{zz}z^2 + 2\,\Delta_{yz}yz + 2\,\Delta_{zx}zx + 2\,\Delta_{xy}xy = k\Delta,$$

cette surface ayant son centre au point que l'on considère pris pour origine des coordonnées x, y, z. Cherchons l'endroit où cette surface est rencontrée par la droite suivant laquelle agit la traction T et qui part de ce centre. Il est clair, d'abord, d'après la signification de ϖ, $\varkappa$, ρ, qu'en cet endroit, ou pour ce point de rencontre, on a :

$$x : y : z = \cos\varpi : \cos\varkappa : \cos\rho.$$

Il en résulte que cos p, cos q, cos r, qui font connaître pour le point x, y, z, la direction de la normale au plan de coupe, ou à la face oblique du tétraèdre sur laquelle agit la traction T, sont entre eux comme les trois quotients différentiels du premier membre de l'équation (4) de la surface, pris respectivement par rapport à x, y, z, (*), et

(*) En effet, ces trois quotients différentiels : $2\left(\Delta_{xx}x + \Delta_{xy}y + \Delta_{xz}z\right)$; $2\left(\Delta_{yx}x + \Delta_{yy}y + \Delta_{yz}z\right)$; $2\left(\Delta_{zx}x + \Delta_{zy}y + \Delta_{zz}z\right)$ sont bien, d'après $x : y : z = \cos\varpi : \cos\varkappa : \cos\rho$ proportionnels aux seconds membres des équations (3) et par conséquent à cos p, cos q, cos r, respectivement.

que, par conséquent, le plan tangent à cette surface au point x, y, z, est parallèle au plan de la section qui supporte une traction dirigée suivant la droite allant du centre à ce point x, y, z, ou qu'en d'autres termes :

A chaque plan, mené par un point donné, répond, comme direction de la tension élastique qu'il supporte, celle du diamètre de la surface du second degré (4) *qui est conjugué à ce plan regardé comme diamétral*, ou, ce qui revient au même, *la direction du rayon vecteur mené au point où la surface* (4) *a son plan tangent parallèle au même plan donné.*

C'est la surface appelée, pour cette raison, *surface directrice*, et qui, comme on va le voir, est tantôt un ellipsoïde, tantôt un hyperboloïde.

Si maintenant, sur cette direction du diamètre conjugué à l'élément plan, on porte la grandeur même de la traction T, et si l'on fait la même chose pour tous les éléments plans qui se coupent au centre de la surface (4), on obtient une autre surface dont les rayons vecteurs représentent les forces élastiques en grandeur et en direction. Ce n'est toutefois qu'à l'aide de la surface (4) qu'elle peut donner les relations que l'on se propose de déterminer, car *tout rayon vecteur de la nouvelle surface donne la direction et la grandeur de la tension supportée par le plan conjugué à la direction de ce rayon par rapport à la surface* (4).

La nouvelle surface est l'*ellipsoïde d'élasticité*. C'est en effet toujours un ellipsoïde, tandis que l'équation du second degré (4) n'en représente pas toujours un.

On obtient l'équation de cette nouvelle surface en remarquant que celui de ses points dont le rayon fait avec les axes les angles p, q, r, a pour coordonnées

$$x = \mathrm{T}\cos p, \qquad y = \mathrm{T}\cos q, \qquad z = \mathrm{T}\cos r;$$

d'où l'on déduit, en substituant dans les équations (3) et en ajoutant leurs carrés, l'équation suivante de la nouvelle surface :

$$(5) \qquad (\Delta_{xx}x + \Delta_{xy}y + \Delta_{xz}z)^2 + (\Delta_{yx}x + \Delta_{yy}y + \Delta_{yz}z)^2 + (\Delta_{zx}x + \Delta_{zy}y + \Delta_{zz}z)^2 = \Delta^2.$$

Il n'y a plus, dans cette équation, d'autres variables que x, y, z. La surface qu'elle représente a, comme celle (4), son centre à l'origine, et le premier membre de son équation (5) étant nécessairement tou-

jours positif, ses coordonnées, x, y, z, ne peuvent devenir infinies ; c'est donc, comme nous l'avons dit, un ellipsoïde. D'où ce théorème :

Si l'on prend un point à l'intérieur d'un corps, et si l'on considère comme rayons vecteurs d'une surface les droites menées par ce point et représentant en grandeur et en direction les tractions qui s'exercent sur l'unité superficielle de tous les plans qui y passent, cette surface est l'ellipsoïde (5).

§ 7. — Tensions ou tractions principales. Axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité. Formules déterminant leurs directions et leurs grandeurs.

Il y a toujours certaines directions suivant lesquelles la traction est perpendiculaire au plan sur lequel elle s'exerce. Pour les trouver, on n'a qu'à faire, dans les égalités (2), les angles ϖ, χ, ρ respectivement égaux à p, q, r. Ces égalités deviennent alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (t_{xx} - T) \cos p + t_{yz} \cos q + t_{xz} \cos r = 0 \\ t_{xy} \cos p + (t_{yy} - T) \cos q + t_{yz} \cos r = 0 \\ t_{xz} \cos p + t_{yz} \cos q + (t_{zz} - T) \cos r = 0 \end{array} \right.$$

Elles contiennent, outre les rapports mutuels de $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$, la grandeur inconnue T de la traction sur l'unité superficielle de la surface dont la normale fait les angles p, q, r avec les x, y, z. Si l'on élimine entre elles les rapports des cosinus, on a en T, l'équation suivante, dont nous désignerons le premier membre par Θ :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = (t_{xx} - T)(t_{yy} - T)(t_{zz} - T) - 2 t_{yz} t_{zx} t_{xy} - (t_{xx} - T) t^2 \\ \qquad - (t_{yy} - T) t_{zx}^2 - (t_{zz} - T) t_{xy}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Cette équation, du troisième degré, a toujours ses trois racines réelles, comme on le montrera tout à l'heure. D'où cette conclusion :

Dans le corps, au point quelconque que l'on y considère, il y a toujours trois plans auxquels sont perpendiculaires les tractions qui s'exercent sur eux. Ces forces ont pour intensités les trois racines de l'équation

$$\Theta = 0$$

ou (7).

Pour trouver les directions des ces trois plans, remarquons que si la valeur de T, qui entre dans les équations (6) est supposée satisfaire

à l'équation (7), l'une quelconque des trois équations (6) rentre dans les deux autres, en sorte qu'elles se réduisent à deux. En laissant de côté successivement la première, la seconde et la troisième de ces équations (6) on obtient, sous les trois formes suivantes, les rapports mutuels des cosinus.

$$(7\,a)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} \cos p & : & \cos q & : & \cos r = \\ (t_{yy}-T)(t_{zz}-T)-t_{yz}^2 & : & t_{yz}\,t_{zx}-t_{xy}(t_{zz}-T) & : & t_{xy}\,t_{yz}-t_{xz}(t_{yy}-T) \\ t_{yz}\,t_{zx}-t_{xy}(t_{zz}-T) & : & (t_{zz}-T)(t_{xx}-T)-t_{xz}^2 & : & t_{zx}\,t_{xy}-t_{yz}(t_{zz}-T) \\ t_{xy}\,t_{yz}-t_{zx}(t_{yy}-T) & : & t_{zx}\,t_{xy}-t_{yz}(t_{xx}-T) & : & (t_{xx}-T)(t_{yy}-T)-t_{xy}^2 \end{array}\right.$$

On remarque immédiatement que les neuf binômes que renferment ces égalités sont les mêmes, trois à trois, dans les trois dernières lignes horizontales que dans les trois colonnes verticales qu'offre leur ensemble synoptique; en sorte que ces trois colonnes verticales représentent, aussi bien que les trois lignes horizontales, les rapports mutuels de cos p, cos q, cos r. On en déduit facilement que les six binômes contenus dans ces lignes sont proportionnels aux trois carrés et aux trois produits deux à deux des cosinus ; ou en d'autres termes qu'il y a toujours un nombre

$$m$$

tel que l'on ait :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} m\cos^2 p &= (t_{yy}-T)(t_{zz}-T)-t_{yz}^2 \\ m\cos^2 q &= (t_{zz}-T)(t_{xx}-T)-t_{zx}^2 \\ m\cos^2 r &= (t_{xx}-T)(t_{yy}-T)-t_{xy}^2 \\ m\cos q\cos r &= t_{zx}\,t_{xy}-t_{yz}(t_{xx}-T) \\ m\cos r\cos p &= t_{xy}\,t_{yz}-t_{zx}(t_{yy}-T) \\ m\cos p\cos q &= t_{yz}\,t_{zx}-t_{xy}(t_{zz}-T) \end{aligned}\right.\qquad (^*)$$

Ces égalités fournissent la détermination la plus simple et la plus évidente des cosinus en question. La valeur du facteur m se trouve en additionnant les trois premières de ces égalités, et en observant que la somme des carrés des trois cosinus est égale à 1. On a ainsi

$$m = (t_{yy}-T)(t_{zz}-T)+(t_{zz}-T)(t_{xx}-T)+(t_{xx}-T)(t_{yy}-T)-t_{yz}^2-t_{zx}^2-t_{xy}^2.$$

(*) Car en mettant les premiers membres des six égalités (8) à la place des binômes qui forment leurs seconds membres, dans les équations triples (7 *a*) que l'on vient de trouver pour les rapports mutuels de cos p, cos q, cos r, celles-ci sont identiquement satisfaites.

Cette expression revient à la suivante, eu égard à l'équation (7),

$$m = -\frac{d\Theta}{dT}.$$

On peut, au moyen de cette valeur de m, déterminer complètement les cosinus; en effet, les équations (8) donnent

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \cos p &= \sqrt{\frac{(t_{yy}-T)(t_{zz}-T)-t_{yz}^2}{-\frac{d\Theta}{dT}}} \\ \cos q &= \sqrt{\frac{(t_{zz}-T)(t_{xx}-T)-t_{zx}^2}{-\frac{d\Theta}{dT}}} \\ \cos r &= \sqrt{\frac{(t_{xx}-T)(t_{yy}-T)-t_{xy}^2}{-\frac{d\Theta}{dT}}} \end{aligned}\right.$$

Les signes des radicaux doivent être choisis tels que les expressions fournies par les équations (8) satisfassent encore aux autres équations, condition qui les détermine tous, hors un. Cette indétermination qui fait que les cosinus peuvent être pris, tantôt avec certains signes, tantôt avec des signes opposés, pourvu que ce soit tous ensemble, est indifférente, au demeurant. Elle revient à ce que la normale à une surface peut être tirée aussi bien d'un de ses deux côtés que de l'autre.

Il faut montrer maintenant comment les trois directions pour lesquelles la traction agit perpendiculairement aux faces à travers lesquelles elle s'exerce sont placées l'une par rapport à l'autre, et prouver que ce sont celles des axes principaux communs à l'ellipsoïde d'élasticité (5) et à la surface directrice (4). Désignons, dans ce but, par T′, T″ deux racines de l'équation (7) et par p', q', r' ; p'', q'', r'' les systèmes correspondants des valeurs des angles p, q, r. Si dans les équations (6) on remplace p, q, r, par p', q', r' et si l'on additionne ces équations après les avoir multipliées respectivement par $\cos p''$, $\cos q''$, $\cos r''$, on obtient

$$\begin{aligned} T'(\cos p'\cos p'' + \cos q'\cos q'' + \cos r'\cos r'') &= \\ = t_{xx}\cos p'\cos p'' + t_{yz}(\cos q'\cos r'' + \cos r'\cos q'') &+ \\ + t_{yy}\cos q'\cos q'' + t_{zx}(\cos r'\cos p'' + \cos p'\cos r'') &+ \\ + t_{zz}\cos r'\cos r'' + t_{xy}(\cos p'\cos q'' + \cos q''\cos p''). \end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière équation ne change pas si l'on y change les lettres accentuées une fois contre les lettres accentuées deux fois et réciproquement. La même chose doit donc avoir lieu pour le premier membre. Or, son second facteur ne change pas non plus; mais le premier facteur T′ devient T″. Si donc on n'a pas T′ = T″, il faut nécessairement qu'on ait

$$(10) \qquad \cos p' \cos p'' + \cos q' \cos q'' + \cos r' \cos r'' = 0.$$

Cette égalité exprime que

Deux quelconques des trois directions des tractions qui sont perpendiculaires aux plans sur lesquels elles s'exercent doivent être aussi perpendiculaires l'une à l'autre, si les racines correspondantes de l'équation (7) *sont inégales.*

Si donc les trois tractions sont inégales, ces trois directions de tractions forment trois lignes à angles droits l'une sur l'autre. On peut prendre ces lignes pour les axes de nouvelles coordonnées. Si l'on désigne ces trois nouvelles coordonnées, dans les directions des trois tractions, T′, T″, T‴, par X, Y, Z, et si l'on appelle aussi p''', q''', r''', les angles correspondant à la troisième direction, on aura, par la transformation des coordonnées (ou par le théorème de l'égalité des deux projections, sur une droite quelconque, d'un chemin polygonal et du chemin direct qui va de son point de départ à son point d'arrivée) les formules

$$\begin{aligned} X &= x \cos p' + y \cos q' + z \cos r', \\ Y &= x \cos p'' + y \cos q'' + z \cos r'', \\ Z &= x \cos p''' + y \cos q''' + z \cos r'''. \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir quelles expressions on obtient si on introduit ces nouvelles coordonnées dans les équations des surfaces (4) et (5).

On peut évidemment, en effet, se représenter aussi bien le parallélépipède solide limité par trois paires quelconques de faces planes perpendiculaires l'une à l'autre que par ses faces primitives, en supposant d'avance, seulement, que l'on fera agir sur ces nouvelles faces les tractions qui répondent à leur direction dans le même corps. L'état intérieur de ce corps n'est nullement changé par là; d'où il suit que les surfaces (4) et (5) qui ne dépendent que des rapports mutuels des tensions intérieures ne sont pas changées non plus. Et comme on a trouvé, ci-dessus, trois directions pour les faces auxquelles sont per-

pendiculaires les tractions intérieures qui s'y exercent, *on peut toujours, du parallélépipède donné, extraire un autre parallélépipède qui n'a besoin que de tractions normales à ses faces pour être maintenu dans l'équilibre antérieurement établi*. Prenons trois de ses six faces pour plans coordonnés, et posons, pour les coordonnées nouvelles qui s'y rapportent, les équations (4) et (5). Nous n'aurons, d'après ce qui précède, qu'à mettre, dans celles-ci, les coordonnées et les tensions ou tractions nouvelles, au lieu des anciennes. Par conséquent, à la place de t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, nous mettrons T′, T″, T‴ et nous annulerons t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} ce qui donnera, d'après (2 *a*) et (2 *b*),

Pour Δ_{xx}. . . . . T″ T‴ ; pour Δ_{yz}. 0,
Pour Δ_{yy}. . . . . T‴ T′ ; pour Δ_{zx}. 0,
Pour Δ_{zz}. . . . . T′ T″ ; pour Δ_{xy}. 0,
Pour Δ, ... T′ T″ T‴,

moyennant quoi, les équations des surfaces (4) et (5), rapportées aux axes principaux, se présentent sous la forme suivante :

$$\frac{X^2}{T'} + \frac{Y^2}{T''} + \frac{Z^2}{T'''} = k \qquad \text{(surface directrice).} \tag{4a}$$

$$\frac{X^2}{T'^2} + \frac{Y^2}{T''^2} + \frac{Z^2}{T'''^2} = 1. \qquad \text{(ellipsoïde d'élasticité).} \tag{5a}$$

Les *tensions principales* T′, T″, T‴, sont, comme l'on voit, les demi-axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité (5 *a*). Ceux de l'autre surface (4 *a*) sont proportionnels aux racines carrées de ces grandeurs, si toutefois cette dernière surface est un ellipsoïde; mais il est évident que cette condition n'est remplie, quand on regarde *k* comme une constante positive, que si les tensions principales sont toutes trois positives; si l'une d'elles devient négative, ou se change en une pression, la surface (4 *a*) est un hyperboloïde à une nappe; elle est un hyperboloïde à deux nappes, si deux des mêmes tensions deviennent des pressions; enfin, avec trois pressions, la surface (4 *a*) devient imaginaire. Au contraire, si on regarde *k* comme négatif, on a un ellipsoïde avec trois pressions, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, selon qu'une ou deux de ces pressions se changent en tractions, et une surface imaginaire pour trois tractions. Ainsi, par un choix convenable du signe de la constante *k*, on a, pour cette surface (4 *a*), un ellipsoïde si les trois forces s'exerçant sur les trois faces principales sont de

même sens, et un hyperboloïde, si elles sont de sens différents (*).

Au reste, l'équation (10) prouve, comme nous l'avions admis, que toutes les racines de l'équation du 3e degré (7) sont réelles. En effet, si deux racines T′ et T″ de cette équation en T étaient deux imaginaires conjuguées, il en serait de même des groupes cos p' et cos p'', cos q' et cos q'', cos r' et cos r'' de valeurs correspondantes de cos p, cos q, et cos r. Or le produit de deux imaginaires conjuguées $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$ est égal à la somme $a^2 + b^2$ de deux carrés. Si donc T′ et T″ étaient deux quantités de cette sorte, l'équation (10), qui a zéro pour second membre, aurait pour premier membre la somme de six carrés réels. Une pareille équation étant impossible, il est impossible aussi que l'équation du 3e degré (7), dont nous nous occupons, ait des racines imaginaires.

§ 8. — Cas où l'ellipsoïde d'élasticité devient une surface de révolution. — Cas où il devient une sphère.

Lorsque deux racines d'une équation sont égales, on sait que leur substitution annule non seulement le premier membre de cette équation, dont le second membre est supposé zéro, mais encore son *quotient différentiel* par rapport à l'inconnue. Soient donc deux racines, T′, T″ de l'équation $\Theta = 0$ égales entre elles; elles annulent $\frac{d\,\Theta}{d\,\mathrm{T}}$ et par conséquent aussi, d'après (8 a) le facteur m des équations (8). Les premiers membres de ces équations s'annulant, on voit que si T désigne cette double racine, les rapports désignés dans les trois séries suivantes sont égaux chacun à chacun.

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} t_{xx} - \mathrm{T} & : t_{xy} & : t_{zx} \\ t_{yx} & : t_{yy} - \mathrm{T} & : t_{zy} \\ t_{zx} & : t_{yz} & : t_{zz} - \mathrm{T} \end{array}\right.$$

(*) Cauchy, qui a découvert la surface (4) (que nous avons appelée *directrice*, d'après quelques auteurs), donne au second nombre $k\Delta$ le double signe et le réduit à ± 1. Il a ainsi un ellipsoïde ou deux hyperboloïdes conjugués, au moyen desquels toutes les tensions, tant positives que négatives, s'exerçant à travers les divers plans, se trouvent représentées.

Au reste, l'étude des surfaces d'élasticité donnant les tensions ou pressions n'est plus regardée comme aussi intéressante, depuis que l'on a fait l'observation, renouvelée de Mariotte, et sur laquelle Poncelet a insisté, que ce ne sont pas *ces forces* intérieures, mais LES DILATATIONS qu'elles produisent, qu'il faut limiter pour assurer la stabilité de la cohésion des solides, et écarter le danger des énervations ou des ruptures. Voyez l'édition annotée de Navier, 1864, n° XLIV de *l'historique*, page cc et pages ccij, 8, 781. Voyez aussi le commencement de la note mise à la fin du § 57 ci-après.

Il en résulte pour les grandeurs t_{xx} .... t_{xy}, certaines conditions ou relations qu'il n'est pas nécessaire de mettre ici en lumière. Mais on voit que les égalités de ces rapports réduisent les équations (6) à une seule. Par conséquent, cos p, cos q, cos r, ne sont plus complètement déterminés. En d'autres termes, les directions des tractions principales égales entre elles, ne sont plus soumises qu'à une seule condition, qui ne peut être que celle-ci : d'être perpendiculaires à la troisième traction principale, qui ne leur est pas égale. Les surfaces du second degré (4) et (5) sont alors de révolution, attendu que deux de leurs trois axes de figure deviennent égaux ; l'axe de révolution a pour direction celle de la tension principale qui n'est pas égale aux deux autres ; et les deux autres axes de figure, situés dans un plan perpendiculaire à celui-là, n'y ont aucune direction déterminée. Le problème relatif à ce cas se réduit à trouver la direction et la grandeur d'une traction principale T′, et la grandeur que nous appellerons T des deux autres $T'' = T'''$ qui sont devenues égales. Et l'on peut, sans plus de détails, le résoudre comme il suit :

Déterminons trois angles p', q', r', et un facteur m' satisfaisant aux équations suivantes.

$$(12)\quad \begin{cases} m' \cos q' \cos r' = t_{yz} \\ m' \cos r' \cos p' = t_{zx} \\ m' \cos p' \cos q' = t_{xy} \end{cases}$$

Cette détermination s'opère facilement en multipliant ensemble deux de ces équations et divisant par la troisième, ce qui donne

$$(13)\quad \begin{cases} \cos p' = \sqrt{\dfrac{t_{xy}\, t_{zx}}{m'\, t_{yz}}} \\ \cos q' = \sqrt{\dfrac{t_{yz}\, t_{xy}}{m'\, t_{zx}}} \\ \cos r' = \sqrt{\dfrac{t_{zx}\, t_{yz}}{m'\, t_{xy}}} \end{cases}$$

Et, comme la somme des carrés des cosinus doit être égale à 1,

$$m' = \frac{t_{xy}\, t_{zx}}{t_{yz}} + \frac{t_{yz}\, t_{xy}}{t_{zx}} + \frac{t_{zx}\, t_{yz}}{t_{xy}}.$$

Les signes des radicaux produisent, encore ici, plusieurs combinai-

sons; mais il ne peut y en avoir qu'une (ou deux, dont l'une ne diffère de l'autre que par le changement de tous les signes à la fois) qui satisfasse aux équations (12). Les équations (11) donnent, en tous cas,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} t_{xx} - T &= m' \cos^2 p' = \frac{t_{zx}\, t_{xy}}{t_{yz}} \\ t_{yy} - T &= m' \cos^2 q' = \frac{t_{xy}\, t_{yz}}{t_{zx}} \\ t_{zz} - T &= m' \cos^2 r' = \frac{t_{yz}\, t_{zx}}{t_{xy}} \end{aligned}\right.$$

On en déduit la valeur de T qui doit être la même, quelle que soit celle des trois équations dont on la tire. Et comme les équations (6), lorsqu'on y met pour t_{xx} — T, t_{xy}, t_{zx}....... leurs valeurs fournies par (12) et par (14) en effaçant ensuite tous les facteurs communs, se changent l'une comme l'autre en

$$\cos p' \cos p + \cos q' \cos q + \cos r' \cos r = 0 ,$$

on voit, sans chercher à en tirer rien de plus, que les valeurs de $\cos p'$, $\cos q'$, $\cos r'$, telles qu'elles viennent d'être données, fournissent la direction de la traction principale T', celle qui n'est égale à aucune des deux autres.

La double racine $T'' = T'''$ de l'équation du 3e degré (7), étant déjà donnée par la valeur T, tirée de (14), il ne reste plus à déterminer que la grandeur de T'. Que, pour cela, l'on mette, dans les équations (6), p', q', r', à la place de p, q, r, et par conséquent aussi T' à la place de T, qu'ensuite on remplace t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} par leurs valeurs en T, m', p', q', r', fournies par les équations (14) et t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} par celles que l'on tire des équations (13) multipliées deux à deux l'une par l'autre, chacune des équations (6) se change en celle-ci :

$$T - T' + m' = 0 \qquad \text{ou}$$

$$(15)\qquad T' = T + m'.$$

Les formules (13), (14), (15) fournissent la solution complète de ce problème.

Enfin, s'il y a, dans le cas que nous venons de considérer, un nombre infini de plans sur lesquels la traction s'exerce perpendiculairement, savoir, avec celui qui est perpendiculaire à T', tous ceux qui passent par T' et auxquels correspond la traction T ; on voit que dans

le cas plus particulier où toutes les tractions sont égales, les plans sur lesquels elles agissent perpendiculairement ont toutes les directions possibles. Les surfaces (4) et (5) deviennent des sphères, et l'on a $T' = T'' = T'''$. Dans ce cas, les équations (4) et (5) doivent, dans leur forme première, ou avant d'être transformées en (4 *a*) et (5 *a*), représenter des sphères. En d'autres termes, les composantes tangentielles des tractions, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}, doivent être nulles, et les composantes normales t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} doivent être égales entres elles. Cet état n'existe dans un corps élastique que lorsque toutes ses faces extérieures sont tirées ou poussées par des forces d'égale intensité sur l'unité superficielle, et dirigées normalement à ces faces.

§ 9. — L'ellipsoïde d'élasticité, et la surface directrice exprimées en COORDONNÉES DE PLANS. — Cas-limites de ces surfaces.

Le vrai caractère des surfaces (4) et (5) ne ressort d'une manière manifeste, particulièrement pour certains cas-limites que nous examinerons tout à l'heure, que lorsqu'on représente ces surfaces, non plus par des coordonnées de points, mais par des *coordonnées de plans;* c'est-à-dire lorsqu'on exprime les conditions que remplissent, les unes par rapport aux autres, les intersections de leurs plans tangents avec les axes coordonnés.

Si l'on écrit l'équation d'un plan sous cette forme :

$$(16) \qquad \mathrm{u\,x + v\,y + w\,z + 1 = 0},$$

les coefficients u, v, w des coordonnées x, y, z de ses points, peuvent être appelés les coordonnées du plan. On obtient les intersections de ce plan avec les axes, en annulant deux à deux les grandeurs x, y, z, et en calculant la troisième. Les distances de ces intersections à l'origine sont ainsi

$$-\frac{1}{\mathrm{u}}, \qquad -\frac{1}{\mathrm{v}}, \qquad -\frac{1}{\mathrm{w}},$$

ce qui donne la signification géométrique de u, v, w.

Or, comme le plan tangent à une surface $f = 0$, en un point particulier (x, y, z) est représenté par la formule suivante où x, y, z sont les coordonnées courantes de ses divers points :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{y} - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{z} - z) = 0,$$

il faut, pour que l'équation (16) représente ce plan tangent, que l'on ait, 2λ désignant un facteur indéterminé,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2\lambda\,\mathrm{u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\lambda\,\mathrm{v} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2\lambda\,\mathrm{w} \end{aligned}\right.$$

et, en outre, comme le point de contact doit se trouver sur le plan (16), on doit avoir

$$(18)\qquad \mathrm{u}\,x + \mathrm{v}\,y + \mathrm{w}\,z + 1 = 0.$$

En éliminant x, y, z et 2λ entre (17), (18), et l'équation de la surface en coordonnées ordinaires représentées par x, y, z, il reste une équation en u, v, w, qui est ce que nous appelons *l'équation de la surface en coordonnées de plans*.

Si l'on en fait l'application à la surface directrice (4)

$$(4)\qquad \Delta_{xx}\,x^2 + \Delta_{yy}\,y^2 + \Delta_{zz}\,z^2 + 2\,\Delta_{yz}\,yz + 2\,\Delta_{zx}\,zx + 2\,\Delta_{xy}\,xy = k\Delta,$$

les équations (17) donnent le système :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_{xx}\,x + \Delta_{xy}\,y + \Delta_{xz}\,z &= \lambda\,\mathrm{u} \\ \Delta_{yx}\,x + \Delta_{yy}\,y + \Delta_{yz}\,z &= \lambda\,\mathrm{v} \\ \Delta_{zx}\,x + \Delta_{zy}\,y + \Delta_{zz}\,z &= \lambda\,\mathrm{w} \end{aligned}\right.$$

Si l'on additionne ces équations (19) après les avoir multipliées respectivement par x, y, z, le premier membre donne $k\,\Delta$, à cause de l'équation (4), et le second membre donne $-\lambda$ à cause de l'équation (18); en sorte que

$$\lambda = -k\,\Delta.$$

On obtient évidemment aussi les équations (19) des équations (3) du § 6 :

$$\Delta\cos p = \mathrm{T}\,(\Delta_{xx}\cos\varpi + \Delta_{xy}\cos\varkappa + \Delta_{xz}\cos\rho)$$

. . . .

si l'on met, dans celles-ci, x, y, z à la place de $\mathrm{T}\cos\varpi$, $\mathrm{T}\cos\varkappa$,

T cos ϖ, et en même temps $-k$u, $-k$v, $-k$w, à la place de cos p, cos q, cos r. Or, comme les équations (5) entraînent les équations (2) du même § 6,

$$T\cos\varpi = t_{xx}\cos p + t_{yx}\cos q + t_{zx}\cos r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on doit, en faisant dans celles-ci les mêmes substitutions, obtenir des équations exactes. On a ainsi

$$\begin{aligned} x &= -k\,(t_{xx}\,\mathrm{u} + t_{xy}\,\mathrm{v} + t_{xz}\,\mathrm{w}),\\ y &= -k\,(t_{yx}\,\mathrm{u} + t_{yy}\,\mathrm{v} + t_{yz}\,\mathrm{w}),\\ z &= -k\,(t_{zx}\,\mathrm{u} + t_{zy}\,\mathrm{v} + t_{zz}\,\mathrm{w}); \end{aligned}$$

et si l'on multiplie respectivement ces dernières par u, v, w, en sorte que leur addition donne, d'après (18), -1 pour premier membre, on obtient enfin l'équation suivante de la surface directrice (4) en coordonnées de plans :

$$(4\,b)\qquad \frac{1}{k} = t_{xx}\,\mathrm{u}^2 + t_{yy}\,\mathrm{v}^2 + t_{zz}\,\mathrm{w}^2 + 2\,t_{yz}\,\mathrm{vw} + 2\,t_{zx}\,\mathrm{wu} + 2\,t_{xy}\,\mathrm{uv}.$$

Cette équation est tout à fait analogue à l'équation de points (4) de la même surface, mais elle est au fond beaucoup plus simple, en ce que les tractions t, y figurent à la place des binômes du second degré (2 b) donnant les Δ_{xx}.......

Si l'on applique le même procédé à l'ellipsoïde d'élasticité (5)

$$(5)\qquad (\Delta_{xx}\,x + \Delta_{xy}\,y + \Delta_{xz}\,z)^2 + (\Delta_{yx}\,x + \Delta_{yy}\,y + \Delta_{yz}\,z)^2 + \\ + (\Delta_{zx}\,x + \Delta_{zy}\,y + \Delta_{zz}\,z)^2 = \Delta^2,$$

les équations (17) donnent tout d'abord,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_{xx}\,M + \Delta_{xy}\,N + \Delta_{xz}\,P &= \lambda\,\mathrm{u}\\ \Delta_{yx}\,M + \Delta_{yy}\,N + \Delta_{yz}\,P &= \lambda\,\mathrm{v}\\ \Delta_{zx}\,M + \Delta_{zy}\,N + \Delta_{zz}\,P &= \lambda\,\mathrm{w} \end{aligned}\right.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} M &= \Delta_{xx}\,x + \Delta_{xy}\,y + \Delta_{xz}\,z,\\ N &= \Delta_{yx}\,x + \Delta_{yy}\,y + \Delta_{yz}\,z,\\ P &= \Delta_{zx}\,x + \Delta_{zy}\,y + \Delta_{zz}\,z, \end{aligned}$$

de manière que l'équation (5) de la surface puisse être écrite

$$(21) \qquad M^2 + N^2 + P^2 = \Delta^2.$$

Si l'on additionne les équations (20) après les avoir multipliées respectivement par x, y, z, on obtient, eu égard à (21) et à (18),

$$\Delta^2 = -\lambda,$$

et, en comparant les équations (20) avec celles du système (3), puis revenant de celles-ci à celles du système (2), ce qui conduit à mettre dans ces dernières M, N, P, au lieu de $T\cos\varpi$, $T\cos\chi$, $T\cos\rho$, et $-\Delta u$, $-\Delta v$, $-\Delta w$ au lieu de $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$, on trouve pour ce système (2), de la résolution duquel le système (20) peut être considéré comme déduit,

$$\begin{aligned} M &= -\Delta\,(t_{xx}\,u + t_{xy}\,v + t_{xz}\,w)\,, \\ N &= -\Delta\,(t_{yx}\,u + t_{yy}\,v + t_{yz}\,w)\,, \\ P &= -\Delta\,(t_{zx}\,u + t_{zy}\,v + t_{zz}\,w)\,. \end{aligned}$$

Et si l'on substitue enfin ces valeurs de M, N, P dans l'équation (21), on obtient sous la forme simple qui suit, l'équation de l'ellipsoïde d'élasticité, en coordonnées de plans :

$$(5\,b) \quad 1 = (t_{xx}\,u + t_{xy}\,v + t_{xz}\,w)^2 + (t_{yx}\,u + t_{yy}\,v + t_{yz}\,w)^2 + (t_{zx}\,u + t_{zy}\,v + t_{zz}\,w)^2.$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, pour obtenir les équations des deux surfaces rapportées à leurs axes principaux, il suffit d'annuler les trois composantes t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}, et de remplacer t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} par T′, T″, T‴. Si donc on désigne par U, V, W, les coordonnées de plans dans le système des axes principaux, les équations des surfaces (4) et (5), ou (4 *a*) et (5 *a*) rapportées à ces axes, et exprimées au moyen de ces coordonnées, sont

$$(4\,c) \qquad T'\,U^2 + T''\,V^2 + T'''\,W^2 = \frac{1}{k},$$

$$(5\,c) \qquad T'^2\,U^2 + T''^2\,V^2 + T'''^2\,W^2 = 1\,.$$

Ces formes sont très importantes pour faciliter les recherches relatives aux cas-limites, dans lesquels une ou plusieurs racines de l'équation du troisième degré en T disparaissent.

Ainsi lorsque $T''' = 0$, les équations (4 c) et (5 c) se réduisent à

$$(4d) \qquad T'U^2 + T''V^2 = \frac{1}{k};$$

$$(5d) \qquad T'^2U^2 + T''^2V^2 = 1.$$

Cherchons ce que signifient ces dernières équations. Elles sont indépendantes de W, c'est-à-dire que si l'une des surfaces (4*d*) et (5*d*) est touchée par un plan déterminé, elle l'est aussi par tous les plans qui rencontrent, aux mêmes points que celui-ci, l'axe des X et l'axe des Y. Tous ces plans se coupent suivant une droite tracée dans le plan des XY; les surfaces (4*d*) et (5*d*) sont, par conséquent, définies par de simples courbes, tracées dans ce même plan. Ces courbes sont évidemment les mêmes que celles suivant lesquelles les surfaces (4*c*) et (5*c*) sont touchées par les plans pour lesquels $W = 0$; car en faisant $W = 0$, les équations (4*c*) et (5*c*) se changent en (4*d*) et (5*d*).

Or ces plans, qui rencontrent l'axe des Z à l'infini constituent ensemble les cylindres tangents (*) aux deux surfaces, et dont les arêtes sont parallèles à cet axe; et la courbe de contact de chacun de ces cylindres est la coupe de chacune des surfaces (4*c*), (5*c*) par le plan XY. L'équation (5*d*) représente donc l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par le plan XY, savoir, une *ellipse* dont les demi-axes sont T' et T''; l'équation (4*d*), au contraire, représente une *ellipse* ou une *hyperbole*, selon que T' et T'' ont le même signe ou des signes opposés.

Si donc une des trois tensions principales est égale à zéro, les directions des tensions s'exerçant sur tous les plans possibles menés par un même point se trouvent dans un seul et même plan; et, de plus, sur tous les plans qui passent par une même droite tracée dans celui-ci, la traction ou tension par unité superficielle est la même en grandeur et en direction. Si, dans ce même plan, on fait tourner autour d'un point la droite dont nous parlons, l'extrémité de la ligne qui représente la grandeur et la direction de la tension correspondante décrit une ellipse. C'est ce qui a lieu, par exemple, si le parallélépipède solide considéré est sollicité, seulement sur deux paires de faces, par des actions normales aux quatre faces qui forment ces paires, et n'est ni pressé, ni tiré sur les faces de la troisième paire.

Si, enfin, deux racines de l'équation du 3e degré (7) sont égales à

(*) L'auteur emploie l'expression *Berührungskegel*, cône tangent; mais comme il parle d'un cône dont le sommet est à l'infini, on a traduit par cylindre.

zéro, en sorte que T″ disparaisse en même temps que T‴, les équations des deux surfaces deviennent

$$(4e) \qquad T' U^2 = \frac{1}{k}$$

$$(5e) \qquad T'^2 U^2 = 1.$$

Chacune de ces équations représente *deux points isolés* qui se trouvent sur l'axe principal X, de chaque côté de l'origine, aux distances

$\pm \sqrt{kT'}$, pour la première,
et $\pm T'$ pour la seconde.

En effet, tous les plans qui satisfont à l'équation (4e) rencontrent l'axe des X en un point situé à une distance $\sqrt{kT'}$ de l'origine ou à une distance $-\sqrt{kT'}$; mais ils ne sont soumis à aucune autre condition. De même, tous les plans relatifs à l'équation (5e) doivent rencontrer l'axe des X en des points situés à des distances $\pm T'$ de l'origine, sans être soumis à aucune autre condition. Alors donc la traction ou tensions pour tous les plans sur lesquels elle agit, a la même grandeur et la même direction. C'est ce qui arrive lorsque, par exemple, deux faces opposées du parallélépipède sont soumises à des forces qui les sollicitent normalement, les autres faces n'étant soumises à aucune action.

§ 10. — Directions conjuguées des tensions agissant sur trois faces orthogonales quelconques.

Je vais terminer ces considérations géométriques sur l'ellipsoïde d'élasticité, en établissant un théorème qui manifeste l'existence des directions des tensions principales, comme un cas particulier d'une proposition plus générale.

Revenons aux équations (3) du § 6, $\Delta \cos p = T (\Delta \cos \varpi + \ldots)$ que nous avons obtenues en résolvant les trois équations du premier degré (2) $T \cos \varpi = t_{xx} \cos p + \ldots$ et qui donnent les angles p, q, r, formés avec les axes coordonnés par la normale au plan sur lequel agit une traction T supposée faire les angles ϖ, $\varkappa$, ρ avec les mêmes axes. Les directions des tractions ou tensions qui agissent sur les faces mêmes de l'élément parallélépipède ayant ses côtés parallèles aux x, y, z, ou les valeurs des angles ϖ, $\varkappa$, ρ qu'elles forment avec ces mêmes axes peuvent être obtenues des équations (3), même §, en fai-

sant deux à deux égales à zéro les quantités $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$. Ainsi, les directions, ou les angles ϖ, $\varkappa$, ρ, satisfont toujours à deux des équations

$$\Delta_{xx} \cos\varpi + \Delta_{xy} \cos\varkappa + \Delta_{xz} \cos\rho = 0,$$
$$\Delta_{yx} \cos\varpi + \Delta_{yy} \cos\varkappa + \Delta_{yz} \cos\rho = 0,$$
$$\Delta_{zx} \cos\varpi + \Delta_{zy} \cos\varkappa + \Delta_{zz} \cos\rho = 0.$$

Mais les cosinus de ϖ, $\varkappa$, ρ ont entre eux les mêmes rapports que les coordonnées x, y, z du point de la surface directrice dont le rayon vecteur donne la direction de la tension déterminée par ces angles ϖ, $\varkappa$, ρ. Ces directions des tensions sont celles des intersections deux à deux des trois plans

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta_{xx} X + \Delta_{xy} Y + \Delta_{xz} Z = 0, \\ \Delta_{yx} X + \Delta_{yy} Y + \Delta_{yz} Z = 0, \\ \Delta_{zx} X + \Delta_{zy} Y + \Delta_{zz} Z = 0. \end{array}\right.$$

Si maintenant, par les extrémités des trois rayons vecteurs dirigés suivant ces intersections, nous menons des plans tangents à la surface directrice, et si nous avons égard à ce que deux des trois expressions suivantes s'annulent constamment ensemble :

$$\Delta_{xx} x + \Delta_{xy} y + \Delta_{xz} z,$$
$$\Delta_{yx} x + \Delta_{yy} y + \Delta_{yz} z,$$
$$\Delta_{zx} x + \Delta_{zy} y + \Delta_{zz} z,$$

nous obtenons, en effaçant les facteurs communs à tous les termes, les équations qui suivent, pour celles de ces plans tangents :

$$\Delta_{xx} (X - x) + \Delta_{xy} (Y - y) + \Delta_{xz} (Z - z) = 0,$$
$$\Delta_{yx} (X - x) + \Delta_{yy} (Y - y) + \Delta_{yz} (Z - z) = 0,$$
$$\Delta_{zx} (X - x) + \Delta_{zy} (Y - y) + \Delta_{zz} (Z - z) = 0.$$

Comme dans ces équations les coefficients de X, Y, Z sont exactement les mêmes que dans les équations (22), nous voyons que les plans tangents à la surface directrice, à chacune des extrémités des trois rayons vecteurs, sont parallèles aux plans déterminés par les deux autres rayons, ou en d'autres termes, que ces rayons sont trois demi-diamètres conjugués de la surface directrice.

Mais, ainsi qu'on l'a déjà observé, on peut se figurer le parallélépipède limité par trois autres paires quelconques de faces orthogonales.

Sur ces nouvelles faces, les tractions seront encore, d'après les mêmes considérations, trois demi-diamètres conjugués de la surface directrice. D'où ce théorème :

Les directions des tensions supportées par trois plans quelconques perpendiculaires l'un à l'autre sont celles de trois diamètres conjugués de la surface directrice de ces tensions intérieures.

§ 11. — Corps cristallins, ou, plus généralement, corps HÉTÉROTROPES. Expressions les plus générales de leurs tensions intérieures en fonction des six déformations élémentaires en chaque endroit.

Cherchons quelles modifications il faut faire subir à ce qui a été dit aux §§ 2 et 3 et au commencement du § 4, lorsque le parallélépipède solide dont on s'occupe cesse de posséder la même structure dans toutes les directions, c'est-à-dire s'il passe à cet état que l'on désigne sous le nom de *cristallin* (*).

La manière la plus simple de caractériser cet état d'un corps consiste à dire qu'il s'y trouve certaines directions dans lesquelles les couches parallèles se déplacent les unes devant les autres avec une facilité plus grande que dans d'autres, et certaines directions, aussi, pour lesquelles le corps offre à l'extension et à la compression moins de résistance que pour d'autres. Mais ce n'est pas seulement dans les matières réellement cristallisées que se rencontrent les inégalités dont nous parlons ; on les trouve aussi, et même plus souvent, dans des substances non cristallisées et qui ont été longtemps exposées à certaines influences agissant constamment dans le même sens (**).

Imaginons donc, dans un bloc d'une pareille matière, un parallélépipède dont les faces sont sollicitées par des forces de grandeur et de direction quelconques, mais également réparties sur chaque face, et possédant, sur les faces parallèles et opposées, des grandeurs égales et des directions contraires.

Le cas le plus simple serait celui où les systèmes de couches dont

---

(*) Nous avons déjà dit que cette expression est impropre. Celle de *non isotrope* ou d'*hétérotrope* est préférable. L'auteur va reconnaître lui-même, à l'alinéa suivant, que des corps dont la structure n'est point cristalline peuvent offrir en divers sens des élasticités inégales. On ne met en jeu, dans l'industrie, l'élasticité d'aucun *cristal*, mais on se sert constamment de solides hétérotropes *amorphes*, ou n'affectant aucune forme cristalline.

(**) Telles sont les influences du laminage, du forgeage, de l'écrouissage, etc., et aussi de la formation par fibres ou par couches, comme celle des bois. L'observation de l'auteur confirme bien ce que nous venons de dire, de la nécessité de ne plus appeler *cristallins* tous les corps *hétérotropes*.

nous venons de parler seraient au nombre de trois, orthogonaux entre eux, et parallèles aux faces du parallélépipède. Alors, les tractions normales ne produiraient que des déplacements normaux, et le corps non isotrope se comporterait comme un corps isotrope, à la seule exception que dans les trois directions des tractions les trois modules d'élasticité d'extension E, et aussi les coefficients η de proportion des contractions latérales correspondantes (§ 2), alors au nombre de six, auraient des valeurs différentes (Voir la note de la fin du § 16).

Mais généralement, des tractions même normales aux faces produiront, outre les dilatations, des glissements relatifs de couches parallèles, ou des déplacements tangentiels. Les angles formés par les trois côtés du parallélépipède changeront en même temps que leurs longueurs, sous l'influence de tout système de tractions, normales ou obliques.

Désignons comme ci-dessus les longueurs des côtés;

Primitivement, par

$$a, \qquad b, \qquad c;$$

Après les déplacements, par

$$a(1+\partial_x), \qquad b(1+\partial_y), \qquad c(1+\partial_z),$$

et les trois angles plans du parallélépipède déformé par

$$\frac{\pi}{2}-g_{yz}, \qquad \frac{\pi}{2}-g_{zx}, \qquad \frac{\pi}{2}-g_{xy}.$$

Les six quantités ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} dépendent à la fois des six composantes

$$t_{xx}, \quad t_{yy}, \quad t_{zz}, \quad t_{yz}, \quad t_{zx}, \quad t_{xy}$$

des forces intérieures; d'où il suit que, réciproquement, celles-ci peuvent être considérées comme fonctions de celles-là. Les expressions de ces fonctions ne devront pas contenir de termes constants ou indépendants des grandeurs des déformations, attendu que celles-ci doivent être nulles en même temps que les forces agissant sur les faces de l'élément. Pour déterminer, du reste, la forme de ces mêmes fonctions, nous pouvons nous servir de cette circonstance que les six grandeurs ∂_i et g_{ij} sont très petites : si l'on se représente les développements des six composantes suivant leurs puissances, il suffira d'en conserver les termes du pre-

mier degré; les forces t_i s'expriment donc *linéairement* en ∂_i et g_{ij}, ce qui donne un système d'équations de la forme suivante :

$$
(25)\quad\left\{
\begin{aligned}
t_{xx} &= a_{xx\cdot xx}\,\partial_x + a_{xx\cdot yy}\,\partial_y + a_{xx\cdot zz}\,\partial_z + a_{xx\cdot yz}\,g_{yz} + a_{xx\cdot zx}\,g_{zx} + a_{xx\cdot xy}\,g_{xy}.\\
t_{yy} &= a_{yy\cdot xx}\,\partial_x + a_{yy\cdot yy}\,\partial_y + a_{yy\cdot zz}\,\partial_z + a_{yy\cdot yz}\,g_{yz} + a_{yy\cdot zx}\,g_{zx} + a_{yy\cdot xy}\,g_{xy}.\\
t_{zz} &= a_{zz\cdot xx}\,\partial_x + a_{zz\cdot yy}\,\partial_y + a_{zz\cdot zz}\,\partial_z + a_{zz\cdot yz}\,g_{yz} + a_{zz\cdot zx}\,g_{zx} + a_{zz\cdot xy}\,g_{xy}.\\
t_{yz} &= a_{yz\cdot xx}\,\partial_x + a_{yz\cdot yy}\,\partial_y + a_{yz\cdot zz}\,\partial_z + a_{yz\cdot yz}\,g_{yz} + a_{yz\cdot zx}\,g_{zx} + a_{yz\cdot xy}\,g_{xy}.\\
t_{zx} &= a_{zx\cdot xx}\,\partial_x + a_{zx\cdot yy}\,\partial_y + a_{zx\cdot zz}\,\partial_z + a_{zx\cdot yz}\,g_{yz} + a_{zx\cdot zx}\,g_{zx} + a_{zx\cdot xy}\,g_{xy}.\\
t_{xy} &= a_{xy\cdot xx}\,\partial_x + a_{xy\cdot yy}\,\partial_y + a_{xy\cdot zz}\,\partial_z + a_{xy\cdot yz}\,g_{yz} + a_{xy\cdot zx}\,g_{zx} + a_{xy\cdot xy}\,g_{xy}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules, les notations sont telles que les deux premiers indices des coefficients a se rapportent à la traction t à laquelle ils appartiennent. Quant aux deux derniers, ils se rapportent à la déformation partielle ∂, g, que ce coefficient affecte ; en sorte que, comme les indices x, y, z sont ceux de directions parallèles respectivement aux côtés a, b, c du parallélépipède, xx, comme ensemble des deux derniers indices d'un coefficient, répond au changement ∂_x qu'a subi le côté a ; yz au glissement g_{yz}, ou petit rétrécissement qu'a subi l'angle primitivement droit des deux côtés b, c, et ainsi des autres.

Les trente-six constantes a dépendent seulement de la nature de la substance du corps ; quelques-unes sont égales entre elles, ce dont il sera question au § 16 (*).

(*) On y verra, en effet, que $a_{xx.yy} = a_{yy.xx}$, $a_{xx.yz} = a_{yz.xx}$, $a_{yz.zx} = a_{zx.yz}$,..... c'est-à-dire qu'on peut permuter les deux premiers indices avec les deux derniers, *à la fois*, sans que le coefficient change; ce qui réduit les 36 coefficients à 21 inégaux ; et dans une note de la fin du même § 16, nous motiverons notre opinion de la possibilité de permuter même une seule des deux dernières lettres avec une des deux premières, ce qui réduirait le nombre des coefficients à 15.

Noms que M. Rankine donne à ces divers coefficients.

Il appelle (*On Axes of Elasticity and crystallin Forms*, lu le 21 juin 1855 à la Société Royale) :

Élasticités directes, les coefficients $a_{xx.xx}$, $a_{yy.yy}$, $a_{zz.zz}$, mesurant le rapport entre une tension uniforme et normale, telle que t_x, à la dilatation ∂_x *supposée exister seule*, ou sans qu'il y ait de dilatation ∂_y, ∂_z, ni de glissements g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} dans la même direction, ni dans des directions perpendiculaires;

Élasticités tangentielles, ou *de rigidité*, les coefficients $a_{yz.yz}$, $a_{zx.zx}$, $a_{xy.xy}$, rapports d'une tension tangentielle telle que t_{yz} au glissement de même indice g_{yz}, supposé produit seul;

Élasticités latérales, les coefficients $a_{yy.zz}$, $a_{zz.xx}$, $a_{xx.yy}$, dont le premier est le rapport d'une tension normale t_{yy} à une dilatation ∂_z existant seule dans une direction perpendiculaire ;

Élasticités asymétriques, les autres coefficients tels que $a_{xx.xy}$, $a_{zx.xy}$, $a_{zz.xy}$ où une lettre x, y, z ne se trouve qu'une fois.

Nous emploierons quelquefois ces dénominations commodes.

Il ne faut pas confondre une *élasticité directe* $a_{xx.xx}$ avec le coefficient ou module d'élas-

Les équations (23) doivent donc, pour les corps non isotropes, être substituées aux équations qu'on tirerait de celles (1c) du § 4, qui sont relatives aux corps isotropes. Mais les considérations qui ont été présentées à partir de là, dans ce même § 4 et dans les six suivants 5, 6, 7, 8, 9, 10, celles, par exemple, qui sont relatives à l'ellipsoïde d'élasticité et à l'autre surface du second degré donnant les directions conjuguées des tensions et des faces, restent applicables, sans changement, au cas plus général actuel ; car il n'a été fait, en présentant ces considérations, aucun usage des expressions des tensions en fonction des déplacements (*).

---

ticité § 2, $E_x = \frac{t_{xx}}{\partial_x}$, rapport entre une tension et une dilatation qui se trouve accompagnée de contractions dans les deux autres sens, vu qu'on suppose $t_{yy} = 0$, $t_{zz} = 0$.

(*) 1. *La preuve de la forme linéaire des expressions* (23) *des composantes de tensions ne peut pas être purement mathématique.* — Clebsch déduit la *linéarité* des formules (23) en ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, d'une sorte de nécessité mathématique, résultant de ce que ces six déformations élémentaires sont très petites, en sorte qu'on peut ne conserver que les termes affectés de leurs premières puissances, en négligeant les autres dans le développement des composantes de tension, t_{xx} .... t_{xy} qui en sont fonctions.

Nous avons déjà dit (§§ 2 et 3, à l'occasion des formules, aussi linéaires, $p = E\partial$, $p = Gg$) ce que cette preuve, trop souvent alléguée, a de défectueux.

Tout développement d'une fonction, fût-il bien prouvé qu'il peut se faire suivant les puissances ascendantes de sa variable ou de ses variables, ne commence pas par la puissance 1. Toute fonction d'une ou plusieurs variables supposées rester très petites n'est donc pas forcément linéaire ou du premier degré. Par exemple, l'excès $e = h - 1$ de l'hypoténuse h d'un triangle rectangle sur son plus grand côté, supposé égal à 1, est bien fonction du plus petit côté k ; cependant, lorsque celui-ci devient extrêmement petit, $h - 1$ n'est pas fonction linéaire de k : car on a alors $h = \sqrt{1 + k^2} = 1 + \frac{k^2}{2}$, d'où il résulte que l'excès $h - 1 = e$ est proportionnel au carré du côté k et non à sa première puissance. Réciproquement, le petit côté k est fonction de l'excès $e = h - 1$ de l'hypoténuse sur l'autre côté ; or, quand cet excès devient extrêmement petit, on a $k = (2e)^{\frac{1}{2}}$ et non pas k linéaire en e.

On pourrait en rapporter bien d'autres exemples (voir l'appendice V de mon édition annotée, 1864, des *Leçons* de Navier, § 55, page 665). On sait, d'ailleurs, que les séries de Taylor et de Mac-Laurin sont souvent, comme on dit, *en défaut*.

Généralement et philosophiquement aucune considération purement *mathématique* ne saurait révéler le mode de la dépendance mutuelle des forces agissant sur les éléments des corps, et des changements géométriques qui s'y opèrent, tels que ceux des longueurs et des angles de leurs

côtés : la connaissance de ce mode ne peut être dérivée que des faits, ou de quelque loi *physique* exprimant un ensemble de faits constatés.

2. *On peut le conclure (ce mode de dépendance) d'expériences faites depuis Hooke jusqu'à nos jours.* — Déjà l'auteur invoque avec raison le *fait* expérimental et si patent de cette dépendance entre les forces et les changements. Or l'expérience a aussi appris quelque chose de son mode ou de sa loi. On connaît depuis deux siècles le fameux principe de Hooke (ou de Mariotte) *ut tensio sic vis*, dans l'énoncé duquel *tensio* doit être traduit *extension*, ou *contraction*, ou *flexion*, etc., car il exprime généralement la constante proportionnalité que ce physicien du dix-septième siècle a constatée entre les forces appliquées à divers ressorts et les amplitudes des déformations qu'elles leur font prendre. Toutes les expériences faites depuis celles de Hooke et de Mariotte par Coulomb, Gerstner, Duleau, Charles Dupin, Savart, Ardant, Wertheim, etc., sur la flexion et la torsion des fils ou des pièces solides, enfin par M. Hodgkinson, par M. Tresca sur l'allongement et la contraction de longues barres, ont confirmé cette proportionnalité ainsi que la loi d'égalité des contractions aux extensions produites par les mêmes efforts longitudinaux, tant qu'ils ne vont pas jusqu'à produire des effets permanents. Et M. Stokes cite avec raison, comme une preuve dynamique très péremptoire de cette même loi de proportionnalité, le fait du tautochronisme des petites vibrations des corps élastiques sonores, ou l'unité de ton musical qu'on en obtient en y excitant des oscillations d'amplitudes très différentes, mais toujours petites. (*On the internal friction of Fluids and equilibrium of elastic bodies*, mémoire lu le 14 avril 1845 et imprimé au volume VIII, 1847, des *Transactions* de Cambridge.)

Or, sans anticiper sur les calculs des §§ suivants, nous pouvons dire ici que toute flexion résulte de dilatations et de contractions, toute torsion de glissements transversaux, comme ceux dont il a été question au § 5; que l'allongement même des ressorts en hélice sur lesquels Hooke a fait ses principales expériences est l'effet combiné de la torsion et de la flexion de leurs fils, etc. La forme linéaire attribuée aux six équations (25), et qui donne bien, pour chaque température supposée rester constante, la proportionnalité des efforts aux effets de chaque espèce et de chaque sens, se trouve donc justifiée comme conforme à tous les faits observés.

3. *Cette linéarité peut être déduite aussi de la loi qui lie d'une manière continue les actions entre les molécules à toutes leurs distances mutuelles et de la considération de ce qu'il s'agit ici d'exprimer : ce sont en réalité des différences d'actions en fonction de différences de distances.* — Ce n'est point d'une manière empirique, ou en tant que résumant une suite de faits, qu'ont été trouvées de 1821 à 1829 les formules de cette mécanique des forces moléculaires qu'on appelle aujourd'hui la théorie de l'élasticité. On sait que les lois mêmes des mouvements planétaires n'ont été si bien découvertes et si patiemment constatées par Keppler que sous l'inspiration d'idées théoriques vaguement conçues, et que Newton, plus tard, a su dégager et déterminer. En général, pour convaincre nos esprits, l'empirisme, qui ne rend

compte de rien, ne suffit pas : il nous faut encore une explication, une raison scientifique, ou la preuve que les formules qu'on nous propose dépendent de quelque loi assez générale, assez *grandiose*, c'est-à-dire simple, pour que nous puissions, en raisonnant, comme faisait Leibnitz, quand ce ne serait que d'une manière instinctive, la regarder comme pouvant être celle à laquelle le souverain Législateur a soumis les phénomènes intimes dont les formules en question représentent et mesurent les manifestations extérieures.

On a accepté et invoqué comme telle, jusqu'à l'époque où nous sommes, la grande loi des actions réciproques, attractives et répulsives, regardées comme s'exerçant universellement, de près comme de loin, entre toutes les molécules du monde, envisagées deux à deux.

L'intensité de chacune de ces actions réciproques a été regardée, depuis Newton jusqu'à Clairaut, Laplace, Gauss, Ampère, Navier, Cauchy, Poisson, Coriolis, Poncelet, Neumann, Clausius, etc., inclusivement, comme fonction *de la seule distance* mutuelle des deux molécules qui l'exercent l'une sur l'autre, et les premières formules de l'élasticité ont été établies en conséquence.

Mais Green, en 1837-1839, et, d'après lui, divers savants de l'Angleterre et de l'Allemagne ont cru pouvoir lui en substituer une autre plus générale, ou qualifiée de plus générale parce qu'elle est *moins déterminée*, dont nous donnerons l'énoncé ci-après, aux nos 1, 2, 4, 9 d'une note de la fin du § 16 ; loi dont la conséquence analytique immédiate est la possibilité que l'intensité de l'action entre deux molécules dépende non seulement de leur distance mutuelle propre, mais encore de leurs distances aux autres molécules, et même des distances de celles-ci entre elles ; en un mot, de tout l'ensemble actuel de leurs situations relatives ou de l'état présent complet du système dont font partie les deux molécules dont on s'occupe, dût-on l'étendre à l'univers entier.

Quelque singulière que paraisse une loi étendue à ce point, elle nous suffit, sans que nous ayons aucunement besoin de la discuter ni de la restreindre ici à l'énoncé antérieur, pour justifier, *théoriquement*, comme nous nous le sommes proposé, la forme générale des expressions linéaires (25) des composantes des pressions en fonction des petites déformations des éléments des corps.

En effet (et c'est là une distinction essentielle), si une quantité, fonction d'une ou de plusieurs autres, n'en est pas, comme on vient de le remarquer, nécessairement une fonction linéaire ou du premier degré quand celles-ci deviennent très petites, il en est autrement s'il s'agit *de la différence de deux valeurs* de la première quantité, comparée *aux différences correspondantes* de valeurs de l'autre ou des autres dont elle dépend. Si cette dépendance a lieu d'une manière *continue*, la première différence varie proportionnellement à chacune des autres différences supposées très petites, et elle est, par conséquent, une fonction linéaire de toutes ces petites *différences* des valeurs des variables. C'est là une conséquence de la continuité, et comme sa définition.

§ 12. — Équations générales de l'équilibre d'un corps sollicité par des forces extérieures quelconques, exprimées, pour chaque point, en fonction de ces forces et des six composantes des tensions. — Équations à l'intérieur. — Équations limites, ou à la surface.

Nous appliquerons les considérations générales présentées jusqu'ici à la recherche de l'état d'équilibre d'un corps élastique soumis à des forces absolument quelconques : les unes, agissant sur la surface, les autres, comme la pesanteur, sur ses points intérieurs ; celles-ci, comme celles-là, pouvant varier en grandeur et en direction d'un point

---

Or, tel est précisément le cas des t_{xx}..... t_{xy}, vis-à-vis de ∂_x, ∂_y..... g_{xy}. Les composantes des tensions sont des sommes de composantes de forces moléculaires s'exerçant à travers de petites faces. Ces forces, ici, sont engendrées par les déplacements relatifs que les points du corps élastique ont éprouvés : ce sont donc des *différences* entre les intensités *primitives* des composantes d'actions, qui généralement se faisaient équilibre ou avaient des sommes nulles, et leurs intensités *nouvelles*, répondant aux distances moléculaires que les déplacements ont augmentées ou diminuées. Ces différences de forces sont, d'après ce qu'on vient de dire, fonctions linéaires des très petites *différences* de toutes les distances dont les forces dépendent.

Il est facile de voir qu'en un endroit quelconque, l'augmentation éprouvée par toute distance de deux molécules très proches dépend, linéairement aussi, des petits changements proportionnels de longueur ∂_x, ∂_y, ∂_z, et des petits changements d'angles g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} de trois petites droites rectangulaires tirées au même endroit ; car, si l'une de ces deux molécules est rendue immobile, le cheminement de l'autre, estimé suivant leur ligne de jonction, sera la somme des projections sur cette ligne des six cheminements que la même deuxième molécule prendrait en vertu des six petites déformations ∂_x..... g_{xy}.

On voit que le fait physique général et incontesté de la dépendance continue où les actions entre les molécules sont à chaque instant de l'état du système dont elles font partie, c'est-à-dire de ses diverses distances moléculaires actuelles, sans autre spécification ou détermination de cette dépendance, entraîne et explique la forme linéaire des expressions des t_{xx}..... t_{xy} en ∂_x..... g_{xy}, ou donne la raison à la fois *physique* et *mathématique* de la composition générale des formules (25) ; ce qu'un raisonnement seulement mathématique était impuissant à faire, comme nous avons dit.

A la note, citée ici par anticipation, de la fin du § 16, on dira quelles réductions il faut faire dans le nombre des coefficients $a_{xx.xx}$..... $a_{xy.xy}$ de ces formules, distincts ou inégaux.

du corps à l'autre. Mais on se souviendra que les forces agissant sur une très petite portion de la surface sont de l'ordre de grandeur de cette portion, tout comme les forces agissant sur un élément de volume sont de l'ordre de grandeur de cet élément. On peut donc, si $d\sigma$ est un élément de la surface, exprimer la force qui y agit par le produit de $d\sigma$ et d'un nombre fini qui représente la force extérieure s'exerçant sur l'unité de cet élément superficiel; et, de même, si dV est un élément du volume, on peut exprimer la force agissant sur cet élément par le produit de dV et d'un nombre fini, qui représente la force sollicitant l'unité de volume du corps, en cet endroit.

Imaginons maintenant, dans l'intérieur du corps, un élément parallélépipède infiniment petit, qui avait originairement une forme rectangle et ses côtés parallèles aux trois coordonnées d'un système orthogonal. Sollicité par les forces extérieures ou non réciproques (*) qui agissent sur les points intérieurs, il l'est aussi par les tractions qui agissent sur ses six faces, et qui résultent des forces moléculaires développées par les déplacements relatifs des divers points. Ces tractions, rapportées à l'unité superficielle, sont des grandeurs finies; elles sont donc, pour les faces de l'élément, de l'ordre de grandeur de ces faces, c'est-à-dire infiniment petites. D'autre part, les forces, agissant à l'intérieur de l'élément, et n'ayant des grandeurs finies que pour l'unité de son volume auquel elles sont proportionnelles, se trouvent être, comme ce volume, du troisième ordre de petitesse (**). Les tractions sur les faces doivent donc se faire mutuellement équilibre, à cela près de quantités infiniment plus petites qu'elles, et par conséquent, celles qui agissent sur des faces opposées doivent être, à la même approximation, égales, parallèles et opposées, en sorte que leurs différences sont, pour l'ordre de grandeur, comparables aux forces agissant à l'intérieur de l'élément. Par là se trouve établie la continuité de l'état intérieur du corps, en tant que les tensions ne changent, d'un point à un point voisin, que d'une grandeur de même ordre que la petite distance de ces deux points.

En général, les tensions ne sont point dirigées normalement aux faces du petit parallélépipède. Désignons, comme nous avons fait ci-

---

(*) Nous disons *non réciproques* (dans le système), car on n'y comprend pas celles qui s'exercent deux à deux en sens opposés entre les molécules d'un même élément, ni même celles qui émanent des éléments contigus et qui composent les tractions à travers ses faces ; et on y comprend, avec la pesanteur qui est leur type, les *inerties* de la matière en cas de mouvement.

(**) A cet égard, les *inerties*, produits de masses et d'accélérations sont dans le même cas.

dessus, leurs neuf composantes parallèlement aux axes coordonnés. Si dx, dy, dz sont les côtés du parallélépipède, nous aurons sur les faces les plus voisines de l'origine les composantes :

	Suivant l'axe des x.	Suivant l'axe des y.	Suivant l'axe des z.
Sur la surface $dydz$.....	$t_{xx}\, dydz$,	$t_{xy}\, dydz$,	$t_{xz}\, dydz$.
Sur la surface $dzdx$....	$t_{yx}\, dzdx$,	$t_{yy}\, dzdx$,	$t_{yz}\, dzdx$.
Sur la surface $dxdy$....	$t_{zx}\, dxdy$,	$t_{zy}\, dxdy$,	$t_{zz}\, dxdy$.

Mais les tensions t d'intensités différentes aux divers points du corps sont, d'après ce qui précède, des fonctions de x, y, z. Pour passer d'une face à la face opposée on n'a, d'après cela, qu'à y faire croître x de dx, y de dy, z de dz, ce qui change chaque force t en $t + \frac{\partial t}{\partial x} dx$, $t + \frac{\partial t}{\partial y} dy$, $t + \frac{\partial t}{\partial z} dz$, respectivement. Par conséquent, on a, sur les trois faces les plus éloignées de l'origine les composantes suivantes :

	Suivant l'axe des x.	Suivant l'axe des y.	Suivant l'axe des z.
Sur $dydz$.	$\left(t_{xx} + \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} dx\right) dydz$,	$\left(t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} dx\right) dydz$,	$\left(t_{xz} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz$.
Sur $dzdx$.	$\left(t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx$,	$\left(t_{yy} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} dy\right) dzdx$,	$\left(t_{yz} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} dy\right) dzdx$.
Sur $dxdy$.	$\left(t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy$,	$\left(t_{zy} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} dz\right) dxdy$,	$\left(t_{zz} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} dz\right) dxdy$.

Considérons les t comme des tractions ou des tensions proprement dites lorsqu'elles sont positives, et les forces dont on vient d'écrire les grandeurs comme agissant dans les directions des coordonnées positives. Celles dont les grandeurs ont été écrites en premier lieu agissent dans des directions opposées. Nous devons encore, dans les sens des mêmes coordonnées x, y, z, compter les composantes des forces extérieures ou d'inertie agissant sur la masse du petit parallélépipède. Ce seront, si X, Y, Z désignent leurs intensités pour l'unité de volume,

$$X\, dxdydz, \qquad Y\, dxdydz, \qquad Z\, dxdydz.$$

Les conditions d'équilibre du parallélépipède élémentaire qui, si elles sont partout satisfaites, entraînent l'équilibre intérieur de tout le corps, sont la nullité des sommes des composantes suivant chacun des trois

axes, et la nullité des sommes des moments de rotation autour des mêmes axes.

Égalons d'abord à zéro les sommes de composantes, et observons que les composantes écrites en premier lieu doivent être prises avec le signe négatif puisqu'elles agissent dans des sens opposés aux demi-axes positifs. Les grandeurs de second ordre se détruisent, et en divisant ce qui reste par $dxdydz$, on a les équations

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + X = 0, \\ &\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ &\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned} \right.$$ (*)

Dans le calcul des moments de rotation, il reste, au contraire, des sommes de quantités de second ordre. On peut donc supprimer les termes du troisième. On n'aura ainsi à tenir compte, ni des forces extérieures s'exerçant à l'intérieur de l'élément, ni des composantes de tractions directement opposées agissant sur les faces parallèles deux à deux. Or on a déjà dit, au § 4, que si les forces agissant sur ces faces opposées sont égales et opposées mais contraires non directement, il suffit, pour l'équilibre de rotation, que l'on ait

$$t_{yz} = t_{zy}; \qquad t_{zx} = t_{xz}; \qquad t_{yx} = t_{xy}.$$

Ces trois égalités ont donc encore lieu ici, en sorte que les neuf composantes des tractions se réduisent à six inégales, comme on l'a déjà admis, d'après le § 4, en posant les six formules (23) des $t_{xx}, \ldots t_{xy}$. En conséquence, les trois équations (24) sont les seules qu'exige l'équilibre intérieur du corps.

Le parallélépipède infiniment petit $dxdydz$ est, comme on voit, soumis à des tensions ordonnées entre elles de la même manière que celles qui agissaient sur les parallélépipèdes *finis* considérés aux

(*) Pour certaines questions délicates, relatives surtout aux fluides, et aussi pour les plaques très minces et très tendues, faisant membranes, on a besoin de posséder des équations ayant un degré d'approximation de plus que celles (24). Voyez le calcul particulier qui en est donné aux n° 10 et 20 de la note du n° 73, sur les plaques. On peut voir aussi un mémoire de M. Boussinesq, sur les ondes liquides périodiques, au tome XX des *Savants étrangers*.

§§ précédents, en sorte que les considérations présentées alors sont applicables à l'état des éléments de l'intérieur de tout corps. Dans chacun d'eux, les points placés primitivement sur la surface d'une très petite sphère forment ensuite un ellipsoïde, qui sera étudié rigoureusement plus loin sous le nom d'ellipsoïde des *déformations* ou des *dilatations*.

Toutes les petites faces planes, de même superficie, se croisant en un même point, supportent des tractions dont les directions sont les diamètres conjugués à ces faces, par rapport à une certaine surface du second degré, ellipsoïde ou hyperboloïde ; enfin, les extrémités des droites qui représentent ces diverses tractions, en direction comme en grandeur, mesurées à partir d'un même point, forment ensemble une autre surface qui est constamment un ellipsoïde. Les formules et propositions des §§ 5 à 10 subsistent ici sans la moindre modification. Mais, d'un point à l'autre du corps, les tractions changent ; en conséquence, les situations de ces surfaces courbes, les grandeurs et les directions de leurs axes principaux changent aussi.

Les formules (2) du § 5 donnent, par conséquent, les conditions particulières d'équilibre relatives à la surface libre du corps. Si l'on imagine un petit parallélépipède tranché obliquement par cette surface, on connaît la grandeur et la direction de la traction supportée par le plan de section, car c'est celle que subit l'élément de la surface et de son plan tangent de la part des forces extérieures. Soit T cette traction supposée connue, et soient ϖ, $\varkappa$, ρ les angles que forme sa direction avec les trois axes coordonnés ; p, q, r, les angles formés avec les mêmes axes par la normale à la surface, menée vers le dehors ; si t_{xx}, t_{yy}....... t_{zy} représentent toujours les composantes suivant les axes coordonnés des tractions que supporte l'unité superficielle des faces du parallélépipède, supposées perpendiculaires à ces axes, les équations (2), page 18, doivent toujours être satisfaites, de sorte qu'on doit encore avoir

$$(25)\quad \begin{cases} \mathrm{t}_{xx} \cos p + \mathrm{t}_{xy} \cos q + \mathrm{t}_{xz} \cos r = \mathrm{T} \cos \varpi, \\ \mathrm{t}_{yx} \cos p + \mathrm{t}_{yy} \cos q + \mathrm{t}_{yz} \cos r = \mathrm{T} \cos \varkappa, \\ \mathrm{t}_{zx} \cos p + \mathrm{t}_{zy} \cos q + \mathrm{t}_{zz} \cos r = \mathrm{T} \cos \rho. \end{cases}$$

§ 13. — Expression des six déformations élémentaires (trois dilatations et trois glissements) en fonction des neuf dérivées ou quotients différentiels des déplacements des points.

Les six équations (24), (25) expriment d'une manière complète les conditions d'équilibre. Mais, en faisant abstraction des trois dernières

qui n'ont lieu qu'aux limites, c'est-à-dire à la surface, on a, dans trois équations, six fonctions inconnues t_{xx}, t_{yy} .... t_{xy}. Rien n'est changé quant au nombre des inconnues, si l'on met pour ces six fonctions leurs valeurs (23) du § 11, exprimées au moyen des déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}. Il convient donc de ramener ces déformations à trois inconnues seulement, et l'on y arrive en remarquant que les divers parallélépipèdes élémentaires, assemblés sans discontinuité, forment, par leur réunion, le corps entier. Si, en considérant l'un de ces parallélépipèdes, x, y, z désignent les coordonnées primitives de celui de ses sommets qui est le plus rapproché de l'origine, les trois sommets qui sont unis à celui-ci par les côtés dx, dy, dz, respectivement, ont pour coordonnées primitives

$$
\begin{array}{llll}
1. & x+dx, & y, & z, \\
2. & x, & y+dy, & z, \\
3. & x, & y, & z+dz.
\end{array}
$$

Par suite des déplacements que produit, dans le corps, l'action des forces extérieures, le premier sommet acquiert généralement des coordonnées nouvelles. Si nous les désignons par

$$x+u, \qquad y+v, \qquad z+w,$$

u, v, w, représentent les déplacements de ce sommet dans les sens positifs des axes coordonnés. Ces déplacements u, v, w varient d'un point à l'autre et sont, par conséquent, des fonctions de x, y, z. On obtient donc les déplacements des trois autres sommets considérés en remplaçant, pour le premier des trois, x par $x+dx$; pour le second, y par $y+dy$; pour le troisième, z par $z+dz$. Leurs coordonnées deviennent ainsi, après les déplacements opérés,

$$
\begin{array}{llll}
1. & x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, & y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx, & z+w+\frac{\partial w}{\partial x}dx, \\
2. & x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, & y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy, & z+w+\frac{\partial w}{\partial y}dy, \\
3. & x+u+\frac{\partial u}{\partial z}dz, & y+v+\frac{\partial v}{\partial z}dz, & z+dz+w+\frac{\partial w}{\partial z}dz.
\end{array}
$$

Si l'on retranche les coordonnées $x+u$, $y+v$, $z+w$ du sommet considéré en premier lieu, l'on a pour les projections, sur les axes

coordonnés, des trois côtés adjacents, dilatés et déplacés,

$$
\begin{array}{llll}
1. & \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx, & \frac{\partial v}{\partial x}dx, & \frac{\partial w}{\partial x}dx,\\
2. & \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, & \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy, & \frac{\partial w}{\partial y}dy,\\
3. & \frac{\partial u}{\partial z}\,dz, & \frac{\partial v}{\partial z}dz, & \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz.
\end{array}
$$

Par conséquent, l'on obtient les longueurs nouvelles $dx\,(1+\partial_x)$, $dy\,(1+\partial_y)$, $dz(1+\partial_z)$ de ces côtés en égalant leurs carrés à la somme des carrés de leurs trois projections respectives. Il en résulte, en effaçant les facteurs communs dx^2, dy^2, dz^2,

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
(1+\partial_x)^2 &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\
(1+\partial_y)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\\
(1+\partial_z)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais les projections de ces mêmes côtés sur les axes x, y, z, divisées par leurs longueurs, donnent les cosinus des angles que forment actuellement leurs directions avec les axes ; et si l'on multiplie deux à deux les cosinus relatifs à deux directions, la somme des trois produits est le cosinus de l'angle que font entre elles ces mêmes directions de deux côtés après leurs déplacements. On trouve ainsi

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-g_{yz}\right) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{(1+\partial_y)\,(1+\partial_z)},\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-g_{zx}\right) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}}{(1+\partial_z)\,(1+\partial_x)},\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-g_{xy}\right) &= \frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}}{(1+\partial_x)\,(1+\partial_y)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si le corps possède en tous sens des dimensions finies, u, v, w et leurs quotients différentiels sont nécessairement partout de très petites

grandeurs. Mais la même nécessité n'a plus lieu si une ou deux dimensions du corps deviennent très petites, les déplacements des points pouvant devenir très grands, comme on le reconnaît évidemment par le cas d'une plaque ou d'une tige élastique très mince, et comme on l'a déjà dit à la fin du § 1. Nous exclurons ici ce cas, qui sera traité spécialement plus tard. Les dimensions étant supposées partout finies, on peut, dans les équations (26), (27), négliger les puissances supérieures et les produits des divers quotients différentiels de u, v, w, et aussi des grandeurs ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}.

Cela réduit ces équations à la forme plus simple

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\\ \partial_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & g_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},\\ \partial_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right. \quad (*)$$

(*) Si l'on veut avoir les expressions de ∂_x, ∂_y, ∂_z, jusqu'aux carrés et produits binaires, inclusivement, des quotients différentiels $\frac{\partial u}{\partial x}$ . . . . . , l'on n'a, pour ∂_x par exemple, qu'à extraire les racines carrées des deux membres de la première équation (26). Mais une remarque essentielle qui m'a été faite en 1870 par M. Brill, professeur à Giessen, est qu'en développant par la formule du binôme la puissance $\frac{1}{2}$ du second membre mis sous la forme

$$1 + \left[2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right],$$

il ne faut pas se contenter des deux premiers termes $1 + \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots\right]$ du développement, car le troisième terme

$$\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left[2\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots\right]^2$$

fournit, comme le second, une des quantités du deuxième ordre dont on a l'intention de tenir compte; et cette quantité en détruit exactement une autre qui vient du second terme. Le résultat est ainsi, en retranchant 1 des deux membres,

$$\partial_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Si l'on veut, de même, avoir g_{yz}, on n'a qu'à multiplier le numérateur de la première expression (27) par $1 - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}$, ce qui revient, à ce degré d'approximation, à le diviser par le dénominateur de la même expression, et ce qui donne

$$g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

On obtient de la même manière les valeurs de ∂_y, ∂_z, g_{zx}, g_{xy}.

(Voir, au *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, 2e série, t. XVI, 1871, un mémoire comprenant un complément et une modification à un autre mémoire, de 1863.)

J'ajoute à ces formules celle qui donne l'accroissement de l'unité de volume. Comme les côtés de l'élément restent à peu près rectangulaires entre eux, on peut toujours exprimer son volume par le produit de ses trois côtés. Le volume du prisme déformé est ainsi

$$dxdydz\,(1+\partial_x)\,(1+\partial_y)\,(1+\partial_z);$$

et comme le volume primitif était $dxdydz$, l'unité de volume est devenue $(1+\partial_x)(1+\partial_y)(1+\partial_z)$ ou $1+(\partial_x+\partial_y+\partial_z)$ en négligeant les quantités d'ordre supérieur. Donc $(\partial_x+\partial_y+\partial_z)$ est l'augmentation proportionnelle de l'unité de volume, et si nous appelons υ cette augmentation, nous avons

$$(29) \qquad \upsilon = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les équations (28) sont celles que nous cherchions, puisqu'elles expriment les six déformations élémentaires et par conséquent aussi les six composantes de tractions (*) par les quotients différentiels partiels de trois fonctions u, v, w. Si l'on substitue les vlaeurs (28) de $\partial_x \ldots\ldots g_{xy}$ dans les expressions (25), puis celles-ci dans les équations (24), on obtient trois équations différentielles partielles simultanées de second ordre pour u, v, w. Ce sont les équations générales de l'équilibre d'un corps élastique : Elles seront données au § 17.

§ 14. — Équations du mouvement, exprimées comme celles de l'équilibre du § 12, au moyen des six composantes des tensions intérieures, et des trois composantes des forces extérieures agissant sur les points intérieurs.

Lorsqu'il y a des mouvements intérieurs, leurs équations se déduisent facilement de ce qui précède en appliquant le principe général qui porte le nom de d'Alembert (**). Soit m la masse de l'unité de volume

(*) Ces six *déformations* élémentaires ∂_x, $\partial_y \ldots\ldots g_{xy}$, et ces six composantes de tractions t_{xx}, $t_{yy} \ldots\ldots t_{xy}$ sont ce que les géomètres et les ingénieurs anglais appellent respectivement *strains* et *stresses*.

(**) On facilite beaucoup, aujourd'hui, l'application de ce principe en comptant, au nombre des forces, les *inerties* des mobiles, évaluées par les produits, pris en signe contraire, de leurs masses par les accélérations, et en posant les équations de l'équilibre (dit *dynamique*), où ces forces figurent comme les autres. De cette manière, on n'a même nul besoin de rappeler ce principe, dont l'énoncé, quoi qu'on fasse ou de quelque manière qu'on modifie celui que d'Alembert en a donné, est toujours obscur.

C'est ainsi que Poncelet, surtout, a su introduire dans les cours élémentaires et pratiques l'établissement des équations de la dynamique des systèmes quelconques, aussi facilement que celles de leur statique.

du corps, $m\,dx\,dy\,dz$ sera celle du parallélépipède élémentaire considéré ci-dessus, et les forces nécessaires pour produire l'équilibre seront les produits, pris en signe contraire, de cette masse par les accélérations qu'il possède à l'instant où l'on se trouve. Cet élément a décrit, parallèlement aux axes, les chemins u, v, w qui expriment ses déplacements et qui dépendent, non seulement des coordonnées x, y, z, mais encore du temps t. Les accélérations ne sont donc autre chose que les quotients différentiels du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Et, pour établir les équations de condition de l'équilibre, il suffira d'ajouter, aux forces extérieures, les produits négatifs de $m\,dx\,dy\,dz$ par les accélérations ; ou bien, comme les forces ci-dessus étaient rapportées à l'unité de volume, de poser, au lieu de X, Y, Z, les expressions

$$X - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$Y - m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$Z - m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

et, par suite, on déduira des équations (24) les équations générales de mouvement

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathbf{t}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial z} + X, \\ m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathbf{t}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yz}}{\partial z} + Y, \\ m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \mathbf{t}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zz}}{\partial z} + Z \end{aligned}\right.$$

On a ainsi trois équations différentielles partielles simultanées pour déterminer u, v, w, en exprimant d'abord les tensions $\mathbf{t}$ au moyen de (25), page 38, en fonction de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} ; puis ces grandeurs au moyen des équations (28) en fonction des quotients différentiels mêmes de u, v, w.

Les considérations sur l'ellipsoïde d'élasticité, ainsi que celles qui ont été présentées sur les conditions limites (25) relatives à la surface du corps, restent absolument les mêmes ; elles sont en effet indépen-

dantes des forces agissant sur l'intérieur du parallélépipède élémentaire, et par conséquent aussi des accélérations (*).

Les équations (30) donnent lieu à une proposition remarquable qui simplifie notablement la recherche des petits mouvements intérieurs (oscillations ou vibrations) d'un corps élastique. Les forces X, Y, Z, agissant sur les molécules de l'intérieur sont en général, tout comme les forces T $\cos\varpi$, T $\cos\varkappa$, T $\cos\rho$, qui s'exercent sur la surface, fonctions des coordonnées de leurs points d'application ; elles deviennent par conséquent, pendant le mouvement, fonctions de $x+u$, $y+v$, $z+w$. Mais comme u, v, w sont des quantités très petites, on peut, dans les expressions de X, Y, Z, T, les négliger par rapport à x, y, z, c'est-à-dire qu'on peut calculer ces forces comme si elles agissaient sur le même point d'application qu'à l'état de repos. Si l'on suppose, en outre, que les forces ne sont pas variables avec le temps, elles ne sont plus fonctions que de x, y, z. Désignons maintenant par u', v', w' les déplacements que produisent les forces agissant tant à l'extérieur qu'à l'intérieur du corps lorsqu'elles sont arrivées à produire l'équilibre, effet qui est toujours possible si elles sont indépendantes du temps (**). Si nous désignons en outre par t' les tensions correspondantes qui s'expriment toujours linéairement par les formules (25) et (28) en fonction des quotients différentiels de u', v', w', nous aurons pour la détermination de u', v', w' les équations

$$0=\frac{\partial t'_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{xz}}{\partial z}+X,$$

$$0=\frac{\partial t'_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{yz}}{\partial z}+Y,$$

$$0=\frac{\partial t'_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{zz}}{\partial z}+Z,$$

avec les conditions limites relatives à la surface

$$\mathrm{T}\cos\varpi=t'_{xx}\cos p+t'_{xy}\cos q+t'_{xz}\cos r,$$

$$\mathrm{T}\cos\varkappa=t'_{yx}\cos p+t'_{yy}\cos q+t'_{yz}\cos r,$$

$$\mathrm{T}\cos\rho=t'_{zx}\cos p+t'_{zy}\cos q+t'_{zz}\cos r.$$

(*) Ou des *inerties* qui sont, disons-nous, en signe contraire, les produits des accélérations par les masses des points ou des éléments matériels.

(**) Et à condition, bien entendu, que ces forces ne seront pas d'une intensité allant jusqu'à dépasser ce qu'on appelle la limite de l'élasticité de la matière du corps, et à y produire des déformations permanentes ou des ruptures.

Maintenant si, pour les *mouvements* du corps, pris sous l'influence de ces forces, on pose

$$\begin{aligned} u &= u' + u'', & t_{xx} &= t'_{xx} + t''_{xx}, & t_{yz} &= t'_{yz} + t''_{yz}, \\ v &= v' + v'', & t_{yy} &= t'_{yy} + t''_{yy}, & t_{zx} &= t'_{zx} + t''_{zx}, \\ w &= w' + w'', & t_{zz} &= t'_{zz} + t''_{zz}, & t_{xy} &= t'_{xy} + t''_{xy}, \end{aligned}$$

de sorte que u'', v'', w'' représentent les mouvements calculés à partir des positions d'équilibre, alors, en ayant égard aux équations posées tout à l'heure, il ne reste des équations (30) que

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} &= \frac{\partial t''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t''_{xz}}{\partial z}, \\ m\frac{\partial^2 v''}{\partial t^2} &= \frac{\partial t''_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t''_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t''_{yz}}{\partial z}, \\ m\frac{\partial^2 w''}{\partial t^2} &= \frac{\partial t''_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t''_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t''_{zz}}{\partial z}, \end{aligned}$$

et, des conditions limites qui viennent d'être posées, que

$$\begin{aligned} 0 &= t''_{xx}\cos p + t''_{xy}\cos q + t''_{xz}\cos r, \\ 0 &= t''_{yx}\cos p + t''_{yy}\cos q + t''_{yz}\cos r, \\ 0 &= t''_{zx}\cos p + t''_{zy}\cos q + t''_{zz}\cos r. \end{aligned}$$

Ces équations sont précisément celles que l'on poserait pour déterminer les oscillations autour de chaque position initiale x, y, z, si aucune force n'agissait, ni sur l'intérieur, ni sur l'extérieur du corps.

On a donc ce théorème :

Les oscillations d'un corps soumis à des forces extérieures, autour de la position d'équilibre qui correspond à ces forces pour chaque point, sont rigoureusement identiques (*) *à celles qu'exécutent les points du corps autour de leur position naturelle lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur lui.*

On voit que, par ce théorème, le problème se divise en deux parties la recherche de la position d'équilibre, et la détermination d'oscillations s'exécutant sans intervention de forces extérieures.

(*) Quant à la forme, bien entendu, car les $\frac{\partial t''}{\partial(x, y, z)}$ qui entrent dans les six équations qu'on vient d'écrire, ne sont pas rigoureusement égaux aux $\frac{\partial t}{\partial(x, y, z)}$ de l'état naturel.

§ 15. — Ellipsoïde des déformations.

Les développements du § 13 donnent le moyen d'étudier l'ellipsoïde des déformations plus complètement que nous n'avons fait à la fin du § 4. Par un point du corps dont x, y, z sont les coordonnées par rapport à un système donné d'axes rectangulaires, menons trois axes nouveaux, parallèles à ceux-ci, et désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point par rapport à ce nouveau système d'axes. Alors

$$(31) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \varepsilon^2$$

est l'équation d'une sphère dont le centre est au point (x, y, z) origine des coordonnées nouvelles x', y', z' et dont le rayon est une longueur ε, supposée très petite. Les points placés sur cette surface sphérique prennent, après la déformation du corps, des positions nouvelles dont les coordonnées s'obtiendront en introduisant, dans les coordonnées $x+u$, $y+v$, $z+w$ du centre déplacé, au lieu de ses coordonnées originelles x, y, z, les coordonnées $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ d'un point de la surface sphérique. Mais si x', y', z' sont très petits, on peut développer les fonctions u, v, w suivant les puissances de x', y', z', et ne conserver que les termes affectés de leurs premières puissances. Alors les coordonnées du point de la surface sphérique après son déplacement deviennent

$$x + x' + u + \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z',$$

$$y + y' + v + \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z',$$

$$z + z' + w + \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z'.$$

Pour rapporter ces coordonnées à un système d'axes menés par le centre de la sphère après son déplacement, il suffit d'en retrancher les coordonnées $x+u$, $y+v$, $z+w$ de ce centre déplacé ; et si l'on désigne par x'', y'', z'' les coordonnées par rapport à ce nouveau système d'axes, on a

$$x'' = x'\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + y' \frac{\partial u}{\partial y} + z' \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$y'' = x' \frac{\partial v}{\partial x} + y'\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + z' \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$z'' = x' \frac{\partial w}{\partial x} + y' \frac{\partial w}{\partial y} + z'\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Tirons x' de la première de ces équations, y' de la seconde, z' de la troisième. Comme les quotients différentiels de u, v, w sont petits par rapport à 1, on peut, dans les termes qui en sont affectés, ainsi que des petites coordonnées x', y', z', changer celles-ci respectivement en x'', y'', z'', parce que ce ne sera commettre qu'une erreur d'un ordre de petitesse plus élevé. Alors, les équations ci-dessus fournissent

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= x''\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - y''\frac{\partial u}{\partial y} - z''\frac{\partial u}{\partial z},\\ y' &= -x''\frac{\partial v}{\partial x} + y''\left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - z''\frac{\partial v}{\partial z},\\ z' &= -x''\frac{\partial w}{\partial x} - y''\frac{\partial w}{\partial y} + z''\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on introduit ces valeurs dans l'équation (31) de la petite sphère, on obtient l'équation suivante. Elle représente un ellipsoïde sur lequel se trouvent tous les points placés originairement sur cette sphère (31) :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2 = &\left(x'' - x''\frac{\partial u}{\partial x} - y''\frac{\partial u}{\partial y} - z''\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 +\\ &+\left(y'' - x''\frac{\partial v}{\partial x} - y''\frac{\partial v}{\partial x} - z''\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 +\\ &+\left(z'' - x''\frac{\partial w}{\partial y} - y''\frac{\partial w}{\partial y} - z''\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2; \end{aligned}\right.$$

ou, en négligeant les termes d'ordre supérieur,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon^2 = &\left(1 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)x''^2 - 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)y''z'',\\ &+\left(1 - 2\frac{\partial v}{\partial y}\right)y''^2 - 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)z''x'',\\ &+\left(1 - 2\frac{\partial w}{\partial z}\right)z''^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)x''y''. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de la considération des coordonnées de plans du § 9, on reconnait, par la forme de l'équation (33) de l'ellipsoïde qu'elle représente, que les trois lignes d'intersection mutuelle des plans ayant pour équations

$$x'' = x''\frac{\partial u}{\partial x} + y''\frac{\partial u}{\partial y} + z''\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$y'' = x''\frac{\partial v}{\partial x} + y''\frac{\partial v}{\partial y} + z''\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$z'' = x''\frac{\partial w}{\partial x} + y''\frac{\partial w}{\partial y} + z''\frac{\partial w}{\partial z},$$

sont des diamètres conjugués de ce même ellipsoïde. Mais les équations (52) montrent que ces plans, dans l'état de repos (état primitif), sont représentés par

$$x' = 0\,, \qquad y' = 0\,, \qquad z' = 0\,,$$

c'est-à-dire que ces plans étaient originairement parallèles aux côtés du parallélépipède qui a été déformé. Enfin, si l'on remarque que le choix des axes coordonnés était arbitraire et que, par conséquent, on peut trouver le même résultat pour trois directions quelconques originairement rectangulaires les unes sur les autres, on en déduira le théorème suivant:

Chaque système de trois lignes originairement perpendiculaires entre elles devient un système de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde des déformations. Cela se trouvait déjà indiqué au § 4.

La forme (54) de l'équation de l'ellipsoïde des déformations présente un certain intérêt, en ce que tous ses coefficients peuvent recevoir immédiatement une signification géométrique. Car, eu égard aux expressions (28) des six petites déformations ∂, $\mathfrak{g}$, cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = {} & (1 - 2\,\partial_x)\,x''^2 - 2\,\mathfrak{g}_{yz}\,y''z'' \\ & + (1 - 2\,\partial_y)\,y''^2 - 2\,\mathfrak{g}_{zx}\,z''x'' \\ & + (1 - 2\,\partial_z)\,z''^2 - 2\,\mathfrak{g}_{xy}\,x''y''. \end{aligned}$$

Il est facile, comme on l'a fait au § 6 pour l'ellipsoïde d'élasticité, de trouver les axes principaux de cette surface.

Je montrerai seulement ici que *dans des milieux isotropes, les directions des axes principaux de cette surface coïncident avec les directions des axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité.*

En effet, si dans l'équation précédente on remplace ∂_x, $\partial_y \ldots\ldots \mathfrak{g}_{xy}$ par leurs valeurs en fonction des tensions, pouvant être déduites des équations (1 c) du § 4, page 14, cette équation devient

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = {} & \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)\left(1 + 2\,\eta\,\frac{\mathfrak{t}_{xx} + \mathfrak{t}_{yy} + \mathfrak{t}_{zz}}{E}\right) \\ & - 2\,\frac{1+\eta}{E}\left(\mathfrak{t}_{xx}\,x''^2 + \mathfrak{t}_{yy}\,y''^2 + \mathfrak{t}_{zz}\,z''^2 + 2\,\mathfrak{t}_{yz}\,y''z'' + 2\,\mathfrak{t}_{zx}\,z''x'' + 2\,\mathfrak{t}_{xy}\,x''y''\right). \quad (*) \end{aligned}$$

(*) Équation où, vu $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ de la fin du § 3, il conviendrait de remplacer $\frac{2\,\eta}{E}$ par $\frac{1}{G} - \frac{2}{E}$ et $2\,\frac{1+\eta}{E}$ par $\frac{1}{G}$: car le coefficient G d'élasticité de glisssement, aussi facile à mesurer, au moyen d'expériences de torsion, que l'est celui E d'élasticité d'extension, doit entrer plus convenablement dans les formules que la fraction η

Si maintenant on veut prendre pour axes coordonnés les axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité, on n'a qu'à effacer les t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}, et à remplacer les t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} par T', T'', T'''. On obtient ainsi, pour l'équation de l'ellipsoïde de déformation,

$$\varepsilon^2 = (x''^2 + y''^2 + z'')^2 \left(1 + 2\eta \frac{T' + T'' + T''}{E}\right)$$
$$- 2\frac{1+\eta}{E}(T' x''^2 + T'' y''^2 + T''' z''^2).$$

Comme elle ne contient pas les produits deux à deux de x'', y'', z'', on voit que l'ellipsoïde de déformation, rapporté aux axes principaux de l'ellipsoïde d'élasticité, se trouve, par cela seul, rapporté aussi à ses axes principaux propres.

Pour des substances cristallines, et plus généralement pour toutes les substances hétérotropes, la même propriété n'existe plus (*).

§ 16. — Détermination du travail pour une petite déformation d'un corps. Relations qu'on en déduit entre les trente-six coefficients qui servent à définir la manière de se comporter d'une substance cristalline, ou de toute substance solide non isotrope.

Imaginons (**) qu'un corps, soumis à l'action de forces quelconques, subisse une suite de changements dans sa forme, en sorte que ses divers points (x, y, z) dont les coordonnées sont devenues $x + u$, $y + v$, $z + w$, continuent de se déplacer, et franchissent, pendant un temps infiniment petit, des espaces élémentaires δu, δv, δw parallèlement aux x, aux y et aux z. Le travail produit dans tout le corps par ce petit mouvement s'obtiendra en multipliant un élément $dxdydz$

(*) On verra à la Note de la fin du § 57, que la détermination des *plus grandes dilatations*, revenant à celle des axes de *l'ellipsoïde des déformations*, détermination que l'auteur néglige, ici et ailleurs, de faire, est bien plus importante que celle des axes et des propriétés de *l'ellipsoïde* dit *d'élasticité* ou des tensions, du § 6; ellipsoïde qui, dans le fait, sert peu ou point.

Nous pourrions donner ici, comme en son lieu naturel, l'établissement de l'équation du troisième degré, analogue à celle (7) du § 6, dont les racines fournissent les trois dilatations principales. Nous préférons le renvoyer au n° 3, équation (*e*), de cette Note de la fin du § 57, qui traite des limites à imposer aux forces extérieures auxquelles on soumet les pièces solides, ou de ce qu'on appelle les *conditions de résistance permanente à la rupture*, afin de ne pas diviser et interrompre ce qui est relatif à cet important sujet.

(**) Nous avons dû ici, jusqu'à l'équation $\delta W = \ldots$, changer un peu la rédaction de Clebsch, pour la rendre plus claire.

de son volume par les composantes, dans les directions x, y, z des forces agissant sur l'unité de ce volume et respectivement par les petits espaces parcourus δu, δv, δw, puis ajoutant les trois produits et intégrant leur somme pour toute l'étendue ou pour tous les éléments du corps. Or, les trois composantes de forces agissant sur l'unité de volume de l'élément $dxdydz$ ne sont autre chose que les seconds membres des équations (30) du § 14, page 51, c'est-à-dire

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + X \text{ dans le sens des } x,$$

et deux quadrinômes analogues dans les sens y et z. L'élément de travail produit pendant que les points parcourent les espaces dont les projections sur les x, y, z sont δu, δv, δw, se présente donc sous la forme

$$\delta W = \delta U + \delta V,$$

où

$$\delta U = \iiint (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,dx\,dy\,dz$$

représente le travail des forces extérieures agissant sur l'intérieur du corps, et

$$\delta V = \iiint \left\{ \begin{aligned} &\delta u \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \right) \\ &+ \delta v \left(\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \right) \\ &+ \delta w \left(\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} dx\,dy\,dz.$$

représente le travail des tensions qui proviennent, tant des actions réciproques de ses molécules, que des forces quelconques de pression et de traction pouvant solliciter sa surface.

Considérons d'abord un seul des neuf termes de cette dernière intégrale triple, par exemple

$$\iiint \delta u \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Intégrons par rapport à x *partiellement*, à savoir pour la petite portion du corps qui est contenue dans un canal infiniment délié dont nous considérons la section $dydz$ comme constante ainsi que les coordonnées y et z. Cette intégration par parties, si l'on remplace, dans

le second terme, $\frac{\partial \delta u}{\partial x}$ par $\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ qui lui est identique, nous donne l'expression

$$\iint \left[t_{xx}\, \delta u \right] dy\, dz - \iiint t_{xx}\, \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz.$$

La parenthèse carrée signifie qu'au lieu de l'expression $t_{xx}\,\delta u$ qu'elle renferme, on doit mettre la différence des valeurs que prend cette expression aux deux extrémités du canal considéré. Désignons maintenant par $d\sigma$, $d\sigma'$, les éléments que découpe, sur la surface du corps, ce canal à ses extrémités, et par p, q, r les angles que forme avec les axes coordonnés la normale à $d\sigma$ menée vers l'extérieur du corps, enfin par p', q', r', les mêmes angles pour la normale à $d\sigma'$.

Si $d\sigma$ est l'extrémité *antérieure* du canal, c'est-à-dire celle qui se trouve le plus du côté positif des x, et $d\sigma'$ son extrémité *postérieure*, cos p est nécessairement positif, et cos p' négatif, en sorte qu'on a

$$dy\, dz = d\sigma \cos p = - d\sigma' \cos p'.$$

La différence des valeurs limites de $t_{xx}\,\delta u\, dydz$ devient donc la somme des valeurs que prend l'expression $t_{xx}\,\delta u\, d\sigma \cos p$ pour les extrémités du canal. Au lieu d'étendre l'intégrale double ci-dessus aux extrémités de tous les canaux parallèles à l'axe des x que l'on peut mener semblablement dans l'intérieur du corps, il est évidemment possible d'intégrer directement pour l'ensemble des éléments $d\sigma$ qui comprennent les éléments $d\sigma'$. Donc

$$\iint \left[t_{xx}\, \delta u \right] dy\, dz = \int t_{xx}\, \delta u\, d\sigma \cos p.$$

On arriverait au même résultat si le canal coupait la surface du corps plus de deux fois. Le nombre des points d'intersection du canal et de la surface est évidemment toujours pair, attendu que chaque fois que le canal entre par un point dans l'intérieur du corps, il doit en sortir par un autre. Désignons ces points par 1, 2..... $2n$. Alors nous aurons à intégrer le long du canal, dans toutes les parties situées à l'intérieur du corps, par conséquent du point 1 au point 2, du point 3 au point 4, etc., et au lieu de $[t_{xx}\,\delta u]$ nous devrons écrire

$$\left(t_{xx}\, \delta u \right)_{2n} - \left(t_{xx}\, \delta u \right)_{2n-1} + \ldots\ldots + \left(t_{xx}\, \delta u \right)_{2} - \left(t_{xx}\, \delta u \right)_{1}.$$

Pour chacun des points d'entrée du canal, nous aurons, comme ci-dessus,

$$dy\, dz = - d\sigma_{2k+1} \cos p_{2k+1}$$

et pour chacun des points de sortie

$$dy\,dz = d\sigma_{2k} \cos p_{2k}.$$

De sorte que l'intégrale $\int\int [t_{xx}\,\delta u]\,dydz$ prend la forme

$$\int\int \left\{ \left(t_{xx}\,\delta u \right)_{2n} \cos p_{2n}\,d\sigma_{2n} + \ldots\ldots + \left(t_{xx}\,\delta u \right)_1 \cos p_1\,d\sigma_1 \right\}.$$

Si donc, comme tout à l'heure, nous intégrons, non pas pour tous les canaux possibles parallèles à l'axe des x, mais pour tous les éléments $d\sigma$ de la surface, cette même intégrale peut être remplacée simplement par

$$\int t_{xx}\,\delta u\,d\sigma \cos p\,,$$

ce qui était à démontrer. Ainsi, dans tous les cas, on remplacera le terme de δV que nous avons considéré, par

$$\int t_{xx}\,\delta u\,d\sigma \cos p - \int\int\int t_{zz}\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz\,,$$

où la première intégrale doit être étendue à toute la surface σ du corps (*).

Si l'on fait de même pour tous les autres termes de δV, on obtient

$$\delta V = \delta U_1 - \delta U_2\,,$$

δU_1 représentant l'ensemble des intégrales simples, et δU_2 l'ensemble des intégrales triples comme est celle de l'expression binôme en t_{xx} qu'on vient d'écrire. Et l'on a

$$\begin{aligned}\delta U_1 = &\int (t_{xx} \cos p + t_{xy} \cos q + t_{xz} \cos r)\,\delta u\,d\sigma\\ &+ \int (t_{yx} \cos p + t_{yy} \cos q + t_{yz} \cos r)\,\delta v\,d\sigma\\ &+ \int (t_{zx} \cos p + t_{zy} \cos q + t_{zz} \cos r)\,\delta w\,d\sigma.\end{aligned}$$

(*) On aurait pu, dans l'expression $\int\int\int \delta u\,\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\,dxdydz$, mettre, à la place de $\delta u\,\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}$, $\frac{\partial (t_{xx}\,\delta u)}{\partial x} - t_{xx}\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, comme on fait le plus ordinairement en pareil cas, pour n'avoir pas à parler d'intégration par parties.

Quant à la transformation qui vient d'être faite, d'une intégrale $\int\int\int \frac{\partial (t_{xx}\,\delta u)}{\partial x}\,dxdydz$ pour tout un volume, en une intégrale pour sa superficie σ, et à celle qui peut être faite de même d'une intégrale pour toute une superficie plane, en une intégrale pour son contour, elles sont d'un usage fréquent et nécessaire, bien qu'il n'en soit pas question dans l'enseignement de nos écoles. Le premier exemple paraît en avoir été donné dans la *Mécanique analytique*. Lamé en a offert une application à la deuxième (§ 10) de ses *Leçons de* 1852 *sur la théorie de l'élasticité*.

Or les expressions entre parenthèses sont précisément celles qui, d'après les équations (25), équivalent aux composantes $T\cos\varpi$, $T\cos\chi$, $T\cos\rho$ des forces de traction T appliquées à la surface du corps ; δU_1 n'est donc rien autre chose que le travail de ces forces de traction extérieures, en sorte que

$$\delta U_1 = \int T\,(\cos\varpi\,\delta u + \cos\chi\,\delta v + \cos\rho\,\delta w)\,d\sigma.$$

On trouvera de même que les huit termes de δU_2 autres que celui qui contient $t_{xx}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, et que nous avons écrit, sont affectés, sous le triple signe d'intégration, des incréments δ des autres quotients différentiels $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x} \cdots\cdots \frac{\partial w}{\partial z}$ des déplacements u, v, w et des autres composantes t_{yy}..... des tensions; d'où résulte, en mettant, d'après les expressions (28), les déformations élémentaires ∂_x, ∂_y.....g_{xy} au lieu de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$...... $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\delta U_2 = \iiint (t_{xx}\delta\partial_x + t_{yy}\delta\partial_y + t_{zz}\delta\partial_z + t_{yz}\delta g_{yz} + t_{zx}\delta g_{zx} + t_{xy}\delta g_{yx})\,dx\,dy\,dz$$

On a ainsi pour le travail total

$$\delta W = \delta U + \delta U_1 - \delta U_2,$$

où δU et δU_1 représentent les travaux des forces extérieures agissant respectivement sur les points intérieurs et sur la surface du corps. *Par conséquent* — δU_2 *est nécessairement le travail des forces internes qui procèdent des actions moléculaires* (*).

(*) M. Kirchhoff a eu l'obligeance de m'indiquer, vers 1858, une manière simple et directe de se rendre compte de la composition sextinôme de l'expression ainsi donnée du travail interne ou moléculaire δU_2 pour l'unité de volume d'un élément. Soient x, y, z les trois côtés très petits, parallèles aux x, y, x, de cet élément rectangle ; 1° si la dilatation ∂_x déjà subie par son côté x vient à être accrue de $\delta\partial_x$, les deux faces opposées et égales yz s'éloignent de $x\delta\partial_x$; les composantes normales de tension exercées par la matière environnante sur ces faces produisent un travail $yz\,t_{xx}\,x\,\delta\partial_x$; cela fait, par unité du volume xyz, le travail $t_{xx}\,\delta\partial_x$; 2° si, l'une des deux faces opposées yz restant immobile, le glissement g_{xy} vient à augmenter de δg_{xy}, il y a un cheminement $x\delta g_{xy}$ de l'autre face parallèlement à celle-ci ; en sorte que la tension tangentielle t_{xy} qui agit par unité de sa surface yz dans le sens y de ce cheminement, produit un travail $yz t_{xy}\,x\delta g_{xy}$. Il y a bien deux autres faces sur lesquelles agit une tension ou t_{yx} égale à t_{xy} ; ce sont les faces xz. Elles ont, dans ce mouvement, pivoté autour des deux côtés z de celle des deux faces yz qui est restée immobile ; mais les tensions t_{yx} s'y exercent dans le sens x et non dans le sens y qui a été celui du mouvement ;

Or on sait que le travail des forces internes d'un corps est constamment une différentielle complète, ou, en d'autres termes, que le travail correspondant à un déplacement fini dépend seulement de la position initiale et de la position finale des diverses parties ou molécules du corps, mais non du chemin par lequel elles ont passé d'une position à l'autre. Comme, d'autre part [§ 11, expressions (25)], les t_{xx}.... t_{xy} sont des fonctions linéaires de ∂_x, ∂_y.... g_{xy}, *il doit nécessairement y avoir une fonction homogène, du second degré, de ces grandeurs, dont les quotients différentiels par rapport à ∂_x, ∂_y.... g_{xy} sont les six tensions ;* de sorte que la différentielle complète par δ de cette fonction, laquelle peut être désignée par F, peut s'écrire

$$(34\,a)\quad \delta F = t_{xx}\,\delta\partial_x + t_{yy}\,\delta\partial_y + t_{zz}\,\delta\partial_z + t_{yz}\,\delta g_{yz} + t_{zx}\,\delta g_{zx} + t_{xy}\,\delta g_{xy}.$$

Il résulte de là, pour les milieux non isotropes, une série d'équations de condition entre les coefficients a des expressions générales (25) des six composantes des tensions : car, par exemple, t_{xx} différentié par rapport à ∂_y, doit donner le même résultat que t_{yy} différentié par rapport à ∂_x. Toutes ces équations de condition peuvent être représentées par la seule équation suivante, dans laquelle les indices i, k, l, m, peuvent être remplacés successivement par x, y, z :

$$a_{ik.lm} = a_{lm.ik}.$$

Ces conditions, qui sont au nombre de quinze, réduisent à 21 différents les 36 coefficients a, ainsi qu'on l'a déjà dit plus haut (*).

---

elles n'ont donc rien ajouté au travail $yz\,t_{xy}\,x\delta g_{xy}$ des tensions t_{xy}, travail qui est ainsi, seulement, $t_{xy}\,\delta g_{xy}$ par unité de volume de l'élément. Or, le travail des six tensions sur les faces de l'élément doit, pour que l'équilibre ait lieu après comme avant ces petits mouvements, être égal (au signe près) au travail moléculaire de l'intérieur de l'élément. Donc ce travail a bien pour grandeur, par unité de volume, le sextinôme $(t_{xx}\,\delta\partial_x + \dots + t_{xy}\,\delta g_{xy})$ de la parenthèse de l'expression de δU_2. (Voir l'appendice V de l'édition annotée de Navier de 1864, ou un article des Comptes rendus *Sur le nombre des coefficients*, etc., du 16 novembre 1861, t. LIII, p. 1107.)

(*) En effet [et sans avoir besoin de dire et de faire voir, d'après la forme des expressions (25), que F doive être une fonction homogène du second degré], il suffit, pour arriver au but actuel de l'auteur, à savoir, la réductibilité des 36 coefficients $a_{xx.xx}$ ...... $a_{xy.xy}$ à 21 inégaux, de regarder comme admis et nécessaire, ainsi qu'il le fait, que le travail intérieur, exprimé par la parenthèse de δU_2 ou le second membre de (34 a) soit la différentielle exacte, par δ, d'une fonction des six quantités ∂_x, ∂_y .... g_{xy} qui aurait leurs six multiplicateurs t_{xx} ...... t_{xy} pour ses dérivées partielles par rapport à elles respectivement. Car cela exige qu'on ait bien, entre les dérivées de ces six multiplicateurs eux-mêmes combinés deux à deux, les $\frac{6.5}{1.2} = 15$ égalités, telles que $\frac{d t_{xx}}{d \partial_y} = \frac{d t_{yy}}{d \partial_x}$; $\frac{d t_{zz}}{d \partial_x}$ $\frac{d t_{xy}}{d g_{yz}}$.......

La fonction F est facile à déterminer.

Elle se présente même, pour les substances isotropes, sous une forme assez simple. En effet, si au moyen des équations (1 c) du § 4, page 14, on exprime les t en fonction de ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xz}, si l'on introduit les valeurs ainsi trouvées dans l'équation (34 a) et si l'on intègre, on obtient

$$(34\,b)\quad F = \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 + \frac{2\eta}{1-2\eta}\,\frac{(\partial_x+\partial_y+\partial_z)^2}{2} + \frac{g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{yx}^2}{2}\right\},$$

où $\frac{E}{2(1+\eta)}$ peut être remplacé par G, et $\frac{2\eta}{1-2\eta}$ par $\frac{E-2G}{3G-E}$ (*).

(*) NOTE FINALE DU § 16.

1. *Fondement de la réduction à 21 inégaux au plus, par George Green, des 36 coefficients des formules générales des six composantes rectangulaires des tensions élastiques.* — C'est cet illustre physicien, déjà cité au n° 3 d'une Note de la fin du § 11, qui a opéré, de la manière ingénieuse rapportée par Clebsch, la réduction dont nous parlons.

Il la fonde, dans ses deux célèbres mémoires d'optique mathématique (*On the Laws of Reflexion and Refraction*, 11 novembre 1837, et *On propagation of Light in crystallised Media*, 20 may 1839, au volume VIII, 1839-1841, des Transactions de Cambridge), sur ce principe, posé à la première page, que « de quelque manière que les éléments d'un système matériel agissent les uns sur les autres, la somme des produits de leurs actions par les éléments de leurs directions », ou, comme on dirait aujourd'hui, la somme de leurs travaux pendant un temps infiniment court, « doit être la différentielle exacte ou complète de quelque fonction » ; parce que (ajoute-t-il, p. 4) si cela n'était pas, « le mouvement perpétuel serait possible; et nous avons toute raison de penser que les forces, dans l'univers, sont disposées de manière à faire de cela une naturelle impossibilité. »

2. *Le principe ainsi invoqué par Green revient à celui de la conservation des forces vives.* — En effet celui-ci, dont on déduit, lorsqu'il est une fois admis, l'impossibilité du mouvement perpétuel, peut être regardé réciproquement comme une conséquence de cette impossibilité.

On sait qu'il s'exprime par une équation

$$(a)\quad \sum m\frac{V^2}{2} + \Psi\left(x, y, z, x', y', z', \ldots \ \ldots\right) = \text{une constante C}$$

dont le premier terme représente la somme des produits des masses m de tous les points d'un système matériel par les demi-carrés de leurs vitesses V à un instant quelconque, et dont le second, Ψ, est une fonction des coor-

données x, y, z, x'..... au même instant, de tous ces points supposés n'éprouver que leurs actions mutuelles, auxquelles peuvent se joindre des actions émanées de points extérieurs *fixes*. Or, pendant toute portion infiniment courte dt du temps, l'augmentation $\Sigma m \frac{dV}{dt} V dt$ de $\Sigma m \frac{V^2}{2}$ est identiquement égale à une somme d'autres produits qui, *cinématiquement*, sont ceux de masses m par des accélérations composantes ou partielles regardées comme dues à ces deux espèces de forces, et par des espaces parcourus estimés ou projetés suivant leurs directions; produits qu'on appelle les travaux de ces mêmes forces (*). L'équation (a) revient ainsi à ce que le travail total, pendant un temps élémentaire dt, dans le système que ces forces sollicitent, est la différentielle complète, par rapport au temps t, de la fonction Ψ des coordonnées, ou à ce que, entre deux instants aussi éloi-

---

(*) En effet, appelons J l'accélération actuelle d'un point matériel m; $j = \frac{P}{m}$, $j' = \frac{P'}{m}$,..... les composantes de cette accélération de m dans les directions p, p'..... de ses lignes de jonction tant avec les autres points matériels du système qu'avec des centres d'action extérieurs fixes, en sorte que P, P'..... sont ce qu'on appelle les forces ou les actions exercées sur m par ces divers points. Projetons toutes ces accélérations sur la direction V de la vitesse actuelle de m, nous aurons

$$J \cos(J, V) = j \cos(j, V) + j' \cos(j', V) + \dots..$$

Multiplions de part et d'autre par $mV\,dt$. Comme $J \cos(J, V) = \frac{dV}{dt}$, le premier membre sera $mV \frac{dV}{dt} dt$; mj, mj'..... seront remplacés par P, P'.....; $Vdt \cos(V, j)$, $Vdt \cos(V, j')$..... seront les expressions de l'espace parcouru projeté ou estimé suivant les directions respectives p, p'..... de j, j'..... ou de P, P'..... Appelons, suivant l'usage, dp, dp'..... ces espaces infinitésimaux ainsi projetés et S l'indice d'une somme pour toutes les accélérations partielles j, ou pour toutes les forces P agissant sur le point m, nous aurons

$$m V \frac{dV}{dt} dt, \qquad \text{ou} \qquad m V\, dV = S\, P\, dp.$$

Faisons la somme de toutes les équations comme celle-là, relatives aux divers points m, m'..... du système, et prenons Σ pour l'indice de cette somme, nous aurons

$$\Sigma\, m\, V\, dV = \Sigma\, S\, P\, dp,$$

équation de pure cinématique si pour les P on met des mj, les m désignant des nombres d'atomes ou de points élémentaires tous égaux dont on supposerait le corps composé; mais équation dont le second membre représente bien ce que l'on appelle la somme des travaux de toutes les *forces* du système; somme dans laquelle les termes relatifs à l'action mutuelle P de deux des points du système se réuniront comme on sait en un seul Pdp, où dp, au lieu de représenter les espaces parcourus par ces deux points, représentera la diminution de leur distance pendant l'instant dt, ou son augmentation, selon que ces points s'attirent ou se repoussent; *ce qu'il fallait démontrer*.

Et l'on sait, du reste, qu'un nombre fort grand de termes du second membre peut être effacé sans erreur sensible lorsqu'on suppose *approximativement* (car cela n'a jamais lieu exactement) que des distances de points n'ont pas varié.

gnés qu'on veut l'un de l'autre, le *travail* accompli ne dépend que des situations initiales et finales des points m; de sorte qu'il est nul si ces points sont revenus aux mêmes endroits, quels que soient les chemins divers qu'ils ont parcourus.

Si cette équation de conservation (a) n'avait point lieu (et c'est par le même raisonnement que se démontre aujourd'hui, comme on sait, le *second principe* de la thermodynamique), nous aurions le pouvoir, en faisant suivre aux points m des cycles divers de chemins convenablement choisis, de créer *perpétuellement*, dans un système, sans moteur étranger (c'est-à-dire sans faire intervenir aucune force extérieure à *centre d'action mobile*), du travail et de la force vive.

L'impossibilité d'une pareille création, posée par Green comme un postulatum, revient bien ainsi au principe connu de Mécanique exprimé par l'équation (a).

En l'invoquant, il a donc pu rationnellement établir, entre les 36 coefficients des formules de tensions (25), les *quinze* égalités qui les réduisent, pour la contexture la plus générale qu'on puisse supposer à la matière à chaque endroit, à *vingt-un* inégaux au plus, qui, comme on verra plus loin, ne sont plus qu'au nombre de *neuf* quand la contexture offre trois plans de symétrie, et, lorsqu'elle est isotrope, au nombre de *deux*, que Clebsch exprime et remplace, comme on a vu, par deux autres nombres, savoir, le module E et le rapport numérique fractionnaire η supposé par lui variable d'une substance isotrope à une autre, isotrope aussi; et qu'on pourrait remplacer plutôt par E et par G, qui est égal à $\frac{E}{2(1+\eta)}$, ce qui rendrait les formules applicables quand il n'y a pas isotropie complète (comme on a dit).

5. *Une réductibilité plus grande, ou à* QUINZE *coefficients, est une conséquence d'actions fonctions des seules distances où elles s'exercent.* — Cauchy et Poisson, dans leurs écrits de 1828, en calculant les six composantes rectangles des tensions dans les corps solides, comme des sommes de composantes d'actions moléculaires mises en jeu par les déplacements relatifs de leurs points et dont chacune a son intensité (note finale du § 11) fonction d'une *seule* distance, qui est celle où elle s'exerce entre deux points, ont trouvé que, lorsque les tensions antérieures aux déplacements sont nulles (ainsi que le suppose Clebsch), les coefficients des six formules comme (25) ne sont qu'au nombre de 15, au lieu de 21, pour la contexture la plus générale; de 6, au lieu de 9, pour la contexture à trois plans de symétrie, et qu'il n'y a, pour la contexture isotrope, que le coefficient *unique* de Navier (celui que Lamé appelle μ et auquel l'autre, qu'il appelle λ, serait égal).

Je renvoie à l'Appendice III de mes notes de 1864, mises aux *Leçons* de Navier (§ 21 des Appendices, p. 557), pour la preuve donnée sans calcul et par un raisonnement que chacun peut refaire, qu'en admettant cette loi des intensités, ou sa conséquence immédiate et simple, qui est qu'une très petite augmentation de la distance quelconque actuelle de deux molécules engendre.

entre elles, une action nouvelle proportionnelle à cette augmentation, l'on a nécessairement, entre les 36 coefficients a.... des formules (25), jusqu'à 21 égalités deux à deux ; car on reconnaît facilement que la composante, suivant la coordonnée x, de l'action engendrée entre deux molécules quelconques par une dilatation ∂_y, doit avoir la même intensité qu'aurait la composante, suivant la coordonnée y, de l'action engendrée entre les mêmes molécules par un glissement g_{xy} qui serait égal à ∂_y ; et l'on reconnaît aussi que la composante suivant x de l'action engendrée entre elles par un glissement g_{yz}, doit avoir la même intensité qu'aurait la composante suivant x de l'action produite par un glissement g_{xz} qui serait égal à g_{yz}. D'où il résulte : 1° que sur une petite face intérieure quelconque, les deux composantes de tension, l'une suivant les x, supposée engendrée seulement par une dilatation ∂_y, et l'autre suivant les y, supposée engendrée seulement par un glissement g_{xy}, sont un même multiple de ces deux déformations génératrices ∂_y et g_{xy} respectivement; 2° que deux composantes de tension, toujours suivant les x, et suivant les y, si elles sont engendrées, la première par g_{yz}, la seconde par g_{xz}, sont aussi un même multiple de ces deux glissements.

Cela entraîne entre les coefficients dont nous nous occupons non seulement les 15 égalités deux à deux démontrées autrement par Green et que Clebsch résume par $a_{ij,kl} = a_{kl,ij}$, mais encore les 6 égalités qu'exprime le symbole

$$a_{ij,kl} = a_{ik,jl}$$

où un seul des deux premiers indices permute avec un des deux derniers ; en sorte qu'au total, et conformément à ce qu'a trouvé Cauchy, on ne change pas la valeur des coefficients des formules (25) en permutant leurs quatre indices à volonté ; et ces 36 coefficients se réduisent bien à 36 — 15 — 6 = 15 pouvant être inégaux.

Les adversaires mêmes de cette deuxième et plus forte réductibilité reconnaissent qu'elle est bien une conséquence absolument obligée de ce qu'ils appellent le *système de Boscovich ;* car les auteurs anglais surtout qualifient du nom de ce célèbre jésuite, peu lu quoique éminent, la loi des actions fonctions des seules distances où elles s'exercent, bien que cette loi ait été, comme nous l'avons dit à la note du § 11, adoptée par tout le monde jusqu'au jour où Green l'a niée comme lui paraissant trop restrictive.

4. *Cette réductibilité plus grande est expérimentalement prouvée pour les corps élastiques durs.* — Examinons donc si nous devons adopter la réduction, *à quinze*, du nombre des coefficients, au moins pour les vrais solides élastiques tels que les métaux, les pierres et les bois durs, ou bien la rejeter, et rester, à leur égard, dans l'indétermination où nous laisse la négation de Green.

Deux conséquences de son adoption sont [voyez ci-après, n° 14 de la pré-

sente note, formules (n)], $\eta = \frac{1}{4}$, pour le rapport, trouvé par Poisson, des contractions aux extensions simultanées des prismes dont les faces latérales sont libres, et $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$, pour le rapport du coefficient d'élasticité de glissement (ou de torsion) à celui d'extension des mêmes prismes. Or, on a trouvé pour le fer, le cuivre, le verre, en un mot pour les corps solides élastiques à grain fin, lorsque leur contexture est sensiblement homogène et isotrope, à très peu près, et tout au moins moyennement, ces deux nombres-là, comme l'ont prouvé les expériences ou directes, ou comparées, de Cagnard de Latour, de Coulomb, de Duleau, de M. Kirchhoff et même celles de Wertheim bien interprétées.

Clapeyron lui-même, tout adversaire qu'il est du principe de la réductibilité dont nous parlons, a reconnu que l'expérience donnait bien ces deux rapports numériques $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{5}$ pour le fer, et qu'il convenait de les adopter (*Comptes rendus*, 1er février 1858, t. XLVI, p. 211 et 212). Et c'est ce qui a été établi récemment par des expériences bien plus délicates dues à M. Cornu (*Méthode optique pour l'étude des déformations de la surface des corps élastiques*, aux *Comptes rendus*, 2 août 1869, t. LXIX, p. 333), qui a réfuté, en les expliquant par des défauts d'isotropie et d'homogénéité, les conséquences contraires que Wertheim avait cru pouvoir tirer de plusieurs de ses expériences.

Je pourrais m'en tenir là, en renvoyant du reste à la discussion longue et détaillée qui occupe l'appendice V du livre de 1864 déjà cité; et en rappelant que Green, lorsqu'il a *élargi* la loi des actions moléculaires, c'est-à-dire nié sa détermination naturelle quant aux intensités et *même aux directions* (il a été jusque-là) s'était proposé deux buts que son génie n'a nullement atteints, et pour bonnes raisons ne pouvait atteindre : l'un, de concilier la biréfringence avec l'*exacte* transversalité des vibrations lumineuses *jusque dans l'intérieur des cristaux!* l'autre, de supprimer ou de réduire presque à rien le mélange embarrassant des vibrations *longitudinales* non lumineuses de l'éther. Je pourrais ajouter qu'on peut refuser aussi à ses deux éminents disciples, MM. Stokes et Maxwell, d'avoir réussi en employant le même expédient dans la vue de pouvoir étendre les formules de composantes de tension à ces matières mixtes provenant de liquides coagulés plutôt que solidifiés, qui résistent à peine aux déformations, et très énergiquement aux diminutions de volume, comme le caoutchouc, les gelées, l'empois, le gluten, les pâtes à base de gomme, le caséum, le blanc d'œuf durci, etc. En effet, diverses expériences ont prouvé que le caoutchouc n'est, comme les gelées, qu'un réseau vésiculeux dont les mailles ou cellules sont remplies d'une matière liquide : or, toute déformation perceptible d'éléments liquides produit des changements de distances moléculaires qui excèdent beaucoup les limites dans lesquelles les actions développées leur restent proportionnelles et ne cessent pas d'avoir les mêmes intensités pour les diminutions que pour les

augmentations de ces distances (et c'est même ce que Clebsch a reconnu judicieusement dans un passage du § 1, page 3, où il exclut le caoutchouc de toute applicabilité des formules qu'il donne). On ne peut donc, de ce que présentent ces composés spongieux lorsqu'on les déforme ou comprime, rien inférer de relatif à la loi des actions qui sont en jeu là où la proportionnalité dont il est question se conserve, comme par exemple dans les métaux.

5. *Conséquences analytiques générales du principe de conservation des forces vives, supposé admis* a priori. — Mais allons plus loin. Voyons ce qu'on tire de l'équation (*a*) $\Sigma\, m\,\frac{V^2}{2} + \Psi\,(x, y, z, x' \ldots) = C$, si on y laisse indéterminée la forme de la fonction Ψ, comme paraît le vouloir Green.

Elle peut s'écrire tout aussi bien, $r, r', r'' \ldots$ étant les distances des molécules du système tant entre elles qu'avec les centres d'action *fixes* extérieurs, s'il y en a :

$$(b) \qquad \sum m\,\frac{V^2}{2} + \Psi_1\left(r, r', r'' \ldots\right) = C$$

où Ψ_1 est une nouvelle fonction dont il importe peu que les variables $r, r', r'' \ldots$ soient ou ne soient pas, en partie, dépendantes les unes des autres.

Différentions ses deux membres par rapport au temps après avoir remplacé le carré V^2 de la vitesse du point dont les coordonnées sont x, y, z, par

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

et ensuite, dans le second membre différentié, qui sera une somme d'autant de termes $\frac{d\Psi_1}{dr}\,\frac{dr}{dt}$ qu'il y a de distances mutuelles r, entre deux points m, m' quelconques, ayant des coordonnées x, y, z, et x', y', z', remplaçons $\frac{dr}{dt}$ par la dérivée de r tirée de la différentiation de

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

en remarquant que les quotients de $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, par r sont les cosinus des angles faits avec les axes des x, y, z par la distance $mm' = r$ à laquelle le point m' agit sur le point m. Nous aurons

$$(c) \qquad \begin{aligned} &\sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \\ &= \sum \frac{d\Psi_1}{dr}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)\cos(r,x) + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)\cos(r,y) + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)\cos(r,z)\right]; \end{aligned}$$

le $\sum$ du premier membre s'étendant à tous les points, et

le $\sum$ du second, à toutes leurs distances r deux à deux.

Quelle que soit la forme de la fonction Ψ_1, cette égalité doit s'appliquer à toutes les valeurs possibles des vitesses $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx'}{dt} \dots\dots$ dont on sait, d'après les faits de mouvement relatif, que les accélérations $\frac{d^2x}{dt^2}$ sont indépendantes. On peut, par exemple, supposer ces vitesses toutes nulles, excepté celle $\frac{dx}{dt}$; ou, en tout cas, vu cette indépendance, on peut égaler ce qui, dans les deux membres, affecte chacune d'elles.

Il en résultera, pour un seul point quelconque m, les trois égalités suivantes où les Σ désignent maintenant des sommes relatives aux diverses distances r, entre ce point m et les autres points m', m''.... du système, ainsi qu'aux points extérieurs ou centres d'action supposés fixes, puisque ce n'est plus que par rapport à ces distances particulières que les $\frac{d\Psi_1}{dr}$ représentent les dérivées de la fonction Ψ_1 de toutes les distances mutuelles quelconques des divers points du système :

$$(d) \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \frac{d\Psi_1}{dr}\cos(r,x), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma \frac{d\Psi_1}{dr}\cos(r,y), \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma \frac{d\Psi_1}{dr}\cos(r,z).$$

Ces équations montrent que la force totale agissant sur chaque point matériel m, ou que le produit de la masse de ce point par son accélération, est une résultante géométrique des dérivées ou quotients différentiels $\frac{d\Psi_1}{dr}$ de la fonction dite *potentielle*, ou énergie en puissance $\Psi_1(r, r', r''....)$, par rapport aux diverses distances r du même point m aux autres points, portées sur les lignes de jonction qui mesurent ces distances(*).

6. *Suite. Particularisation, ou décomposition, jusqu'ici admise, de la fonction potentielle* Ψ_1. — Si $\Psi_1(r, r'\, r''....)$ est une simple somme $f(r) + f_1(r')$ $f_{11}(r'') + \dots\dots$ de fonctions de chacune des distances r, r', r''... en particulier, on a

$$(e) \qquad \frac{d\Psi_1}{dr} = f'(r), \quad \frac{d\Psi_1}{dr'} = f_1'(r'), \quad \frac{d\Psi_1}{dr''} = f_{11}'(r''), \ \dots\dots;$$

et, d'après les égalités (d), la force totale sollicitant chaque point m est une résultante d'actions dirigées suivant r, r' r''..... ayant des intensités (e) fonctions de ces distances, ou obéissant précisément à cette loi si naturelle qui était, avons-nous dit, acceptée avant que George Green l'eût rejetée comme ne lui donnant pas les explications qu'il désirait présenter. Alors,

(*) C'est dans un mémoire *Sur les principes de la Mécanique*, lu en 1872 par M. Boussinesq, à l'Académie de Montpellier, et imprimé la même année à Paris au *Journal de mathématiques* de M. Liouville, que j'ai puisé cette remarquable déduction des équations (d) relatives à chaque point, de celles (b) relatives à tous.

Ψ_1 qui désigne le travail total opéré entre deux situations des points du système, ou entre deux valeurs de chacune de leurs distances, est une somme de travaux $\int f'(r)\,dr$, $\int f'_1(r')\,dr'$...... de *chacune* de ces forces en particulier.

C'est, comme on sait, seulement aux forces qui suivent cette loi que l'on reconnaît, dans les traités de mécanique, la propriété de donner un travail qui soit à chaque instant une *différentielle exacte* $d\Psi_1$; et c'est seulement pour elles que l'on démontre, dans ces traités, l'équation (a) ou (b) de conservation des forces vives, en partant de la notion de la *composition* géométrique des forces motrices sur chaque point.

7. *Conséquences singulières du rejet de cette décomposition de* Ψ_1 *en fonctions* f *de chacune des distances* r. — La conséquence immédiate de ce rejet est qu'apparemment il y a dans la nature d'autres forces que celles dont les intensités sont fonctions *d'une seule distance*, savoir la distance $r = mm'$ où chacune agit entre deux points m et m'.

Quelles lois devront suivre ces forces-là pour satisfaire toujours au principe (a) ou (b) de la conservation des *forces vives*, supposé admis comme fondé simplement (n°s 1 et 2) sur le sentiment de l'impossibilité du mouvement perpétuel?

Les égalités (d), dans les seconds membres desquels entrent les dérivées $\frac{d\Psi_1}{dr}, \frac{d\Psi_1}{dr'}, \ldots$ de Ψ_1, supposé contenir *toutes les distances*, prouvent que si ces forces plus générales existent, chacune d'elles (comme nous avons déjà dit à la note du § 11) aura son intensité fonction non seulement de la distance mm' des deux molécules m, m' entre lesquelles elle s'exerce, mais encore de leurs distances mm'', mm'''..... et $m'm''$, $m'm'''$.... à d'autres molécules m'', m''' du même système, *et même des distances* $m''m'''$..... *de celles-ci entre elles.*

Or, il résultera d'une pareille loi générale, si on l'admet, l'impossibilité que le travail $\int R\,dr$ de l'action mutuelle R entre m et m' soit toujours le même, au signe près, lorsque ces deux molécules suivent chacune un chemin quelconque que lorsqu'elles retournent à leur situation primitive par un chemin différent. En effet, à un instant $t = t_2$ de la période de retour, où la distance mm' aura repris la même valeur r qu'elle avait eue à un instant $t = t_1$, arbitrairement choisi, de la période d'aller, les molécules m, m' se trouveront à d'autres distances des molécules environnantes m'', m''',..... m^{IV}, m^{V} .. .... qu'à cet instant antérieur $t = t_1$. L'intensité $R = R_2$, à l'instant $t = t_2$ de l'action mutuelle R de m, m', si elle dépend de toutes ces distances-là, sera donc différente de l'intensité $R = R_1$ qu'avait la même action à l'instant $t = t_1$. Le travail $R_1 dr$, pour une augmentation dr de la distance à cet instant $t = t_1$ de l'aller, n'aura donc pas été la même, au signe près, que le travail $- R_2 dr$ pour une diminution dr à l'instant $t = t_2$ du retour, où la distance r est la même. Le travail total de l'action des deux molécules m, m' ne sera donc point nul lorsque le cycle de leur parcours

se sera fermé; ou s'il l'est, par exception, pour un cycle, il ne le sera pas pour les autres cycles possibles.

Il faudra ainsi, pour que le théorème de conservation exprimé par $\Sigma m \frac{V^2}{2} + \Psi_1 =$ *constante* s'observe dans un système de molécules m, ou pour que $\Sigma m \frac{V^2}{2}$ redevienne le même quand ces molécules retournent aux situations qu'elles ont précédemment occupées, ou, en d'autres termes, « pour que le mouvement perpétuel soit irréalisable », il faudra, dis-je, que le travail positif qui aura été créé dans un cycle par les actions mutuelles d'une partie des couples de molécules m, m', soit justement égal au travail négatif créé par les actions mutuelles des autres couples de molécules. Or, quelle que soit la loi imaginable à laquelle on soumette les intensités des actions entre deux molécules, et leur mode de dépendance de la *simple présence* d'autres molécules, si une juste compensation, comme celle dont nous parlons, s'observe ainsi entre deux moitiés de certains systèmes parcourant certains cycles, elle cessera de s'observer en ajoutant à ces systèmes d'autres systèmes pouvant être pris infiniment variés, et en ajoutant aux parcours d'autres parcours quelconques arbitrairement choisis.

La nullité du travail total produit par un cycle ne peut donc être générale qu'autant qu'elle a lieu *pour chaque action individuelle;* ce qui oblige à admettre que la force que nous avons appelée R soit fonction *de la seule distance* que nous avons appelée r.

8. *Suite des conséquences. Restriction nécessaire, de toute manière, de la généralité de la fonction potentielle* Ψ_1 *des distances mutuelles des points matériels.* — Mais il y a plus. La loi exprimée par (b), $\Sigma m \frac{V^2}{2} + \Psi_1(r, r', r'' \ldots .) = C$, à laquelle on soumet tous les systèmes, doit s'appliquer à l'univers entiere ainsi que sa conséquence (d) qui est que l'action de deux molécules m, m', à une distance $mm' = r$, a pour intensité $\frac{d\Psi_1}{dr}$, qui est une fonction de toutes les distances r, r, $r'' \ldots .$. L'intensité de l'action de deux molécules appartenant à un élément de notre planète, par exemple, dépend donc de leurs distances non seulement à celles du même élément, mais encore à celles des autres éléments, et même de toutes les distances deux à deux, grandes ou petites, des molécules appartenant à chaque élément de chaque astre jusqu'aux extrémités du monde.

L'expérience prouve qu'il n'en est point ainsi : elle montre même que la manière dont agissent entre elles les molécules de la plus petite portion mesurable du monde terrestre, est sensiblement indépendante de l'état où peut se trouver toute autre portion qui en est seulement à une distance visible.

Il est donc nécessaire de restreindre la généralité de la fonction Ψ_1, et de

dire que sa forme doit être telle que la grandeur de $\frac{d\Psi_1}{dr}$ ne dépende, au moins sensiblement, que des distances des molécules faisant partie du même système partiel, ou du même élément visible, que m, m', ou ne dépende que de $mm' = r$ et des distances des molécules *très proches* soit de m, soit de m', en excluant les autres distances.

Cette condition d'exclusion peut être facilement remplie en ce qui regarde les distances *sensibles*, telles que sont celles des molécules de l'élément ou du système rétréci comprenant m et m', aux molécules *d'autres* éléments ou systèmes : il n'y a pour cela qu'à engager r, r', r'',... dans Ψ_1, pour leurs inverses $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$.... ou pour des puissances positives de ces inverses. Mais cette ressource d'exclusion sensible est impuissante à l'égard des distances mutuelles de molécules appartenant en particulier à chacun de ces systèmes ou éléments non proches de celui dont on s'occupe. Les distances mutuelles insensibles entre les molécules composant même chaque étoile auront une influence du même ordre sur la grandeur de $\frac{d\Psi_1}{dr}$, ou sur l'intensité de l'action mutuelle des deux molécules m, m' d'un corps terrestre que les petites distances des molécules qui les avoisinent dans le même corps, tant qu'on n'aura pas imposé à la forme de la fonction $\Psi_1(r, r', r''....)$ une restriction ou particularisation plus grande.

9. *Cette restriction ou particularisation ne peut être que la décomposition de Ψ_1 en fonctions de chaque distance en particulier; d'où la dépendance nécessaire de chaque force d'une seule distance. Pensée probable de Green.* — On aura beau chercher cette forme dont nous parlons, cette particularisation de Ψ_1 devant s'appliquer, non pas à un système, à un groupe matériel, mais à tous les systèmes, à tous les groupes qu'on peut détacher de l'ensemble universel, et devant être telle que tout ce qui se passe dans chaque groupe et qui s'y trouve mesuré par un $\frac{d\Psi_1}{dr}$, ait la même valeur, ou exactement, ou sensiblement, que si les autres groupes n'existaient pas, j'affirme hardiment, et tout le monde, j'en suis convaincu, pensera comme moi, qu'il faudra absolument adopter la forme ou la particularisation indiquée ci-dessus :

$$(f) \qquad \Psi_1(r, r', r'', \ldots\ldots) = \mathrm{f}(r) + \mathrm{f}_{\prime}(r') + \mathrm{f}_{\prime\prime}(r'') + \ldots\ldots$$

comme étant la seule qui puisse, dans $\frac{d\Psi_1}{dr}$, et conformément à tous les faits, rendre insensible l'influence, s'il y en avait une, des petites distances $r^{(i)}$ entre molécules $m^{(i)}$, $m^{(i)}$, éloignées des deux m, m', qui ont entre elles la distance r, ou qui puisse les empêcher d'influer, au même degré que les distances entre molécules proches l'une et l'autre de m, m', sur la grandeur de $\frac{d\Psi_1}{dr}$.

Or cette forme (f) ne se borne pas à atténuer, elle annule complètement ces influences exotiques auxquelles, naguère, on ne pensait seulement pas. Elle annule en même temps, forcément et tout aussi bien, les influences de molécules très proches de m et de m', sur la manière d'agir mutuelle de m et de m', tout en laissant à ces autres molécules *leurs actions propres* (ce qui est bien différent) dans le système dont elles font partie.

Elle fait revenir à l'adoption, comme voulue ainsi par l'expérience même, de la loi des actions *fonctions des seules distances où elles s'exercent*, et non des autres distances; loi que le simple bon sens, aidé d'une observation générale des faits, a fait accepter pendant plus d'un siècle et demi. Et je suis convaincu que Green lui-même y croyait sans s'en rendre compte. Je ne peux, en effet, interpréter d'une autre manière cet instinct de physicien et de géomètre, ce sentiment « que les forces, dans l'univers, sont disposées *de manière à faire, du mouvement perpétuel, une naturelle impossibilité* ». Green, sans aucun doute, refusait ainsi, *à chaque action moléculaire mutuelle en particulier*, la possibilité contraire, à savoir celle de créer un travail $\int R dr$ par le parcours de cycles fermés; or cela revient bien, comme nous avons vu tout à l'heure, à penser que l'action R de deux molécules m, m' n'est fonction que de leur seule distance mutuelle r, et non des autres distances, qui ne sont point les mêmes (avons-nous observé) pendant la période de leur rapprochement que pendant la période de leur éloignement des situations initiales où elles sont finalement revenues.

10. *La conclusion est la même en n'envisageant le mouvement que d'une manière cinématique ou en ne considérant que ses lois et non ses causes.* — On ne se soustraira pas à la conclusion tirée des remarques qui précèdent en écartant l'idée de *force*, d'*action* moléculaire, pour n'envisager la science du mouvement qu'au point de vue cinématique, où elle tend, avec raison, de plus en plus à se placer, et où l'on ne considère, au lieu des *causes* dont la nature nous est inconnue, que les *lois* des changements des distances et des temps où ils s'opèrent, ainsi que le conseillait sagement, il y a un siècle, l'Écossais Th. Reid (*Œuv. phil.* trad. par Jouffroy, t. V, au ch. VI de l'*Essai sur la puissance active*), qui était loin cependant de rejeter le principe de causalité, ni, comme les occasionalistes exclusifs, l'existence de causes secondes pouvant avoir été déléguées par la cause première et créatrice. On peut bien, à ce point de vue, embrasser et soutenir l'opinion que la loi décrétée pour régir les mouvements a dû porter non sur ce qu'on appelle les forces, mais sur ces quantités cinématiques $\Sigma m \frac{V^2}{2}$ et $\Psi_1 (r, r', r'' ....)$ astreintes à échanger entre elles deux leurs augmentations et diminutions, quantités qu'on appelle l'énergie *vive* ou *actuelle* et l'énergie *potentielle*, sans y attacher de signification métaphysique. Mais l'équation (b) qui soumet leur somme $\Sigma m \frac{V^2}{2} + \Psi_1$ à rester constante, jointe à ce que l'expérience des

mouvements relatifs apprend de l'indépendance où les accélérations sont des vitesses, a toujours pour conséquence analytique les équations (d) qui astreignent d'autres *produits cinématiques*, savoir ceux de la masse de chaque point par son accélération, à être décomposables polygonalement en quantités $\frac{d\varphi_1}{dr}$, portées sur les distances r tirées de ce point aux autres. Tout ce que nous avons dit ci-dessus pour les actions moléculaires s'applique donc, en ne changeant que les mots, aux composantes géométriques de produits de masses et d'accélérations, qui interviennent forcément dans les solutions de tous les problèmes, et qu'on regarde comme mesurant des actions; et la conclusion est la même.

11. *Inconvénient de la latitude qu'on se procure en élargissant la loi des actions, ou en niant sa détermination.* — Aussi, et sans nous arrêter à ce qu'on n'a pas encore réussi à ranger sous la loi d'actions fonctions de chaque distance en particulier les faits relatifs aux gaz, ni celui de la nullité apparente des vibrations longitudinales du fluide éthéré, comme on est parvenu à lui soumettre les faits des solides élastiques durs, nous regarderons cette loi simple comme régissant les actions mutuelles entre les atomes ou points matériels qui sont regardés comme les derniers éléments de tous les corps.

Adopter une autre loi dite *plus large* et qui n'est que *moins déterminée*, ou partiellement *négatrice*, ne serait nullement, quelle que soit l'apparence, un parti de prudente réserve. Ce serait, voilà tout, un expédient commode, fournissant, dans certaines limites, des explications à volonté, mais explications fallacieuses, qui en mettant à l'aise, en procurant à l'esprit un repos trompeur, ajournent indéfiniment la recherche et la découverte des explications vraies. Cela peut même induire dans des erreurs pratiques : car c'est ainsi, par exemple, que l'adoption, par feu Wertheim, de certaines formules d'isotropie à deux coefficients, qui satisfaisaient à quelques-unes de ses expériences, l'a empêché d'apercevoir, dans ses matières, une hétérotropie dont les vraies formules sont autres, comme on va voir aux n°s 15 à 16.

12. *Distinction entre les actions des atomes et celles des molécules.* ***Distinction entre les formules qu'on peut employer analytiquement et les formules pratiques.*** — Je ne me refuse pas pourtant à reconnaître que les molécules intégrantes dont les arrangements divers composent la contexture des solides, et dont les petits changements de distance produisent les déformations perceptibles appelées ∂, g ne sont pas les *atomes* constituants de la matière, mais en sont des groupes inconnus. Je reconnais en conséquence, tout en pensant que les actions entre atomes sont régies par la loi des intensités fonctions des seules distances où elles s'exercent, qu'il n'est pas bien certain que les actions *résultantes*, ou entre *molécules*, doivent suivre tout à fait la même loi vis-à-vis des distances de leurs centres de gravité. On peut considérer aussi que les groupes, en changeant de distances, peuvent changer d'orientation.

Dailleurs, la température des corps, que les auteurs de théories de l'élas-

ticité omettent de prendre en considération, n'est point le *zéro absolu;* les atomes de chaque groupe sont donc animés de vibrations qui en y joignant peut-être l'influence inconnue de l'éther interposé, doivent compliquer la composition des deux sortes de moyennes constituant, d'une part les actions par unité de masse, et, de l'autre, les distances deux à deux des molécules intégrantes. Et puis, si des métaux on passe aux bois, dont les tranches minces, vues au microscope, offrent une multitude de pores, on peut se dire que les actions moyennes entre leurs groupes de molécules intégrantes peuvent offrir des complications d'autres espèces. Il n'est pas impossible que ces diverses circonstances changent les rapports mutuels des coefficients $a_{xx\,yy}$..... $a_{xy\,xy}$..... des formules (23) des composantes de tensions, au point de rendre un peu inégaux ceux qui seraient tout à fait égaux pour un composé de simples atomes ou points matériels non vibrants, disséminés sans se grouper en molécules.

Mais si les températures restent éloignées de celles qui, par de violentes vibrations atomiques, produisent un commencement occulte de participation à l'état fluide ou à l'état plastique, il résulte des propriétés compensatrices connues des *grands nombres*, que les moyennes d'actions, et les distances moyennes, doivent, dans leurs relations les unes aux autres, obéir à une loi bien peu différente de celle qui régit les relations des actions et des distances *individuelles*. Les inégalités inconnues de coefficients dont nous parlons ne sauraient donc être grandes, et, vu ce que l'expérience a appris (n° 4) pour les métaux et le verre, le mieux sera de ne point y avoir égard dans la pratique, même pour d'autres matériaux, tout en tenant fortement compte de ce qui vient de leur hétérotropie et de leur hétérogénéité.

Mais, comme les formules à 21 coefficients de Green, et celles qu'on en dérive pour les contextures particulières, ne rendent pas l'analyse sensiblement plus compliquée que les formules à 15 coefficients de Cauchy, et vu la controverse actuelle où la majorité des avis est contraire au nôtre, nous nous bornerons à indiquer, *par les mêmes lettres*, avec des *accents distinctifs*, les coefficients que Clebsch regarde, avec Green, comme généralement inégaux, et que nous conseillons de faire égaux pour *les applications* aux matériaux de construction dans la pratique.

15. *Formules des tensions pour les cas principaux de contexture.* — Nous prendrons donc, lorsque la contexture de la matière est symétrique par rapport aux faces parallèles à l'un des trois plans coordonnés rectangles yz, zx, xy, se croisant en un point quelconque x,y,z, le plan xy par exemple, qui est perpendiculaire aux z, en sorte que les formules expriment les six composantes de tension avec les mêmes coefficients ou paramètres lorsqu'on change l'axe des z en son prolongement, ou

$$t_{yz} \text{ en } -t_{yz}, \quad t_{zx} \text{ en } -t_{zx}, \quad g_{yz} \text{ en } -g_{yz}, \quad g_{zx} \text{ en } -g_{zx}$$

et t_{zz} restant le même ainsi que ∂_z dont l'indice compte double :

$$(f \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} t_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z + hg_{zy}; & t_{yz} = dg_{yz} + l'g_{zx} \\ t_{yy} = f'\partial_x + b\partial_x + d'\partial_z + kg_{xy}; & t_{zx} = eg_{zx} + l'g_{yz} \\ t_{zz} = e'\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z + lg_{xy}; & t_{xy} = fg_{xy} + h\partial_x + k\partial_y + l\partial_z. \end{array} \right.$$

S'il y a, en outre, un plan de symétrie perpendiculaire aux x, en sorte que les formules restent les mêmes, ou affectées des mêmes coefficients quand on change t_{zx}, t_{xy}, g_{zx}, g_{xy} en $-t_{zx}$, $-t_{xy}$, $-g_{zx}$, $-g_{xy}$, il y aura, par cela seul, un troisième plan de symétrie, perpendiculaire aux y, car on aura nécessairement h, k, l, l' nuls, et les formules suivantes qui montrent que les tensions normales ne produisent alors que des dilatations, et les tensions tangentielles que des glissements ; formules dont les *neuf* coefficients se réduisent à *six* si l'on fait

$$d' = d, \qquad e' = e, \qquad f' = f,$$

conformément à notre opinion motivée aux numéros précédents :

$$(g) \quad \left\{ \begin{array}{ll} t_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, & t_{yz} = dg_{yz}, \\ t_{yy} = f'\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z, & t_{zx} = eg_{zx}, \\ t_{zz} = e'\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z, & t_{xy} = fg_{xy}, \end{array} \right.$$

où, d'après les dénominations de Rankine (ci-dessus, avant-dernière note du § 11), a, b, c, sont les *élasticités directes*, d, e, f, les *rigidités*, ou *élasticités tangentielles*, et d', e', f', les *élasticités latérales*.

S'il y a un axe de symétrie de contexture, ou d'isotropie partielle, prenons-le parallèle à l'axe des z, qui est constamment, dans le livre de Clebsch, l'axe du sens longitudinal, ou parallèle aux arêtes des primes qu'il considère. Nous aurons non seulement

$$a = b, \qquad d = e \qquad d' = e',$$

mais encore, entre a, f, f', une relation nécessaire

$$a = 2f + f',$$

pour que les expressions des tensions restent les mêmes en fonction des dilatations et glissements ∂, g, quand on fait tourner les axes des x, y, d'un petit angle autour de celui des z resté immobile. On s'en assure d'une manière facile en supposant, pour simplifier, qu'il n'y ait, par exemple, que la seule déformation ∂_y ; car alors on a $t_{xx} = f'\partial_y$, $t_{yy} = a\partial_y$, $t_{xy} = 0$, en sorte que si x', y' sont les nouveaux axes faisant un petit angle ε avec ceux x, y, il est facile de reconnaître qu'on a

$t_{x'y'} = (t_{yy} - t_{xx})\,\varepsilon = (a - f')\,\varepsilon\,\partial_y$, et $g_{x'y'} = 2\,\varepsilon\,\partial_y$ (*). D'où l'on voit que la condition pour que $t_{x'y'}$ soit un même multiple de $g_{x'y'}$ que t_{xy} l'est de g_{xy}, aura pour expression

$$a - f' = 2f, \qquad \text{ou} \qquad a = 2f + f'.$$

Les tensions, dans ce cas de symétrie autour de parallèles aux z ou d'isotropie seulement latérale, sont, ainsi,

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} t_{xx} &= (2f + f')\partial_x + f'\partial_y + d'\partial_z, & t_{yz} &= dg_{yz}, \\ t_{yy} &= f'\partial_x + (2f + f')\partial_y + d'\partial_z, & t_{zx} &= dg_{zx}, \\ t_{zz} &= d'\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z, & t_{xy} &= fg_{xy}, \end{aligned} \right.$$

ce qui fait cinq coefficients c, d, f, d′, f′, se réduisant à trois, c, d, f, si, comme je pense qu'on doit le faire dans la pratique (nos 3 à 12), on prend $d' = d$, $f' = f$.

Enfin, si la contexture de la matière offre un second *axe d'isotropie partielle* ou de symétrie, parallèle soit aux x soit aux y, on prouve facilement qu'il y en a alors dans toutes les directions possibles ; on a dans ce cas

$$d = e = f, \qquad d' = e' = f', \qquad a = b = c = 2e + e';$$

(*) Pour le démontrer, concevons, M étant le point (x, y, z) du corps élastique, un petit coin ou prisme infinitésimal de sa matière ayant ses arêtes $= 1$ parallèles aux z, et, pour base, un triangle rectangle Mxx' qui a son côté $Mx = 1$ parallèle aux x et son côté $xx' = \varepsilon$ parallèle aux y, en sorte que l'angle $xMx' = \varepsilon$, et que la face-hypothénuse, se projetant sur la base en Mx', aura une superficie $= 1$ comme la face se projetant en Mx, puisque ε est infiniment petit. L'équilibre de ce prisme exige que la tension $t_{y'x'}$ s'exerçant à travers la face Mx' dans la direction tangentielle x' soit égale à la somme des tensions s'exerçant à travers les deux autres faces Mx, xx' décomposées dans le même sens Mx'. Comme $t_{xy} = t_{yx}$ est nul, ces deux dernières tensions se réduisent à $t_{yy}\cos(y, x')$ et à $\varepsilon t_{xx}\cos(x, x')$ respectivement, celle-ci étant prise avec le signe — pour représenter une traction exercée de l'intérieur du triangle. Or, $\cos(y, x') = \varepsilon$, et $\cos(x, x') = 1$ en négligeant ε^2. Ainsi on a bien $t_{x'y'} = t_{yy}\,\varepsilon - t_{xx}\,\varepsilon$.

En second lieu, pour avoir la valeur du glissement $g_{x'y'}$ engendré par la dilatation ∂_y, ou pour évaluer de combien elle fait rétrécir l'angle droit $x'My'$, remarquons que, M étant considéré comme immobile, ainsi que Mx, cette dilatation de toute ligne matérielle parallèle aux y fera cheminer x' de $x'x'' = xx'\,\partial_y = \varepsilon\,\partial_y$, mesure d'un premier rétrécissement $x'Mx''$ de l'angle $x'My'$; et, si $My' = 1$, elle fera cheminer y', aussi parallèlement à My, de $y'y'' = \partial_y$, qui, projeté sur une perpendiculaire $y'y$ à My', donnera un second rétrécissement $\partial_y \times \varepsilon$. La somme de ces deux petites diminutions de l'angle droit $x'My'$, devenu ainsi $x''My''$, sera le glissement $g_{x'y'}$. Donc $g_{x'y'} = 2\,\varepsilon\,\partial_y$, ce qu'il fallait démontrer.

Ces deux résultats sont des cas particuliers de formules sextinômes de changement de plans de pression et de directions de déformations que nous donnerons dans une sous-note ultérieure.

et la contexture est tout à fait isotrope. Nous avons alors les formules

$$(i)\quad \left\{\begin{array}{ll} t_{xx}=(2e+e')\partial_x+e'\partial_y+e'\partial_z, & t_{yz}=eg_{yz}, \\ t_{yy}=e'\partial_x+(2e+e')\partial_y+e'\partial_z, & t_{zx}=eg_{zx}, \\ t_{zz}=e'\partial_x+e'\partial_y+(2e+e')\partial_z, & t_{xy}=eg_{xy}; \end{array}\right.$$

formules qui sont celles de Lamé (4e et 5e de ses leçons) lorsqu'on y remplace e′ par λ; e par μ; $\partial_x+\partial_y+\partial_z$ par θ; et qui, en faisant e′ = e, comme je pense que cela doit être tout au moins pour les solides durs quand ils sont isotropes, donnent les formules de Cauchy, de Poisson, qui sont aussi celles du mémoire de 1828 de Lamé et Clapeyron, et qui se trouvaient, déjà, implicitement exprimées dans les *équations de conditions-limites* données en 1821 par Navier.

Ce sont aussi celles de M. Kirchhoff (Vorlesung 11, § 7, 1877), si l'on fait $e'=2ke$ (ou $\lambda=2k\mu$) d'où $t_{xx}=2\mu[\partial_x+k(\partial_x+\partial_y+\partial_z)],\ldots t_{yz}=\mu g_{yz},\ldots$ en sorte que k n'est qu'un nombre, ce qui offre quelque avantage.

14. *Coefficients ou modules d'extension* E, *ainsi que de glissement ou torsion* G; *et rapports* η *des contractions latérales aux extensions longitudinales dans les divers cas de contexture des formules* (g), (h), (i) *des tensions. Coefficients* a... f′ *de ces formules exprimés en* E, G, η.....

1° *Isotropie complète.*

Soit, comme ci-dessus (§§ 2, 3, 4.....) un parallélépipède rectangle qui, ayant ses côtés suivant les x, y, z, est supposé tiré uniformément sur deux de ses faces opposées, prises pour ses *bases*, tandis que les quatre autres faces, dites latérales, n'éprouvent aucune action.

En considérant d'abord le cas de l'*isotropie complète, ou des formules* (i), et en prenant, pour les faces tirées, ou bases, celles qui sont perpendiculaires aux z, on obtient

$$\text{vu } t_{xx}=0,\qquad t_{yy}=0,$$

$$(j)\quad \left\{\begin{array}{l} t_{zz}=E\partial_z \\ -\partial_x=-\partial_y=\eta\partial_z \end{array}\right\}\text{ si l'on fait }\left\{\begin{array}{l} \eta=\dfrac{e'}{2(e+e')} \\ E=e\left(2+\dfrac{e'}{e+e'}\right). \end{array}\right.$$

On en tire, si l'on considère que le coefficient e des trois formules (i) de droite a la même signification que G du § 3, coefficient d'élasticité de glissement ou de torsion,

$$(k)\quad \left\{\begin{array}{ll} e=G=\dfrac{E}{2(1+\eta)}\ (\text{comme à ce § 3}); & \eta=\dfrac{E}{2G}-1 \\ e'=\dfrac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)}=G\dfrac{E-2G}{3G-E}. & \end{array}\right.$$

Le coefficient ou module E est toujours facile à mesurer au moyen d'expériences de traction, ou mieux de flexion, comme on verra. La fraction η, rapport d'une contraction linéaire latérale à une dilatation longitudinale

très petites l'une et l'autre, est d'un mesurage fort difficile et sujet à erreur, à moins d'employer les procédés délicats de MM. Fizeau et Cornu. Mais le coefficient G est facile à mesurer exactement, comme nous dirons au n° 16 *bis*, au moyen d'une expérience de torsion d'un cylindre circulaire, de la matière du corps dont on s'occupe. Ayant E et G, l'on obtient [2e formule (k)]

$$\eta = \frac{E}{2G} - 1 ;$$

et l'on peut d'ailleurs exprimer ainsi, en E et G, les formules d'isotropie complète :

$$(l) \quad \left\{ \begin{array}{ll} t_{xx} = G\dfrac{E-2G}{3G-E}\left(\dfrac{4G-E}{E-2G}\partial_x + \partial_y + \partial_z\right), & t_{yz} = Gg_{yz}, \\ t_{yy} = G\dfrac{E-2G}{3G-E}\left(\partial_x + \dfrac{4G-E}{E-2G}\partial_y + \partial_z\right), & t_{zx} = Gg_{zx}, \\ t_{zz} = G\dfrac{E-2G}{3G-E}\left(\partial_x + \partial_y + \dfrac{4G-E}{E-2G}\partial_z\right), & t_{xy} = Gg_{xy}. \end{array} \right.$$

Les mêmes formules (i) des corps complètement isotropes, en y faisant

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = -p, \qquad \partial_x + \partial_y + \partial_z = -\upsilon,$$

c'est-à-dire en appelant υ la proportion de la *contraction de volume* produite par une *pression uniforme* p appliquée sur l'unité superficielle de toutes les faces du parallélépipède, donnent

$$(m) \qquad p = E_c\upsilon, \quad \text{si l'on fait } E_c = \frac{2e+3e'}{3} = E\frac{e+e'}{3e} = \frac{1}{3}\frac{EG}{3G-E}.$$

Si, dans ces diverses formules d'isotropie complète, on fait

$$e' = e \qquad (\text{ou } \lambda = \mu, \text{ notation de Lamé})$$

avec Navier, Poisson, ainsi qu'avec Cauchy lorsqu'il n'y supposait aucune tension avant les déformations éprouvées ∂, g, et comme je pense, d'après les considérations ci-dessus, qu'il convient de l'admettre dans la pratique pour les *solides réels* s'ils sont isotropes, on a, vu que $e = G$,

$$(n) \qquad \eta = \frac{1}{4}, \qquad E = \frac{5}{2}G, \qquad E_c = \frac{2}{3}E = \frac{5}{3}G,$$

expressions applicables, comme il est facile de le démontrer, même pour un prisme à base quelconque ; en sorte que, comme nous avons dit, les contractions latérales, en tous sens, sont le $\frac{1}{4}$ de l'extension longitudinale; le module de torsion est les *deux cinquièmes* de celui d'extension, et le coefficient E_c de contraction cubique en est les *deux tiers*.

15. *Cas plus général de trois plans de symétrie, ou des formules* (*g*). — Appelons

E_x, E_y, E_z les modules d'élasticité d'extension dans les sens x, y, z,

η_{yz} et η_{zy}, η_{zx} et η_{xz}, η_{xy} et η_{yx} les divers rapports des contractions latérales aux dilatations longitudinales qu'elles accompagnent (le premier des indices x, y, z, désignant le sens de la dilatation produite par une traction t_{xx}, ou t_{yy}, ou t_{zz} sur l'unité de faces ou bases perpendiculaires aux x, y, z d'un prisme rectangle, et le second indice le sens de la contraction perpendiculaire aux faces latérales supposées libres ;

En sorte que

$$(o)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{si } t_{yy}=0,\ t_{zz}=0, \text{ on ait} & \dfrac{t_{xx}}{\partial_x}=E_x, & -\dfrac{\partial_y}{\partial_x}=\eta_{xy}, & -\dfrac{\partial_z}{\partial_x}=\eta_{xz}, \\ t_{zz}=0,\ t_{xx}=0, & \dfrac{t_{yy}}{\partial_y}=E_y, & -\dfrac{\partial_z}{\partial_y}=\eta_{yz}, & -\dfrac{\partial_x}{\partial_y}=\eta_{yx}, \\ t_{xx}=0,\ t_{yy}=0, & \dfrac{t_{zz}}{\partial_z}=E_z, & -\dfrac{\partial_x}{\partial_z}=\eta_{zx}, & -\dfrac{\partial_y}{\partial_z}=\eta_{zy}. \end{array}\right.$$

On trouvera

$$(p)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{En faisant}\quad abc-ad'^2-be'^2-cf'^2+2d'e'f'=D\ , \\ E_x=\dfrac{D}{bc-d'^2}\ ,\qquad E_y=\dfrac{D}{ca-e'^2}\ ,\qquad E_z=\dfrac{D}{ab-f'^2}\ . \end{array}\right.$$

Et, en résolvant les trois premières équations (*g*) par rapport à ∂_x, ∂_y, ∂_z, si l'on fait analogiquement

$$(q)\qquad \frac{D}{ad'-e'f'}=F_x\ ,\qquad \frac{D}{be'-f'd'}=F_y\ ,\qquad \frac{D}{cf'-d'e'}=F_z\ .$$

on trouvera

$$(r)\quad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x=\dfrac{t_{xx}}{E_x}-\dfrac{t_{yy}}{F_z}-\dfrac{t_{zz}}{F_y}, & \partial_y=\dfrac{t_{yy}}{E_y}-\dfrac{t_{zz}}{F_x}-\dfrac{t_{xx}}{F_z}, & \partial_z=\dfrac{t_{zz}}{E_z}-\dfrac{t_{xx}}{F_y}-\dfrac{t_{yy}}{F_x}; \\ \dfrac{\eta_{yz}}{E_y}=\dfrac{\eta_{zy}}{E_z}=\dfrac{1}{F_x}, & \dfrac{\eta_{zx}}{E_z}=\dfrac{\eta_{xz}}{E_x}=\dfrac{1}{F_y}, & \dfrac{\eta_{xy}}{E_x}=\dfrac{\eta_{yx}}{E_y}=\dfrac{1}{F_z}; \\ & \eta_{yz}\,\eta_{zx}\,\eta_{xy}=\eta_{zy}\,\eta_{xz}\,\eta_{yx}\ . & \end{array}\right.$$

On trouvera aussi

$$\frac{E_z}{E}-\eta_{zx}^2=\frac{(ab-f'^2)(bc-d'^2)-(be'-f'd')^2}{(ab-f'^2)^2}=\frac{bD}{(ab-f'^2)^2}=\frac{bE_x\,\eta_{zx}}{be'-f'd'}\ .$$

d'où la première de ces formules remarquables qui nous serviront par la suite :

$$(r_1) \qquad \frac{E_z}{e'} = \left(1 - \frac{f'd'}{be'}\right) \frac{\frac{E_z}{E_x} - \eta_{zx}^2}{\eta_{zx}}, \quad \frac{E_z}{d'} = \left(1 - \frac{e'f'}{ad'}\right) \frac{\frac{E_z}{E_y} - \eta_{zy}^2}{\eta_{zy}}; \ldots\ldots$$

La seconde se déduit simplement de la première par changement de x en y, b en a, d' en e' et réciproquement; et l'on pourrait, par des permutations circulaires portant sur toutes les lettres, en déduire quatre autres semblables.

16. *Détermination expérimentale des coefficients ou paramètres d'élasticité* a, b, c,.... f'. — Les trois coefficients dits de *glissement* ou de *torsion*, ou *d'élasticité tangentielle*

d, e, f,

qui affectent les g dans les trois formules (g) de gauche peuvent être déterminés expérientalement d'une manière directe en soumettant à la torsion des prismes rectangulaires plats, taillés suivant les x, y, ou z. On verra en effet, à la note de la fin du § 31, que si l'on tord autour de son axe longitudinal de figure, supposé parallèle aux x, par exemple, un prisme de longueur a, dont les bases rectangles ont leurs côtés b, c, parallèles aux y et aux z, et si, sous l'action d'un moment ou couple M_x, l'une des bases a tourné devant l'autre d'un arc ψ pour un rayon $= 1$, l'on a

$$(s) \qquad M_x = \nu \frac{\psi}{3a} \frac{b^3c^3}{\frac{b^2}{f} + \frac{c^2}{e}};$$

ν étant un coefficient numérique variant entre 0,843, valeur qu'il a quand les deux termes du dénominateur sont égaux, et 1, valeur qu'il prend quand l'un de ces deux termes est négligeable par rapport à l'autre. Il en résulte qu'on a sensiblement

$$(t) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\psi}{a} f \frac{bc^3}{3} \text{ quand le côté } c \text{ de la barre est très petit par rapport au côté } b; \\ M_x = \frac{\psi}{a} e \frac{cb^3}{3} \text{ quand c'est l'inverse}; \end{cases}$$

d'où l'on tire les deux coefficients de glissement f, e. Le troisième, d, s'obtiendrait de même par une expérience de torsion d'un prisme taillé oit suivant les z, soit suivant les y et n'ayant qu'une faible épaisseur dans le sens x.

On ne peut pas évaluer de cette manière directe les six autres coefficients, savoir a, b, c, d', e' f'. Il faudra donc, au moyen d'expériences

d'extension ou de flexion de lames taillées dans trois sens, déterminer les trois modules E_x, E_y, E_z, et, par des mesurages délicats, déterminer les six fractions numériques η; puis, après avoir contrôlé et corrigé au besoin les uns par les autres ces neuf résultats expérimentaux au moyen des relations à satisfaire (r), on déduira, des mêmes équations, les valeurs de F_x, F_y, F_z que l'on portera dans les équations (q), lesquelles jointes alors aux équations (p) forment un système d'où l'on pourra tirer les valeurs cherchées des coefficients a, b.... f'. Cela ne pourra se faire que numériquement et après de longs tâtonnements, vu que les éliminations d'inconnues produiront des équations de dégré élevé.

La complication est diminuée, et la difficulté principale n'existe plus si l'on admet, conformément à ce qui a été dit au n° 12 et aux précédents, que $d' = d$, $e' = e$, $f' = f$; car, on n'aura plus à déduire que a, b, c des équations (p), les d', e', f' étant connus comme on vient de dire. C'est à quoi on arrivera facilement en prenant pour inconnue auxiliaire le quintinôme D; car si d'abord on tire des trois dernières (p) les trois produits bc, ca, ab et par suite les expressions de a, b, c, en D; et si on les substitue dans la première (p), l'on aura en D une équation du troisième degré qu'on résoudra numériquement, et la valeur de D qu'on en obtiendra fournira celles de a, b, c, que l'on désirait. Ces équations (p) ne contiennent que les modules d'élasticité E_x, E_y, E_z; les rapports η n'y figurent pas. La connaissance préalable de ceux-ci ne sera donc pas nécessaire, et on pourra se dispenser de les mesurer expérimentalement. La connaissance des E suffira en effet alors, comme on voit, pour déterminer les coefficients a, b, c. Ensuite, les équations (q) fournissant les F, leur substitution et celle des E dans les trois doubles équations (r), donneront les valeurs des six rapports numériques η, si l'on désire les avoir aussi.

Toute difficulté s'évanouit si l'on admet en outre les relations d'*amorphisme:*

$$(t_1) \qquad a = 3\frac{ef}{d}, \qquad b = 3\frac{fd}{e}, \qquad c = 3\frac{de}{f},$$

dont nous parlerons aux n°s 17 et suivants; ou même seulement les deux premières (V. n° 21). On pourra même, alors, se dispenser de mesurer les E si ce n'est comme contrôle des mesurages de d, e, f.

Mais toute difficulté disparait également dans la détermination des coefficients des formules de tension, si, sans être obligé, ou d'acquiescer aux égalités controversées $d' = d$, $e' = e$, $f' = f$, ou d'admettre les trois relations (t_1) que je regarde comme une conséquence de l'amorphisme des solides employés comme matériaux, quand leurs élasticités en divers sens n'offrent pas des différences très considérables (V. n°s 18 et suivants), l'on se borne à ceux dont la contexture est la même en tous les sens latéraux, autour de droites d'une direction déterminée, tout en pouvant être très différente dans le sens de ces droites elles-mêmes.

C'est le cas des formules (h), sur lequelles nous allons nous arrêter, car c'est celui des applications ordinaires.

16 bis. *Suite. Cas d'isotropie seulement transversale, ou des formules* (h). — Les coefficients de *glissement* ou des trois formules de droite (h), qu'on peut appeler

$$d = e = G \,, \qquad f = G_1 \,,$$

coefficients dont les deux premiers mesurent la résistance à la torsion autour d'un axe parallèle aux z, et le troisième f, seulement la résistance à la *déformation transversale* des sections, peuvent être déterminés directement par des expériences de torsion, en y employant, pour le dernier G_1, et comme il a été dit au n° précédent, des prismes plats dont la très petite épaisseur aura besoin d'être mesurée par des moyens délicats ; et pour G, un moyen plus facile, consistant à tordre un cylindre à base circulaire qui ait son axe dans la direction de celui de l'isotropie partielle ou des z, et à appliquer la première formule de la note du § 31 citée

$$(u) \qquad M_z = G \frac{\psi}{c} \frac{\pi r^4}{2} \,;$$

où r est le rayon du cylindre et où M_z est le moment ou couple qui fait tourner l'une devant l'autre d'un angle ψ, mesuré en arc d'un rayon $= 1$, les deux bases, distantes de c.

Pour obtenir les autres coefficients, savoir d′, f′ et c des formules (h), (y compris même, pour contrôle, celui f) en fonction des E, η expérimentalement mesurés, faisons, dans les égalités (o) à (r) du numéro précédent comme dans les formules (g) :

$$a = b = 2f + f' \qquad d' = e' \,,$$

et posons, afin d'abréger, vu les égalités qui s'ensuivent pour des E et pour des η

$$(v) \quad \begin{cases} E_z = E \,, \quad E_x = E_y = E' \,, \\ \eta_{zx} = \eta_{zy} = \eta \,, \quad \eta_{xy} = \eta_{yx} = \eta' \,, \quad \eta_{xz} = \eta_{yz} = \eta'' \,; \end{cases}$$

nous en tirerons, en faisant $a - \frac{d'^2}{c} = a_1$, module propre aux plaques (v. § 39),

$$(x) \begin{cases} E\eta'' = E'\eta \,, \qquad D = 4f\,[(f + f')\,c - d'^2] \\ E = \dfrac{(f + f')\,c - d'^2}{f + f'} = c - 2\eta d' = c\,\dfrac{a_1 - f}{f + f'} \,, \quad E' = 4f\,\dfrac{(f + f')\,c - d'^2}{(2f + f')\,c - d'^2} = 4f\left(1 - \dfrac{f}{a_1}\right) ; \\ \eta = \dfrac{d'}{2(f + f')} ; \quad \eta' = \dfrac{cf' - d'^2}{(2f + f')\,c - d'^2} = 1 - 2\dfrac{f}{a_1} \,; \quad \eta'' = \dfrac{2fd'}{(2f + f')\,c - d'^2} = \dfrac{E'}{E}\,\eta = 2\,\dfrac{f}{a_1}\dfrac{d'}{c} \,; \end{cases}$$

d'où

$$1 + \eta' = 2\,\frac{(f + f')\,c - d'^2}{(2f + f')\,c - d'^2} = 2\left(1 - \frac{f}{a_1}\right) ; \quad 1 - \eta' = \frac{2cf}{(2f + f')\,c - d'^2} = \frac{2f}{a_1} .$$

Il en résulte :

1° Entre le module $E' = \frac{t_{xx}}{\partial_x} = \frac{t_{yy}}{\partial_y}$ d'élasticité d'extension latérale, le module $f = G_1$ d'élasticité de glissement relatif ou de déformation des éléments des sections transversales, et le rapport $\eta' = -\frac{\partial_y}{\partial_x}$ ou $-\frac{\partial_x}{\partial_y}$, la relation suivante :

$$(y) \qquad f = G_1 = \frac{E'}{2(1+\eta')} \qquad \text{d'où} \qquad \eta' = \frac{E'}{2G_1} - 1$$

de même forme que celle $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ du n° 3 qui existe entre $G = d = e$, $E = E_z$ et $\eta = -\frac{\partial_x}{\partial_z}$ *dans le seul cas de l'isotropie complète.*

2° Les valeurs suivantes (z) en E', η', η'' de diverses combinaisons des coefficients a.... f' qui se présenteront dans nos calculs des §§ 59, 64 et 73 (ses form. 106 *a* et le n° 19 de sa Note) relatifs aux plaques élastiques, notamment celle à laquelle nous donnons ici la désignation nouvelle a_1, valeur qu'il suffit le plus souvent d'avoir sans celles de ces coefficients eux-mêmes. [On les vérifie en mettant à la place des E', η, η', η'' leurs équivalents (x)] :

$$(z) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a - \frac{d'^2}{c} = 2f + f' - \frac{d'^2}{c} = E' \frac{1}{1-\eta'^2}; \qquad a_1 - f = f + f' - \frac{d'^2}{c} = \frac{E'}{2(1-\eta')}; \\ f_1' = f' - \frac{d'e'}{c} = a_1 - 2f = \frac{E'\eta'}{1-\eta'^2} = a_1\eta'; \quad f = a_1 \frac{1-\eta'}{2}; \quad E' = 4\left(1 - \frac{f}{a_1}\right); \\ \frac{(f+f')c - d'^2}{fd'} = \frac{1+\eta'}{\eta''} = \frac{c}{d'}\left(\frac{a_1}{f} - 1\right); \quad \frac{c}{d'} = \frac{1-\eta'}{\eta''}; \quad \frac{fd'}{c} = \frac{\eta'' E'}{2(1-\eta'^2)} = \frac{\eta'' a_1}{2}. \end{array} \right.$$

3° Enfin, les valeurs en E, E', η, η', η'' de tous les coefficients des formules (h) (hors $d = e = G$ dont nous avons parlé d'abord et qui en est tout à fait indépendant).

En effet, si l'on combine (x), $E = c - 2\eta d'$ avec (z) $\frac{c}{d'} = \frac{1-\eta'}{\eta''}$ et avec (x), $E\eta'' = E'\eta$, on obtient

$$d' = \frac{E'\eta}{1-\eta'-2\eta\eta''},$$

d'où la valeur de c. Puis (x) $\eta = \frac{d'}{2(f+f')}$ donne celle de $f + f' = \frac{d'}{2\eta}$ qui sucessivement diminuée et augmentée de (y) $f = \frac{E'}{2(1+\eta')}$ fournit les valeurs de f' et de $2f + f' = a$.

17. *Relations entre les coefficients ou paramètres des formules des tensions élastiques pour les corps* AMORPHES, *ou* NON CRISTALLINS, *c'est-à-dire à cristallisation confuse, et cependant non isotropes, comme sont généralement les matériaux de construction.* — Pour ces corps, tels que les métaux laminés ou étirés, les bois de toute espèce, les schistes et autres pierres feuilletées, ou seulement ayant des lits de carrière prononcés, il doit y avoir un certain nombre de relations entre les neuf coefficients a, b, c, d, e, f, d′, e′, f′, (ou entre les six, si d′ = d, e′ = e, f′ = f), parce que leur matière se trouve constituée comme si, primitivement isotrope, sa contexture avait été altérée par des compressions permanentes, en divers sens, qui peuvent toujours être réduites, comme les compressions élastiques ou non persistantes considérées §§ 4 et 15, à trois seulement dans des directions rectangulaires.

J'ai étudié cet effet de compressions permanentes de deux manières; l'une (*Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point*, etc., au *Journal des Math.*, 1863, t. VIII, n° 16, p. 376; ou *Appendice complémentaire* de l'édition de Navier de 1864, § 90, p. 814), a été imitée de la méthode dont les premiers auteurs de la théorie de l'élasticité ont fait usage pour en construire les formules, et mise en œuvre en calculant les augmentations et diminutions que cette altération de l'isotropie apporte aux intensités des actions entre molécules, ces intensités étant supposées fonctions continues de leurs distances mutuelles, et les compressions étant assez petites pour qu'on puisse finalement effacer les termes affectés de leurs carrés et produits; l'autre manière a consisté (*Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions ont rendus hétérotropes*, au même journal, juillet 1868), sans invoquer cette loi moléculaire aujourd'hui controversée (n°s 3 à 12 ci-dessus) à égaler les neuf coefficients a, b, c,.... f′ à des développements ordonnés suivant les puissances et produits des puissances entières des petites proportions ε, ε', ε'', des compressions subies dans les sens rectangulaires x, y, z par la matière primitivement isotrope, et à établir (à peu près comme venait de faire M. Boussinesq avec des expressions simplement linéaires, à son mémoire, inséré au même cahier, sur *les milieux isotropes déformés*) les relations qui doivent se trouver entre les divers multiplicateurs de ces puissances et produits de chaque degré, en négligeant ensuite les termes affectés des carrés $(\varepsilon'-\varepsilon'')^2$, $(\varepsilon''-\varepsilon)^2$, $(\varepsilon-\varepsilon')^2$ des différences deux à deux des petites compressions.

L'une comme l'autre des deux analyses a fourni, entre les neuf coefficients, les relations

$$(a')\qquad 2d+d'=\sqrt{bc}\,;\qquad 2e+e'=\sqrt{ca}\,;\qquad 2f+f'=\sqrt{ab}\,,$$

ou, presque indifféremment, les suivantes :

$$(b')\qquad 2d+d'=\frac{b+c}{2}\,;\qquad 2e+e'=\frac{c+a}{2}\,;\qquad 2f+f'=\frac{a+b}{2}\,,$$

qui reviennent en effet, au même, à cela près de différences $\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$, négligeables lorsque les compression n'ont apporté que de très petites différénces dans les élasticités en divers sens.

Nul doute donc qu'il ne faille, pour les corps amorphes n'ayant qu'un faible degré d'hétérotropie, ou dont les élasticités dans les trois sens x, y, z sont peu différentes entre elles, adopter entre les coefficients a, b,.... f′, les relations (a') ou (b').

Mais il n'en est pas ainsi de tous, spécialement des bois. Wertheim et Chevandier ont trouvé, pour celui de chêne, entre le module d'élasticité d'extension E_z dans le sens longitudinal, ou des fibres, pris pour celui des z, et ceux E_x, E_y de petits prismes qu'on extrairait dans le sens x du rayon et dans un sens y tangentiel aux couches, des rapports moyens

$$\frac{E_z}{E_x}=6\,,\qquad \frac{E_z}{E_y}=9\,,$$

rapports qui, pour les bois tendres se sont élevés jusqu'à 12, à 25 et au delà (*Mém. sur les propriétés mécaniques des bois*, 1846, aux *Ann. de Ch. et de Phys.*, 1848, tableau de la p. 120). M. Hagen est arrivé à des nombres même bien plus forts, car, dans des expériences dont il ne donne pas, il est vrai, le détail, il annonce avoir trouvé

$$\frac{E_z}{E_x}=15\,,\qquad 22 \text{ et } 25\,,\qquad 48\,,\qquad 83$$

pour des bois de chêne, hêtre, pin, sapin. (*)

Or la double analyse qui a conduit aux relations (a') ou (b') n'est pas applicable à des déformations permanentes pouvant produire de pareilles inégalités, car, pour apprécier les termes qu'elle néglige, il faudrait posséder, sur la loi des intensités des actions moléculaires, des connaissances dont on manque absolument.

Il convient d'y suppléer par d'autres considérations appuyées de quelques faits ; c'est ce que nous allons tâcher de faire.

18. *Exclusion des relations* (b') *donnant pour les valeurs des binômes* 2 d + d′,..... *les moyennes arithmétiques* $\frac{b+c}{2}$ ..... *des élasticités directes.* — *Et nécessité de corrections à faire aux* (a') *donnant des moyennes proportionnelles* $\sqrt{bc}$,.... — Si en considérant, pour simplifier, le cas d'égale élas-

(*) Voyez Appendice complémentaire de l'édition 1864, annotée, des *Leçons de Navier*, § 91, p. 817, et voyez ci-après pour modification de ce qui est dit au bas de la page 818.

ticité transversale $a = b$, $d = e$, avec $d' = d$, $e' = e$, $f' = f$, ce qui réduit deux des trois relations (b') à

$$3f = a\ ,\qquad 6e = c + a\ ,\qquad \text{d'où}\qquad c = 6e - 3f\ ,$$

nous les appliquons aux formules du n° 15, nous avons

$$\eta_{zx} = \frac{be - fd}{ab - f^2} = \frac{1}{4}\frac{e}{f}\ ,\qquad \frac{E_z}{E_x} = \frac{bc - d^2}{ab - f^2} = \frac{1}{8}\left(18\frac{e}{f} - \frac{e^2}{f^2} - 9\right).$$

Tirant de cette seconde équation la valeur de $\frac{e}{f}$ pour substituer dans la première, on obtient :

$$(c')\qquad \eta_{zx} = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{18 - 2\frac{E_z}{E_x}}\ .$$

Cette expression donnerait, pour le rapport η_{zx}, des contractions transversales $-\partial_x$ aux dilatations longitudinales ∂_z qui les engendrent, des valeurs qui non seulement croissent avec $\frac{E_z}{E_x}$ d'une manière rapide tout à fait improbable, mais encore *deviennent imaginaires* pour $\frac{E_z}{E_x} > 9$. On aurait en même temps des nombres imaginaires pour le rapport $\frac{E_z}{e}$ du coefficient d'élasticité d'extension au coefficient d'élasticité $e = G$ de glissement ou de torsion d'après sa valeur générale (r_1) donnée au n° 15 :

$$(d')\qquad \frac{E_z}{e'} = \left(1 - \frac{f'd'}{be'}\right)\frac{\frac{E_z}{E_x} - \eta_{zx}^2}{\eta_{zx}}\ .$$

Les relations (b'), par moyennes arithmétiques, doivent donc être rejetées.

Il n'en est pas de même des relations (a') par moyennes proportionnelles, qui peuvent être écrites aussi

$$(e')\qquad a = \frac{(2e + e')(2f + f')}{2d + d'}\ ,\quad b = \frac{(2f + f')(2d + d')}{2e + e'}\ ,\quad c = \frac{(2d + d')(2e + e')}{2f + f'}\ .$$

Elles donnent, toujours pour le cas simple, $a = b$, $d = e = d' = e'$, $f' = f$,

$$(e'_1)\qquad \begin{cases} a = 3f\ , & c = 3\dfrac{e^2}{f}\ ,\\[2ex] \eta_{zx} = \dfrac{1}{4}\dfrac{e}{f}\ . & \dfrac{E_z}{E_x} = \dfrac{e^2}{f^2}\ .\end{cases}$$

Éliminant $\frac{e}{f}$, nous obtenons la première des deux expressions suivantes; et nous obtenons la seconde en portant les valeurs (e'_1) dans l'équation (d') où nous écrivons, au lieu de e, la lettre G, notation ordinaire du module d'élasticité de glissement, dans le sens x, sur des sections perpendiculaires aux z :

$$(f') \qquad \eta_{zx} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{E_z}{E_x}}. \qquad \frac{E_z}{G} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{E_z}{E_x}}.$$

Ces expressions ne deviennent jamais imaginaires. Elles donnent

(f'_1)

$\frac{E_z}{E_x}$	η	$\frac{E}{G}$
Pour $\frac{E_z}{E_x} = 1$,	$\eta = 0,25$	$\frac{E}{G} = 2,5$
1,5	0,306	3,06
2	0,354	3,54
3	0,433	4,33
4	0,500	5,00
5	0,559	5.59
10	0,750	7,50
20	1,118	11,18
40	1,581	15,81
80	2,236	22,36

Les valeurs ainsi trouvées pour $\frac{E}{G}$ ne sont point inacceptables, car la formule générale rappelée (d'), exempte d'hypothèses, où le coefficient $\left(1 - \frac{f'd'}{be'}\right)$ ne peut guère être au dessous de $\frac{1}{2}$, et où le terme η^2_{xz} du numérateur peut être négligé quand $\frac{E_z}{E_x}$ devient grand, prouve que le rapport $\frac{E_z}{G}$ des élasticités d'extension et de glissement doit inévitablement croître beaucoup avec celui $\frac{E_z}{E_x}$ des élasticités d'extension dans les deux sens.

Ces valeurs numériques de $\frac{E}{G}$, et de plus fortes, ont même été données, ainsi que leur grand accroissement avec $\frac{E_z}{E_x}$, par diverses expériences, car on a trouvé :

1° Pour le fer forgé ou étiré en barres (expériences de flexion et de torsion de Duleau, discutées aux *Leçons de Navier*, 2e édition, n° 102, et au mémoire cité sur la torsion, 1855, *Sav. étr.*, t. XIV, nos 78 à 86), $E = 20\,0$ ≅

à 25 000 millions de kilogrammes; G = 6 000 à 7 000 millions, d'où $\frac{E}{G} = 2,9$ à 3,5.

2° Pour le bois de chêne (expériences de Dupin, Rondelet, Barlow, etc., aux mêmes leçons), E = 1300 à 1500 millions, et (expériences de Savart, Wertheim, M. Bouniceau, au mémoire sur la torsion, n° 86, ainsi qu'au Cours de M. Bresse, 1866, n° 153), G = 58, 82 et 100 millions de kilogrammes, ce qui fait, pour le chêne, où $\frac{E_z}{E_x}$ n'excède guère 9, $\frac{E_z}{G}$ = de 9 à 20.

Mais les valeurs de η du même tableau ou de la formule (f''), parfaitement admissibles jusqu'à $\frac{E_z}{E_x} = 4$, semblent ne plus l'être pour des rapports $\frac{E_z}{E_x}$ considérables, comme ceux 40 et 80 que peuvent donner le pin et le sapin. On a dit au § 2, que si l'on fait éprouver à un prisme une extension longitudinale, dont la proportion, supposée toujours très petite, soit ∂, le changement correspondant de son volume, ou sa *dilatation cubique*, est $(1 - 2\eta)\,\partial$. Clebsch, n'admettant pas qu'elle pût devenir négative, ou se changer en contraction, en concluait que le rapport η ne devait jamais dépasser 0,50. Cette opinion n'est fondée sur aucun fait; il ne l'exprime même que *pour les corps isotropes*, et quelques expériences de Wertheim ont montré qu'aux approches de la rupture d'une tige métallique, c'est-à-dire au moment où sa matière est arrivée à un état très fibreux, comparable à celui des bois, *une extension de plus diminue le volume*; en sorte que, sans pouvoir aller jusqu'à $\eta = 2,236$, rien n'empêcherait de porter η jusqu'à 1 pour les bois tendres.

Il convient, ainsi, de n'admettre les relations (a') $2d + d' = \sqrt{bc}, \ldots$ que partiellement, ou bien de les corriger par quelques coefficients numériques qui, fort peu différents de l'unité quand le rapport $\frac{E_z}{E_x}$ n'excède pas 2, s'en écartent lorsqu'il devient considérable, de manière à diminuer alors les valeurs (f''_1) de $\eta = \eta_{zx}$, pas assez pourtant pour qu'il en résulte, vu la formule (d'), des valeurs trop grandes de $\frac{E_z}{G}$.

Pour déterminer les limites de cette correction, qui ne peuvent être fournies par les expériences encore trop peu nombreuses qu'on possède sur η et $\frac{E}{G}$, voyons quelle influence elle pourra avoir sur la manière dont se distribuent les élasticités suivant divers sens, en chaque point des corps considérés; et, pour cela, donnons la loi générale que suit cette distribution.

Elle peut être envisagée de deux manières principales.

19. *Distribution des élasticités dites* DIRECTES *autour d'un point du corps.* — On peut facilement, des six formules (h) qui donnent les composantes $t_{xx}, \ldots$

t_{xy}, suivant les x, y, z, des tensions, en fonction des dilatations et glissements $\partial_x, \ldots\ldots g_{xy}$ parallèlement aux mêmes axes, et, même, des six formules sextinômes (25) $t_{xx} = a_{xx,xx}\partial_x \ldots\ldots$, $t_{yy} = \ldots\ldots$, du § 11, relatives à des corps de contexture quelconque, déduire des formules analogues pour un système x', y', z' d'autres axes rectangulaires (Mémoire de 1863, et *Appendice complémentaire* de 1864, cités ci-dessus) (*).

(*) Il convient tout au moins d'indiquer la manière de les obtenir et de donner ici d'abord les formules, d'un usage fréquent dans la théorie de l'élasticité, qui fournissent les composantes nouvelles de tension et les déformations nouvelles en fonction des anciennes. Ce sont, $c_{xx'}$, $c_{yx'}$, $c_{xy'}$, ... $c_{zz'}$, désignant les cosinus des angles des axes nouveaux x', y', z', avec les axes primitifs x, y, z :

$$
(A) \left\{
\begin{array}{l}
t_{x'x'} = t_{xx} c^2_{xx'} + t_{yy} c^2_{yx'} + t_{zz} c^2_{zx'} + 2\, t_{yz} c_{yx'} c_{zx'} + 2\, t_{zx} c_{zx'} c_{xx'} + 2\, t_{xy} c_{xx'} c_{yx'}; \\
t_{y'y'} = t_{xx} c^2_{xy'} + \ldots\ldots \quad ; \qquad t_{z'z'} = t_{zx} c^2_{xz'} + \ldots\ldots \\
t_{y'z'} = t_{xx}\, c_{xy'} c_{xz'} + t_{yy}\, c_{yy'} c_{yz'} + t_{zz}\, c_{zy'} c_{zz'} + \\
\quad + t_{yz} (c_{yy'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + t_{zx} (c_{zy'} c_{xz'} + c_{zz'} c_{xy'}) + t_{xy} (c_{xy'} c_{yz'} + c_{xz'} c_{yy'}); \\
t_{z'x'} = t_{xx}\, c_{xz'} c_{xx'} + \ldots\ldots \quad ; \qquad t_{x'y'} = t_{xx}\, c_{xx'} c_{xy'} + \ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

$$
(B) \left\{
\begin{array}{l}
\partial_{x'} = \partial_x\, c^2_{xx'} + \partial_y\, c^2_{yx'} + \partial_z\, c^2_{zx'} + g_{yz}\, c_{yx'} c_{zx'} + g_{zx}\, c_{zx'} c_{xx'} + g_{xy}\, c_{xx'} c_{yx'}; \\
\partial_{y'} = \partial_x\, c^2_{xy'} + \ldots\ldots \quad ; \qquad \partial_{z'} = \partial_x\, c^2_{xz'} + \ldots , \\
g_{y'z'} = 2\,\partial_x\, c_{xy'} c_{xz'} + 2\,\partial_y\, c_{yy'} c_{yz'} + 2\,\partial_z\, c_{zy'} c_{zz'} + \\
\quad + g_{yz}(c_{yy'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + g_{zx}(c_{zy'} c_{xz'} + c_{zz'} c_{xy'}) + g_{xy}(c_{xy'} c_{yz'} + c_{xz'} c_{yy'}) \\
g_{z'x'} = 2\,\partial_x\, c_{xz'} c_{xx'} + \ldots\ldots \quad ; \qquad g_{x'y'} = 2\,\partial_x\, c_{xx'} c_{xy'} + \ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Les formules (A) s'obtiennent en considérant le petit tétraèdre trirectangle dont la grande face a sa normale dans une direction quelconque n et dont les trois autres faces ont leurs normales dans les directions x, y, z. Si la première face a une superficie égale à l'unité, les superficies des trois autres seront respectivement c_{nx}, c_{ny}, c_{nz} ; en sorte que pour l'équilibre de cet élément solide suivant les trois directions x, y, z, on devra avoir

$$
t_{nx} = t_{xx}\, c_{nx} + t_{yx}\, c_{ny} + t_{zx}\, c_{nz} \quad ; \quad t_{ny} = t_{xy}\, c_{nx} + t_{yy}\, c_{ny} + t_{zy}\, c_{nz} \; ;
$$
$$
t_{nz} = t_{xz}\, c_{nx} + t_{yz}\, c_{ny} + t_{zz}\, c_{nz} \, .
$$

Ajoutant ces trois forces, après les avoir décomposées ou projetées dans une autre direction s, aussi quelconque, ce qui se fait en les multipliant respectivement par c_{sx}, c_{sy}, c_{sz}, on aura une expression de t_{ns}, c'est-à-dire de la composante, parallèle à s, de la tension sur l'unité d'une face dont la normale a la direction n. Les six formules (A) s'obtiennent en la particularisant, c'est-à-dire en mettant successivement x', y', z' à la place de n et de s.

Quant aux formules (B), la première n'est autre que celle (h_1) que nous allons démontrer au n° 20 en la fondant sur le théorème du carré de la diagonale d'un parallélépipède obliquangle. La quatrième, celle qui donne $g_{y'z'}$, peut se déduire d'un théorème de géométrie plus général (et qu'on emploie en mécanique quand on veut évaluer le travail de la résultante de plusieurs forces données pour un espace *résultant* de plusieurs espaces parcourus par leur point commun d'application), à savoir, que si l'on a deux lignes R, S dont chacune est *résultante* ou somme géométrique de plusieurs autres (ou deux *chemins directs* dont chacun unit les deux mêmes points qu'un *chemin polygonal*), le produit d'une de ces résultantes, R, par la projection de l'autre sur sa direction, est égal à la somme algébrique de tous les

En se bornant à un corps où les yz, zx, xy sont trois plans de symétrie de contexture, si l'on appelle $\mathrm{a}_{x'x'}$ le coefficient, dit *d'élasticité directe*, qui dans l'expression de $\mathrm{t}_{x'x'}$ affectera la dilatation $\partial_{x'}$ et c_x, c_y, c_z les cosinus des angles que forme la direction x' avec celles x, y, z, l'on trouve

$$(f_2') \quad \mathrm{a}_{x'x'} = \mathrm{a}\mathrm{c}_x^4 + \mathrm{b}\mathrm{c}_y^4 + \mathrm{c}\mathrm{c}_z^4 + 2(2\mathrm{d}+\mathrm{d}')\mathrm{c}_y^2\mathrm{c}_z^2 + 2(2\mathrm{e}+\mathrm{e}')\mathrm{c}_z^2\mathrm{c}_x^2 + 2(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathrm{c}_x^2\mathrm{c}_y^2 .$$

Cette équation représente, en coordonnées polaires, une surface qui, en coordonnées rectangles

$$x,\ y,\ z, = \text{respectivement } \frac{\mathrm{c}_{x,y,z}}{\sqrt[4]{\mathrm{a}_{x'x'}}},$$

aurait pour équation

$$(f_3') \quad 1 = \mathrm{a}x^4 + \mathrm{b}y^4 + \mathrm{c}z^4 + 2(2\mathrm{d}+\mathrm{d}')y^2z^2 + 2(2\mathrm{e}+\mathrm{e}')z^2x^2 + 2(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')x^2y^2 ;$$

surface dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes des valeurs de $\mathrm{a}_{x'x'}$ relatives à leurs directions.

Cette surface du quatrième degré peut donner pour ses rayons vecteurs, et par suite pour les $\mathrm{a}_{x'x'}$ eux-mêmes, *treize* maxima ou minima, dont trois sont nécessairement leurs valeurs a, b, c relatives aux directions x, y, z, de la ligne x' ; six des autres ont des directions intermédiaires, tracées dans les six paires d'angles plans formés par les axes des y et z, z et x, x et y; enfin, il peut y en avoir quatre autres dont les directions passent d'une manière symétrique dans l'intérieur des quatre paires d'angles trièdres formés par les trois plans diamétraux ou coordonnés yz, zx, xy.

---

produits des composantes de l'une par les projections, sur leurs directions, des diverses composantes de l'autre. On le démontre en remplaçant la projection, sur R, de la résultante S, par la somme des projections des composantes de celles-ci ; puis en remarquant que le produit de R par une de ces projections de composantes est la même chose que le produit de la composante elle-même par la projection de R sur sa direction ; en sorte qu'en remplaçant enfin, dans ces produits, chaque projection de la résultante R par la somme des projections de ses composantes propres, on a l'égalité que le théorème énonce.

Maintenant, si les deux lignes R, S sont ce en quoi se sont changées, dans le corps élastique, deux droites r, s primitivement rectangulaires, le produit de R par la projection de S est $r(1+\partial_r)\,s\,(1+\partial_s)\,\mathrm{g}_{rs}$. En l'égalant à la somme des produits formés par leurs composantes dans les sens x, y, z,, puis divisant de part et d'autre par rs, développant et négligeant les carrés et produits des ∂, g, comme nous faisons au nº 20 pour obtenir (h_1), nous avons une expression g_{rs} qui, particularisée en dirigeant les r, s suivant les y', z', ou z', x', ou x', y', donne les dernières formules (B).

En inversant les formules (B), c'est-à-dire en y mettant x, y, z pour x', y', z' et réciproquement, on a en $\partial_{x'}\ldots\ldots\mathrm{g}_{x'y'}$ les expressions de $\partial_x\ldots\ldots\mathrm{g}_{xy}$ qui, substituées dans les $\mathrm{t}_{xx}, \ldots\mathrm{t}_{xy}$ des seconds membres des (A), donnent les $\mathrm{t}_{x'x'}\ldots\ldots\mathrm{t}_{x'y'}$ en $\partial_{x'}\ldots\ldots\mathrm{g}_{x'y'}$, et, par suite, les valeurs en $\mathrm{a}_{xxxx}\ldots$. et $\mathrm{c}_{xx'}\ldots\ldots\mathrm{c}_{xy'}$, des vingt-un coefficients nouveaux $\mathrm{a}_{x'x'x'x'}\ldots\ldots$ affectant les $\partial_{x'}\ldots\ldots\mathrm{g}_{x'y'}$. C'est un calcul que l'on rend très prompt au moyen des notations symboliques indiquées au § 86 de l'*Appendice complémentaire* de l'édition citée (1864) de Navier.

Une pareille complication de la loi ou de la marche des élasticités $a_{x'x'}$ en divers sens est tout à fait improbable dans les corps dont nous nous occupons et qui ont été définis au n° 17. Les grandeurs de $a_{x'x'}$ doivent ne faire qu'augmenter ou diminuer lorsqu'on passe de l'une à l'autre de ses valeurs principales, c'est-à-dire de b à c de c à a, de a à b, dans les angles plans yz, zx, xy.

Cette condition de marche simple des valeurs de $a_{x'x'}$ est satisfaite lorsque les relations (a') $2d + d' = \sqrt{bc}, \ldots$ ont lieu entre les neuf coefficients a, b,... f'; car on trouve qu'alors la surface se réduit à un ellipsoïde; les rayons vecteurs n'ont par conséquent que trois maxima ou minima, et la distribution est celle que j'ai appelée ellipsoïdale.

Mais il suffit, pour que cette même condition de variation simple et graduelle soit remplie, ou pour que les $a_{x'x'}$ ne croissent pas pour décroître ensuite ou réciproquement dans les angles plans, que l'on trouve des valeurs imaginaires pour les cosinus des angles formés avec les x, y z par les maxima et les minima dirigés dans les plans coordonnés; or c'est ce qui a lieu

$$(g')\quad \begin{cases} \text{si} \quad 2d + d' \quad \text{est compris entre} \quad b \text{ et } c, \\ \qquad 2e + e' \qquad\qquad \text{entre} \quad c \text{ et } a, \\ \qquad 2f + f' \qquad\qquad \text{entre} \quad a \text{ et } b; \end{cases}$$

(voyez le Mémoire cité de 1863, n° 12 et l'*Appendice complémentaire* également cité, § 87).

Mais nous exprimerons plus clairement et utilement les conditions de variation graduelle de la contexture dans les six paires d'angles plans, et aussi dans les quatre paires d'angles trièdres qu'ils forment ensemble, en considérant, suivant les diverses directions, au lieu des *élasticités* $a_{x'x'}$ appelées *directes* par Rankine, les *modules d'élasticité* E définis à la manière de Young et de Navier.

20. *Distribution des modules d'élasticité* E *en diverses directions.* — Supposons, comme a fait Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, 1828), que dans le corps dont la contexture élastique symétrique en trois sens est définie par les six expressions (g) $t_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z$, $t_{yy} = \ldots$, $t_{xy} = fg_{xy}$ du n° 13, l'on taille un prisme quadrangulaire fort mince dont les arêtes aient une direction quelconque x', définie elle-même par les trois cosinus

$$\cos(x',x) = c_x, \qquad \cos(x',y) = c_y, \qquad \cos(x',z) = c_z,$$

et que, les faces latérales de ce petit prisme étant libres de toute action, l'on applique à ses bases des tensions ou tractions

$$t$$

par unité de leurs superficies. Appelons $\partial_{x'}$ la dilatation ou extension qui en

résulte par unité de sa longueur, et proposons-nous de calculer le coefficient ou module d'élasticité

$$E = \frac{t}{\partial_{x'}},$$

de cette extension, en fonction des coefficients a, f′, e′..... f et des cosinus c_x, c_y, c_z.

Pour y arriver, il faut d'abord établir la relation générale, géométrique ou cinématique, entre une dilatation $\partial_{x'}$ de sens x', et les ∂_x, ∂_y..... g_{xy} de sens x, y, z; et, en second lieu, il faut établir les formules statiques des composantes t_{xx}, t_{yy},..... t_{xy}, dans les directions x, y, z des tensions que celle t, de direction x', produit dans le petit prisme.

Or, il nous sera facile de reconnaître qu'on a :

$$(h') \qquad \partial_{x'} = \partial_x c_x^2 + \partial_y c_y^2 + \partial_z c_z^2 + g_{yz} c_y c_z + g_{zx} c_z c_x + g_{xy} c_x c_y,$$

$$(i') \quad t_{xx} = tc_x^2;\ t_{yy} = tc_y^2;\ t_{zz} = tc_z^2;\ t_{yz} = tc_y c_z;\ t_{zx} = tc_z c_x;\ t_{xy} = tc_x c_y.$$

En effet :

1° La formule (h'), qui a été trouvée analytiquement par Navier en 1821, en supposant très petits les déplacements de points, dans l'espace, auxquels sont dus les changements ∂, g de longueurs et d'angles, peut être déduite simplement, en ne supposant petits que ces changements eux-mêmes, du théorème de géométrie fournissant l'expression du carré de la diagonale d'un parallélépipède en fonction de ses trois côtés partant du même sommet qu'elle, et des trois angles qu'ils forment entre eux.

Rappelons que si a, b, c, sont les côtés et d la diagonale, on a nécessairement la diagonale $d = a \cos(a, d) + b \cos(b, d) + c \cos(c, d)$, somme algébrique des côtés projetés sur la direction de d; qu'en conséquence (en multipliant de part et d'autre par d) son carré d^2 égale la somme des mêmes côtés a, b, c, multipliés par les projections $d \cos(a, d)$, $d \cos(b, d)$, $d \cos(c, d)$, de la diagonale sur leurs trois directions respectives; enfin, que la première, $d \cos(a, d)$, par exemple, de ces projections de la diagonale, doit être égale à la somme des projections des trois côtés sur le côté a, ou à $a + b \cos(a, b) + c \cos(a, c)$. Cela donne, en faisant de même pour $d \cos(b, d)$ et $d \cos(c, d)$, et substituant dans l'expression du carré de d :

$$(j') \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos(b,c) + 2ca \cos(c,a) + 2ab \cos(a,b)$$

ou le théorème de géométrie rappelé et invoqué.

Or, en revenant au corps élastique considéré, une longueur $= 1$, portée avant ses déplacements sur une droite ayant la direction appelée x', est diagonale d'un parallélépipède rectangle dont les côtés parallèles aux x, y, z sont c_x, c_y, c_z; et, après les déplacements, cette même longueur, devenue $1 + \partial_{x'}$, est diagonale d'un parallélépipède légèrement obliquangle dont

les côtés ont pour longueurs $c_x(1+\partial_x)$, $c_y(1+\partial_y)$, $c_z(1+\partial_z)$, et font entre eux des angles dont les cosinus sont les glissements g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}. Donc, en vertu du théorème de la diagonale, que nous invoquons, on a :

$$(1+\partial_{x'})^2=(1+\partial_x)^2 c_x^2+\ldots\ldots\quad+2(1+\partial_y)(1+\partial_z)c_y c_z g_{yz}+\ldots\ldots$$

Effectuant les multiplications, tant dans le premier membre que dans les six termes du second, effaçant comme très petits du second ordre les carrés et produits des ∂ et des g, enfin, retranchant 1 du premier membre et $c_x^2+c_y^2+c_z^2$ du second, l'on obtient, en divisant par 2, l'expression (h') $\partial_{x'}=\ldots\ldots$ qu'il fallait démontrer.

2°. Quant à celles (i'), considérons que le prisme mince, taillé dans la direction x', est un corps dans lequel il s'exerce des tensions normales t à travers toutes les faces ou sections perpendiculaires à x', et nulle tension à travers les faces parallèles à x'. Pour obtenir la composante

$$t_{ns}$$

suivant une direction quelconque s de la tension t_n qu'y supporte (aussi par unité superficielle) une face ayant sa normale n dans une direction aussi quelconque, imaginons, dans ce prisme, un petit tétraèdre tri-rectangle, dont la face hypothénuse $=1$ soit perpendiculaire à n, ses trois petites faces étant l'une perpendiculaire, les deux autres parallèles à x'. L'équilibre de ce tétraèdre élémentaire exigera, comme l'a remarqué Cauchy, que la tension sur la grande face soit résultante des tensions sur les trois petites. Or les deux qui sont parallèles à x' n'en supportent aucune; celle qui lui est perpendiculaire et dont la superficie est $\cos(n,x')$, en supporte une

$$\cos(n,x').\ t.$$

En la décomposant, ainsi que celle t_n dans la direction de s, l'on a

$$(k')\qquad t_{ns}=t\cos(n,x')\cos(s,x'),$$

expression dans laquelle il n'y a plus qu'à remplacer successivement les directions quelconques, n, s, par x, y, z, pour obtenir les six formules (i'), $t_{xx}=tc_x^2\ldots\ldots$ qui étaient à démontrer.

Mettons maintenant, à la place des premiers membres des six équations (g), $t_{xx}=a\partial_x+f'\partial_y+e'\partial_z,\ldots\ldots\ t_{xy}=fg_{xy}$, les six expressions ($i'$). Si nous les résolvons comme nous avons fait au numéro 15 ci-dessus, et, en rappelant les notations de ce n°, si nous faisons en outre

$$(l')\qquad \frac{1}{2d}-\frac{1}{F_x}=\frac{1}{F_1},\qquad \frac{1}{2e}-\frac{1}{F_y}=\frac{1}{F_2},\qquad \frac{1}{2f}-\frac{1}{F_z}=\frac{1}{F_3},$$

la substitution dans (h') des valeurs que nous tirerons pour ∂_x, ∂_y, ... g_{xy} et la division par t, nous donnera, pour $\frac{\partial_{x'}}{t} = \frac{1}{E}$,

$$(m') \qquad \frac{1}{E} = \frac{c_x^4}{E_x} + \frac{c_y^4}{E_y} + \frac{c_z^4}{E_z} + 2\frac{c_y^2 c_z^2}{F_1} + 2\frac{c_z^2 c_x^2}{F_2} + 2\frac{c_x^2 c_y^2}{F_3}.$$

Cette équation représente, en coordonnées polaires, une surface dont l'équation en coordonnées ordinaires rectangles

$$(n') \qquad x = c_x \sqrt[4]{E}, \qquad y = c_y \sqrt[4]{E}, \qquad z = c_z \sqrt[4]{E},$$

est

$$(o') \qquad 1 = \frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \frac{z^4}{E_z} + 2\frac{y^2 z^2}{F_1} + 2\frac{z^2 x^2}{F_2} + 2\frac{x^2 y^2}{F_3}$$

et qui a pour rayons vecteurs les racines quatrièmes des valeurs du module d'élasticité E dans leurs sens respectifs.

21. *Maxima et minima des modules* E *pour les diverses directions. Conditions de* VARIATION SIMPLE ET GRADUELLE *à remplir pour qu'il n'y en ait que trois.* — Comme la surface du quatrième degré (o') est symétrique par rapport aux plans coordonnés yz, zx, xy, les axes des x, y, z lui sont normaux; en sorte que trois des maxima et minima de son rayon vecteur ont pour directions ces axes mêmes, et pour valeurs

$$(p') \quad \left\{ \begin{array}{llll} \sqrt[4]{E_x} & \text{répondant à } c_x = 1,\ c_y = 0,\ c_z = 0\,; & \text{d'où } E = E_x\,; \\ \sqrt[4]{E_y} & c_x = 0,\ c_y = 1,\ c_z = 0\,; & \text{d'où } E = E_y\,; \\ \sqrt[4]{E_z} & c_x = 0,\ c_y = 0,\ c_z = 1\,; & \text{d'où } E = E_z\,. \end{array} \right.$$

Il y a encore généralement six autres maxima ou minima de $\sqrt[4]{E}$ et par conséquent de E dirigés dans les six paires d'angles plans des axes y et z, z et x, x et y. Les directions de ceux du plan yz, par exemple, s'obtiennent en faisant $c_x = 0$ dans l'équation (m') ce qui la réduit à

$$\frac{1}{E} = \frac{c_y^4}{E} + \frac{c_z^4}{E_z} + 2\frac{c_y^2 c_z^2}{F_1},$$

et, en égalant à zéro la dérivée de son second membre par rapport à c_y^2 et à c_z^2, puis remplaçant $d c_z^2$ par $-d c_y^2$, vu $c_y^2 + c_z^2 = 1$, et en divisant ensuite par $d c_y^2$, on obtient les deux premiers résultats suivants; les quatre autres,

relatifs aux maxima ou minima dans les plans zx, xy, s'obtiennent de même :

$$(q')\quad\begin{cases} c_x = 0\,; \text{ avec } \dfrac{c_z}{c_y} = \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{E_y}-\frac{1}{F_1}}{\frac{1}{E_z}-\frac{1}{F_1}}} \quad \text{d'où} \quad \dfrac{1}{E} = \dfrac{\frac{1}{E_y E_z}-\frac{1}{F_1^2}}{\frac{1}{E_y}+\frac{1}{E_z}-\frac{2}{F_1}}\,; \\[2ex] c_y = 0\,; \text{ avec } \dfrac{c_x}{c_z} = \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{E_z}-\frac{1}{F_2}}{\frac{1}{E_x}-\frac{1}{F_2}}} \quad \text{d'où} \quad \dfrac{1}{E} = \dfrac{\frac{1}{E_z E_x}-\frac{1}{F_2^2}}{\frac{1}{E_z}+\frac{1}{E_x}-\frac{2}{F_2}}\,; \\[2ex] c_z = 0\,; \text{ avec } \dfrac{c_y}{c_x} = \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{E_x}-\frac{1}{F_3}}{\frac{1}{E_y}-\frac{1}{F_3}}} \quad \text{d'où} \quad \dfrac{1}{E} = \dfrac{\frac{1}{E_x E_y}-\frac{1}{F_3^2}}{\frac{1}{E_x}+\frac{1}{E_y}-\frac{2}{F_3}}\,; \end{cases}$$

et ce sont encore là, pour $\frac{1}{E}$, trois maxima ou minima *absolus* et non pas simplement *relatifs* aux diverses valeurs qu'il a dans les plans yz, zx, xy : car, par raison de symétrie, toute normale aux coupes de la surface (o') par ces plans est normale à cette surface elle-même.

Enfin, il peut y avoir encore quatre maxima ou minima dirigés dans l'intérieur des angles trièdres formés par les plans coordonnés. On en obtient les directions en égalant à zéro la dérivée de la valeur (m') de $\frac{1}{E}$ par rapport aux trois carrés c_x^2, c_y^2, c_z^2 des cosinus, puis éliminant dc_z^2 au moyen de $dc_x^2 + dc_y^2 + dc_z^2 = 0$ tiré de $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$. On a ainsi, en divisant par 2,

$$\left(\frac{c_x^2}{E_x}+\frac{c_y^2}{F_3}+\frac{c_z^2}{F_2}\right)dc_x^2 + \left(\frac{c_x^2}{F_3}+\frac{c_y^2}{E_y}+\frac{c_z^2}{F_1}\right)dc_y^2 = \left(\frac{c_x^2}{F_2}+\frac{c_y^2}{F_1}+\frac{c_z^2}{E_z}\right)\left(dc_x^2+dc_y^2\right)$$

d'où l'on déduit, en égalant ce qui affecte, dans les deux membres dc_x^2, et, ensuite, dc_y^2, deux équations revenant à ce que donnent les trois premiers membres de la quadruple égalité suivante (r') ; son quatrième membre s'obtient si l'on multiplie respectivement les trois premiers par $\frac{c_x^2}{c_x^2}$, $\frac{c_y^2}{c_y^2}$, $\frac{c_z^2}{c_z^2}$, ce qui n'en change pas la valeur, et si l'on compose une quatrième fraction dont le numérateur soit la somme des numérateurs des trois fractions ainsi construites, et le dénominateur, la somme de leurs dénominateurs ; car cette

dernière somme est l'unité, et celle des numérateurs est précisément la valeur (m') de $\frac{1}{E}$. On a donc

$$(r') \quad \frac{c_x^2}{E_x}+\frac{c_y^2}{F_3}+\frac{c_z^2}{F_2}=\frac{c_x^2}{F_3}+\frac{c_y^2}{E_y}+\frac{c_z^2}{F_1}=\frac{c_x^2}{F_2}+\frac{c_y^2}{F_1}+\frac{c_z^2}{E_z}=\frac{1}{E}\text{(max. ou min.)}.$$

Pour en déduire les directions et les valeurs des maxima ou minima dont nous nous occupons, remarquons qu'on rend identiques les trois trinômes qui forment les premiers membres de cette égalité si l'on y met, à la place de c_x^2, c_y^2, c_z^2, respectivement les trois binômes

$$(s') \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{E_y}-\frac{1}{F_3}\right)\left(\frac{1}{E_z}-\frac{1}{F_2}\right)+\left(\frac{1}{F_3}-\frac{1}{F_1}\right)\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2}\right), \\ \left(\frac{1}{E_z}-\frac{1}{F_1}\right)\left(\frac{1}{E_x}-\frac{1}{F_3}\right)+\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_3}\right), \\ \left(\frac{1}{E_x}-\frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{1}{E_y}-\frac{1}{F_1}\right)+\left(\frac{1}{F_2}-\frac{1}{F_3}\right)\left(\frac{1}{F_3}-\frac{1}{F_1}\right). \end{cases}$$

Cela prouve que c_x^2, c_y^2, c_z^2 doivent être entre eux comme ces trois binômes complexes ; d'où il suit, comme $c_x^2+c_y^2+c_z^2=1$, que l'on a

(t') $\begin{cases} c_x^2,\ c_y^2,\ c_z^2 = \text{respectivement les quotients des binômes } (s') \\ \text{divisés par la somme des trois.} \end{cases}$

Il en résulte, dans les angles trièdres, quatre maxima ou minima de $\frac{1}{E}$ égaux en grandeur et ayant des directions fournies par c_x, c_y, c_z égalés aux racines carrées, affectées du double signe $\pm$, de ces quotients.

Observons maintenant que la surface du 4e degré (o') se réduit à un ellipsoïde quand on a

$$(u') \qquad F_1=\sqrt{E_yE_z}, \qquad F_2=\sqrt{E_zE_x}, \qquad F_3=\sqrt{E_xE_y};$$

son second membre devient alors, en effet, un carré parfait, ce qui donne, en extrayant la racine,

$$(v') \qquad 1=\frac{x^2}{\sqrt{E_x}}+\frac{y^2}{\sqrt{E_y}}+\frac{z^2}{\sqrt{E_z}},$$

et l'équation polaire (n') se trouve réduite de même à

$$(x') \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}=\frac{c_x^2}{\sqrt{E_x}}+\frac{c_y^2}{\sqrt{E_y}}+\frac{c_z^2}{\sqrt{E_z}}.$$

On verra au n° suivant 22 que les conditions (u') reviennent presque toujours à celles (a') ou (e').

Mais d'après les expressions (q'), il suffit :

1° Pour que les modules E varient dans l'étendue des angles plans yz, zx, xy sans éprouver d'augmentations suivies de diminutions ou réciproquement, que

$$(y') \quad \left\{ \begin{array}{lll} F_1 \text{ ne sorte pas de l'intervalle } & E_y, & E_z, \\ F_2 & E_z, & E_x, \\ F_3 & E_x, & E_y; \end{array} \right.$$

car alors les expressions (q') des rapports $\frac{c_z}{c_y}$, $\frac{c_x}{c_z}$, $\frac{c_y}{c_x}$ des cosinus, et ces cosinus eux-mêmes, sont imaginaires; et les maxima et minima de l'intérieur des angles plans yz, zx, xy n'existent plus.

2° Pour que les quatre maxima ou minima dirigés dans les angles trièdres n'existent pas non plus, que

(z') { les binômes (s') n'aient pas tous les trois des valeurs de même signe;

car alors un des trois cosinus c_x, c_y, c_z, au moins, sera imaginaire, pour chacune des quatre directions qu'ils doivent donner.

Ce sont ces conditions de *variation simple et graduelle des élasticités* (y'), (z') en y joignant celles (g') analogues à (y'), et d'autres analogues à (z') relatives aussi aux élasticités directes $a_{x'x'}$ du n° 18, que nous supposerons toujours remplies dans les corps amorphes dont nous nous occupons, et que nous chercherons à imposer, outre celles de modération des rapports $\mathfrak{y}$, dont on a parlé à la fin de ce numéro, aux coefficients ou paramètres des formules (g) et (k), n° 13, des composantes des tensions qui se développent dans ces corps solides que les constructions emploient.

22. *Établissement des relations mutuelles qu'il convient d'attribuer aux neuf paramètres d'élasticité* a, b, c, d, e, f, d′, e′, f′ *des formules de tension pour que ces conditions de variation soient remplies, en même temps que celle d'avoir pour les* $\mathfrak{y}_{zx}$ et $\frac{E_z}{G}$ *des valeurs modérées.* — Comme les deux modules E_x, E_y des élasticités transversales des corps prismatiques qu'on est dans le cas de considérer n'ont jamais de rapports mutuels qui excèdent 2, nous pouvons supposer elliptiques les coupes par le plan transversal $x=0$ des surfaces du 4° degré (f'_3) du n° 19 et (o') du n° 20, ou prendre

$$(a'') \qquad 2f+f'=\sqrt{ab}\,, \qquad F_3=\sqrt{E_xE_y}.$$

La première de ces deux conditions (a'') est remplie évidemment si,

parmi les trois conditions (e') de distribution ellipsoïdale, on a les deux

$$(b'') \qquad \mathrm{a} = \frac{(2\mathrm{e} + \mathrm{e}')(2\mathrm{f} + \mathrm{f}')}{2\mathrm{d} + \mathrm{d}'}, \qquad \mathrm{b} = \frac{(2\mathrm{f} + \mathrm{f}')(2\mathrm{d} + \mathrm{d}')}{2\mathrm{e} + \mathrm{e}'};$$

et il est facile de voir que, par cela seul, la seconde condition (a'') sera aussi remplie lorsqu'on aura $\mathrm{d}' = \mathrm{d}, \mathrm{e}' = \mathrm{e}$, conformément à la théorie moléculaire (n° 11), et même, plus généralement, *lorsqu'il y aura entre* d *et* d', e *et* e', *un rapport quelconque, le même pour ces deux groupes.*

On trouve en effet, si l'on met pour $\mathrm{F}_3, \mathrm{E}_x, \mathrm{E}_y$ leurs valeurs (l'), (q) des n[os] 19, 15, en a, b, ... f', en ayant égard aux équations (p) du même n° 15, qu'on a

$$\frac{1}{\mathrm{F}_3^2} - \frac{1}{\mathrm{E}_x}\frac{1}{\mathrm{E}_y} = \frac{\mathrm{D} - 4\mathrm{f}\,[\mathrm{c}\,(\mathrm{f} + \mathrm{f}') - \mathrm{d}'\mathrm{e}']}{4\mathrm{f}^2\mathrm{D}};$$

et si l'on met dans le quintinôme D, au numérateur, pour a et b les valeurs (b''), c disparaît en sorte qu'on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{F}_3^2} - \frac{1}{\mathrm{E}_x}\frac{1}{\mathrm{E}_y} = \frac{2\mathrm{f} + \mathrm{f}'}{4\mathrm{f}^2\mathrm{D}}\left(2\mathrm{d}'\mathrm{e}' - \frac{2\mathrm{e} + \mathrm{e}'}{2\mathrm{d} + \mathrm{d}'}\mathrm{d}'^2 - \frac{2\mathrm{d} + \mathrm{d}'}{2\mathrm{e} + \mathrm{e}'}\mathrm{e}'^2\right);$$

expression nulle si $\mathrm{d} = \mathrm{d}', \mathrm{e} = \mathrm{e}'$, ou si seulement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}'} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}'}$. On voit que la seconde des conditions d'ellipticité transversale (a'') est, ainsi, remplie comme la première.

Nous prendrons donc pour les *élasticités directes* transversales a et b, les valeurs ou relations (b''), en disposant de l'élasticité longitudinale c ou de ses relations, laissées indéterminées avec les autres paramètres, pour remplir les conditions de *variation simple* des élasticités en divers sens, énoncées au n° précédent.

Nous en ferons le calcul dans la supposition

$$\mathrm{d}' = \mathrm{d}, \qquad \mathrm{e}' = \mathrm{e}, \qquad \mathrm{f}' = \mathrm{f},$$

conforme, avons-nous dit, à ce qu'ont appris les expériences, convenablement interprétées, sur les vrais solides, en renonçant ainsi à une extension inutile des formules de tension à ces corps élastiques mous dont il a été parlé au n° 4.

De plus, nous ferons

$$(c'') \qquad 3\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{cf}} = \mathrm{n},$$

ce qui nous donnera

$$(d'') \qquad \mathrm{a} = 3\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}, \quad \mathrm{b} = 3\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}, \quad \mathrm{c} = \frac{3}{\mathrm{n}} \cdot \frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}.$$

En sorte que nos recherches porteront principalement sur les valeurs à donner au nombre n pour remplir les conditions de la fin du n° 21.

On aura aussi, d'après (p), (q), (r), (r') et (l'),

$$(e'')\quad \left\{\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{c}{D = 4f(2cf - de) = 4\cdot\dfrac{6-n}{n}\cdot def.} \\[2ex]
E_x = 4\,\dfrac{ef}{d}\cdot\dfrac{2cf-de}{3cf-de}; & E_y = 4\,\dfrac{fd}{e}\cdot\dfrac{2cf-de}{3cf-de}; & E_z = \dfrac{2cf-de}{2f} \\[2ex]
\quad = 4\,\dfrac{ef}{d}\cdot\dfrac{6-n}{9-n}; & \quad = 4\,\dfrac{fd}{e}\cdot\dfrac{6-n}{9-n}; & \quad = \dfrac{de}{f}\cdot\dfrac{6-n}{2n}. \\[2ex]
F_1 = \dfrac{2cf-de}{cf-de}\cdot d; & F_2 = \dfrac{2cf-de}{cf-de}\cdot e; & F_3 = 4\,\dfrac{2cf-de}{3cf-de}\cdot f \\[2ex]
\quad = \dfrac{6-n}{3-n}\cdot d; & \quad = \dfrac{6-n}{3-n}\cdot e; & \quad = 4\,\dfrac{6-n}{9-n}\cdot f. \\[2ex]
\multicolumn{3}{l}{\eta_{zx} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{d}{f} = \sqrt{\dfrac{n}{18-2n}\cdot\dfrac{E_z}{E_x}};\quad \eta_{zy} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{e}{f} = \sqrt{\dfrac{n}{18-2n}\cdot\dfrac{E_z}{E_y}},} \\[2ex]
\multicolumn{3}{l}{\dfrac{E_z}{e} = (6-n)\sqrt{\dfrac{2}{n(9-n)}\cdot\dfrac{E_z}{E_x}};\quad \dfrac{E_z}{d} = (6-n)\sqrt{\dfrac{2}{n(9-n)}\cdot\dfrac{E_z}{E_y}}.}
\end{array}\right.$$

Ces expressions nous mettent à même de calculer d'abord les limites relatives, soit aux diverses valeurs du rapport $\frac{E_z}{E_x}$, soit à celles du rapport $\frac{f}{d}$ ou $\frac{f}{e}$ qu'il faut imposer ou au paramètre c laissé indéterminé, ou au nombre $n = 3\frac{de}{cf}$, pour que les conditions ci-dessus de variation simple et graduelle des élasticités soient remplies; et, ensuite quelles valeurs il convient le mieux de donner à n ou à c pour que celles de η_{zx} et de $\frac{E}{G}$ restent modérées et en rapport avec les faits connus.

Il est d'abord facile de voir par la substitution des valeurs (e'') des E et F, que, *quel que soit* n, ou, ce qui revient au même, quel que soit le paramètre d'élasticité longitudinale c, le troisième des binômes complexes (s') est nul, et les deux autres sont égaux à cela près de facteurs $\frac{1}{d}$ et $-\frac{1}{e}$. Donc ces binômes ne sont pas tous trois de même signe, et la condition (z') de non-existence des maxima ou minima des E à l'intérieur des angles trièdres formés par les axes x, y, z, est remplie par cela seul qu'on a les relations $a = 3\frac{ef}{d}$, $b = 3\frac{fd}{e}$, entre cinq des six paramètres.

On trouverait de même, en composant trois binômes analogues à (s') avec a, b, c au lieu des trois $\frac{1}{E_{x,y,z}}$, et 3d, 3e, 3f au lieu des $\frac{1}{F_{1,2,3}}$, la nullité du premier, et l'égalité des deux derniers à 3cf — 9de multiplié respectivement par $\frac{d-e}{e}$ et par $\frac{e-d}{d}$, en sorte qu'ils ne sont pas tous trois de même signe; ce qui est, d'après des calculs que nous n'avons pas reproduits (voyez le Mémoire cité de 1863, et l'Appendice complémentaire de l'édition de Navier de 1864), la condition pour qu'il n'y ait pas, dans les angles trièdres, de maxima ou minima de l'*élasticité directe* $a_{x'x'}$.

Venons aux conditions (y') d'absence de maxima ou minima de $\frac{1}{E}$ ou de E dans les trois angles plans.

Si E_x est la plus grande des deux élasticités latérales, ou si $E_z > E_x > E_y$, elles reviennent à

$$(f'') \qquad E_x > F_3 > E_y\,; \qquad E_z > F_2 > E_x\,; \qquad E_z > F_1 > E_y\,.$$

La première des trois est remplie quel que soit n, puisque $F_3 = \sqrt{E_x E_y}$.

La seconde revient, d'après les (e''), à

$$\frac{1}{2f} > \frac{e}{cf-de} > \frac{ef}{d(3cf-de)}\,.$$

Égalant successivement le second membre au premier, puis au troisième, on en tire

$$(g'') \quad \begin{cases} \text{Limite inférieure de } c = e \cdot \dfrac{2f+d}{f}\,; \\ \text{Limite supérieure de } c = \dfrac{de}{f} \cdot \dfrac{4f-d}{4f-3d}\,. \end{cases}$$

Cette même seconde des conditions (f'') peut, toujours d'après les (e''), prendre la forme

$$E_z > \sqrt{\frac{n(9-n)}{2(3-n)^2} E_z E_x} > E_x\,.$$

Elevant les trois membres au carré et divisant par $E_z E_x$, elle devient

$$\frac{E_z}{E_x} > \frac{n(9-n)}{2(3-n)^2} > \frac{E_x}{E_z}\,,$$

La troisième des inégalités (f'') donnerait la même chose, sauf E_y à la place de E_x. Comme les limites $\frac{E_z}{E_y}, \frac{E_y}{E_z}$ comprennent celles $\frac{E_z}{E_x}, \frac{E_x}{E_z}$ de la pré-

cédente, cette troisième partie des conditions (f'') sera remplie si la seconde l'est. Egalant le second membre de cette dernière inégalité, d'abord au premier membre, ensuite au troisième, on aura deux équations qui, résolues par rapport à n, donneront les limites supérieure et inférieure de ce nombre en fonction de $\frac{E_z}{E_x}$. On trouve ainsi

$$(h'')\quad \begin{cases} \text{Limite supérieure de n} = \dfrac{9 + 12\,\frac{E_z}{E_x} - \sqrt{81 + 144\,\frac{E_z}{E_x}}}{2 + 4\,\frac{E_z}{E_x}}\,; \\[2ex] \text{Limite inférieure de n} = \dfrac{12 + 9\,\frac{E_z}{E_x} - \sqrt{144\,\frac{E_z}{E_x} + 81\left(\frac{E_z}{E_x}\right)^2}}{4 + 2\,\frac{E_z}{E_x}}\,. \end{cases}$$

Il est à remarquer que la seconde de ces deux expressions donne à peu près les mêmes résultats que l'expression plus simple

$$n = \frac{2}{1 + \frac{E_z}{E_x}}\,;$$

ce qui s'explique en observant que toutes deux, pour $\frac{E_z}{E_x} = 1$ donnent $n = 1$, et pour $\frac{E_z}{E_x}$ très grand, sensiblement $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\frac{E_z}{E_x}$.

Si nous posons de même la condition (g') de non-existence, dans les trois angles plans des yz, zx, xy, de maxima ou minima des *élasticités directes* $a_{x'x'}$ du nº 19, nous avons, si $c > a > b$, ce qui, d'après les (e''), répond à $E_z > E_x > E_y$,

$$(i'')\quad \begin{cases} a > 3f > b \quad, \qquad c > 3e > a \quad, \qquad c > 3d > b\ , \\ \text{ou}\ \ a > \sqrt{ab} > b \quad, \qquad c > \sqrt{nca} > a \quad, \qquad c > \sqrt{ncb} > b\ . \end{cases}$$

La première de ces trois inégalités est satisfaite indépendamment de toute valeur attribuée à n ou à c; elle revient à ce que l'unité soit comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$.

La troisième est satisfaite si n satisfait à la seconde. Celle-ci revient, en élevant au carré, et en divisant par ac, à

$$\frac{c}{a} > n > \frac{a}{c}$$

ou, d'après les (e''), (d''), à

$$1^\circ,\quad \frac{8}{9-n}\cdot\frac{E_z}{E_x} > n \quad ; \qquad 2^\circ,\quad n > \frac{9-n}{8}\cdot\frac{E_x}{E_z}\,.$$

Il en résulte

$$(k'')\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Limite supérieure de } n = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8\frac{E_z}{E_x}}\,; \\ \text{Limite inférieure de } n = \frac{9}{1 + 8\frac{E_z}{E_x}}\,. \end{array}\right.$$

Or, la limite supérieure (k'') est imaginaire pour $\frac{E_z}{E_x} > \frac{81}{32} = 2{,}53125$; et, pour toutes les valeurs plus petites, le calcul montre que ses valeurs excèdent celles qui sont données par (h'') et dont on donnera plus loin le tableau. La limite inférieure (k'') a des valeurs constamment inférieures à celles du même tableau, ou de la formule (h'') donnée par la condition (f'').

Il suffit donc de satisfaire aux (f'') pour satisfaire aussi, et *à fortiori*, aux (i''); et il y a lieu de se tenir, pour les limites dans lesquelles on doit renfermer le nombre n, aux formules (h'').

Nous pouvons donc former le tableau suivant des limites de n, calculées, d'après (h''), pour diverses valeurs de $\frac{E_z}{E_x}$; et, au moyen de l'expression tirée de (e''),

$$(l'')\qquad \eta_{zx} = \frac{1}{4}\,\frac{d}{f} = \sqrt{\frac{n}{18-2n}\cdot\frac{E_z}{E}}\,,$$

calculer les limites correspondantes de la valeur de $\eta = \eta_{zx}$; puis, avec celles-ci, calculer, au moyen de la même expression (l''), $\frac{f}{d} = \frac{1}{4\eta_{zx}}$, calculer de même les limites du rapport $\frac{f}{d}$.

(m'')

VALEURS de $\frac{E_z}{E_x}$	LIMITES DE n		LIMITES DE η_{zx}		LIMITES DE $\frac{f}{d}$	
$\frac{E_z}{E_x} = 1,0$	1,000	1,000	0,250	0,250	1,000	1,000
1,1	$1,051 > n >$	0,950	$0,266 > \eta_{zx} >$	0,255	$0,940 < \frac{f}{d} <$	0,981
1,2	1,098	0,904	0,289	0,259	0,866	0,966
1,3	1,142	0,863	0,308	0,263	0,811	0,952
1,4	1,183	0,826	0,325	0,266	0,768	0,940
1,5	1,221	0,792	0,343	0,269	0,729	0,928
1,6	1,257	0,761	0,360	0,272	0,694	0,919
1,7	1,290	0,732	0,375	0,274	0,666	0,911
1,8	1,321	0,705	0,394	0,277	0,635	0.904
1,9	1,351	0,681	0,410	0,279	0,610	0,897
2,0	1,379	0,658	0,425	0,281	0,588	0,890
2,2	1,431	0,616	0,456	0,284	0,548	0,880
2,5	1,500	0,563	0,500	0,286	0,500	0,873
3	1,596	0,493	0,574	0,295	0,435	0,848
4	1,743	0,394	0,693	0,303	0,361	0,826
5	1,850	0,329	0,804	0,308	0,311	0,811
6	1,933	0,282	0,906	0,312	0,276	0,802
8	2,056	0,220	1,088	0,317	0,230	0,790
10	2,143	0,180	1,250	0,320	0,200	0,782
15	2,285	0,124	1,597	0,324	0,157	0,771
20	2,373	0,095	1,893	0,326	0,132	0,766
40	2,547	0,049	2,810	0,330	0,089	0,757
80	2,679	0,025	4,113	0,332	0,061	0,754
∞	3,000	0	∞	0	0	0

Si l'on prenait pour η des moyennes arithmétiques entre ses deux limites, on retomberait à peu près dans les valeurs numériques (f'_1) données par la formule (f') $\eta_{zx} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{E_z}{E_x}}$, du n° 18, répondant à $n = 1$, ou à la distribution ellipsoïdale; valeurs trop fortes, avons-nous dit, quand $\frac{E_z}{E_x}$ est supérieur à 4.

Il est facile de voir qu'on obtiendra une suite de valeurs plausibles et convenables en prenant pour n l'expression empirique simple

$$(n'') \qquad \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{E_z}{E_x} - 1\right),$$

qui donne

$$(o'') \qquad \eta_{zx} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\frac{E_z}{E_x}}{1 + \frac{9}{8\gamma}\left(\frac{E_z}{E_x} - 1\right)}},$$

où γ est un nombre qu'il ne faudra jamais prendre plus petit que 2, car pour $\gamma = 2$ on a (n'') $\mathrm{n} =$ sensiblement toutes ses limites inférieures (h'') ou (m''); cette formule, au reste, quelque grand qu'on prenne γ, donnera toujours $\mathrm{n} = 1$ pour $\frac{E_z}{E_x} = 1$, et $\mathrm{n} < 1$ pour toute valeur de $\frac{E_z}{E_x}$ plus grande que 1.

Nous présentons dans le tableau suivant la suite des valeurs que donnent ces formules (n''), (o''), dans la double supposition

$$\gamma = 9 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 22,\ 22 = \frac{200}{9}$$

faites de manière que pour la plus grande valeur, 80, de $\frac{E_z}{E_x}$, on ait respectivement $\eta =$ environ $\frac{2}{3}$ et $\eta = 1$. Nous y joignons les valeurs correspondantes des deux rapports

$$(p'') \quad \begin{cases} \dfrac{E_z}{e} \text{ ou } \dfrac{E}{G} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\dfrac{E_z}{E_x} - \eta_{zx}^2}{\eta_{zx}} = \dfrac{6-\mathrm{n}}{2\,\mathrm{n}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}} = (6-\mathrm{n})\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{n}\,(9-\mathrm{n})} \cdot \dfrac{E_z}{E_z}}\,; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{f}}{\mathrm{d}} = \sqrt{\dfrac{9-\mathrm{n}}{8\,\mathrm{n}\,\dfrac{E_z}{E_x}}} = \dfrac{1}{4\,\eta_{zx}}\,; \end{cases}$$

qui nous serviront plus loin, et qui peuvent, comme on voit, être calculés de plusieurs manières.

(q'')

VALEURS de $\frac{E_z}{E_x}$	SUPPOSITION $\gamma = 9$				SUPPOSITION $\gamma = 22\ 22\ldots = \frac{200}{9}$			
	n	η_{zx}	$\frac{E}{G}$	$\frac{f}{d}$	n	η_{zx}	$\frac{E}{G}$	$\frac{f}{d}$
1	1,000	0,250	2,500	1,000	1.000	0,250	2,500	1,000
1,1	0,989	0,261	2,640	0,960	0,996	0,262	2,629	0,955
1,2	0,978	0,271	2,778	0,924	0,991	0,272	2,784	0,907
1,3	0,968	0,280	2,911	0,893	0,987	0,283	2,875	0,883
1,4	0,957	0,289	3,041	0,866	0,982	0,293	2,992	0,849
1,5	0,947	0,297	3,168	0,842	0,978	0,302	3,107	0,826
2	0,900	0,333	3,778	0,750	0,957	0,345	3,636	0,725
3	0,818	0,387	4,905	0,646	0,917	0,401	4,715	0,588
4	0,750	0,426	5,988	0,584	0,881	0,466	5,412	0,537
5	0.692	0,456	7,090	0,541	0,847	0,510	6,199	0,486
10	0,500	0,542	11,93	0,461	0,712	0,655	9,737	0,381
15	0,391	0,584	16,72	0,429	0,613	0,741	13,008	0,338
20	0,321	0,609	21,50	0,411	0,539	0,791	16,328	0,310
30	0,237	0,637	30,96	0,393	0,434	0,872	22,365	0,287
40	0,187	0,652	40,44	0,384	0,363	0,917	28,47	0,273
60	0.132	0,669	59,3	0,375	0,274	0,970	40,63	0,257
80	0,102	0,678	78,2	0,370	0,220	1,000	52,67	0,249
∞	0	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	∞	0	0	$\frac{10}{9} = 1,111$	∞	0

La valeur de $\frac{E}{G}$ atteint 78 pour $\gamma = 9$, et 53 environ pour $\gamma = 22,22$, quand $\frac{E_z}{E_x} = 80$. Ces chiffres sont sans doute élevés. Mais la formule générale (r_1) $\frac{E_z}{e'} = \ldots$ du n° 15 ou (d') du n° 18, obtenue sans hypothèse sur les relations entre les paramètres, ou la première (p'') dans laquelle le coefficient numérique, s'il n'est pas $\frac{2}{5}$, ne pourra guère être jamais au-dessous de $\frac{1}{2}$, prouve, comme nous avons déjà dit au n° 18, que pour les valeurs très grandes de $\frac{E_z}{E_x}$ le rapport $\frac{E}{G}$ doit, inévitablement, être considérable aussi, ce à quoi les expériences citées ne contredisent nullement.

Les valeurs ainsi données de n, η et $\frac{E}{G}$ peuvent donc être regardées comme suffisamment en rapport avec les faits connus jusqu'à présent. On choisira celles de gauche $(\gamma = 9)$ ou celles de droite $(\gamma = 22,22)$ du tableau, selon l'opinion qu'on aura été à même de se former sur les plus grandes valeurs qu'il est permis de donner à η et à $\frac{E}{G}$ pour les bois tendres.

On peut d'ailleurs attribuer au nombre γ toute autre valeur plus grande que 2, mais qu'il ne conviendra pas, je pense, de faire moindre que 7 ou 8 ni plus grande que 30. On pourrait même, dans les formules empiriques (n''), (o''), (p''), mettre $\left(\frac{E_z}{E_x}\right)^m$ au lieu de $\frac{E_z}{E_x}$, m étant un exposant plus petit ou plus grand que 1, s'il en résultait pour la suite des valeurs soit de η, soit de $\frac{E}{G}$, une marche plus conforme à l'idée que quelques faits ont pu en donner à chacun.

Mais il conviendrait de faire des expériences nouvelles et nombreuses de flexion de tiges pour déterminer E_z; de flexion, aussi, de petits prismes qu'on en extrairait transversalement pour déterminer E_x, à moins qu'on n'y substituât, comme a fait Wertheim, des expériences de sons rendus en les faisant vibrer; et, pour déterminer G, des expériences de torsion ; et de faire aussi ces autres expériences, d'une nature plus délicate, propres à déterminer le rapport $\eta = \eta_{zx} = -\frac{\partial_x}{\partial_z}$ (n° 15) en mesurant les petits changements des dimensions transversales des tiges que l'on étend, ou de la forme prise par les sections des tiges rectangulaires qu'on fléchit (Mém. cité sur la torsion, n° 45). En attendant que ces expériences soient faites, je donnerai comme très probablement suffisantes les formules ci-après :

23. *Formules de composantes de tensions à adopter dans la pratique, pour les corps amorphes non isotropes, comme sont tous les matériaux de construction de bâtiments ou de machines.* — Nous prendrons, d'après ce qui précède, pour ces corps, supposés être homogènes et avoir en chaque point trois plans de symétrie de contexture parallèlement auxquels on prend ceux des yz, zx, xy, le sens *longitudinal* z étant celui où la résistance élastique a le plus d'intensité, et celles qui s'exercent dans les sens *transversaux* x, y, étant supposés peu différentes entre elles, c'est-à-dire n'avoir l'une avec l'autre que des rapports de 1 à 2 au plus.

$$(s'') \quad \left\{ \begin{array}{lll} t_{xx} = 3\dfrac{ef}{d}\partial_x + f\partial_y + e\partial_z & , & t_{yz} = d\,g_{yz} \\ t_{yy} = f\partial_x + 3\dfrac{fd}{e}\partial_y + d\partial_z & , & t_{zx} = e\,g_{zx} \\ t_{zz} = e\partial_x + d\partial_y + \dfrac{3}{n}\dfrac{de}{f}\partial_z & , & t_{xy} = f\,g_{xy} \end{array} \right.$$

n étant un nombre variable suivant le rapport des élasticités longitudinales et transversales, et auquel on donnera :

1° Si l'on connaît $\frac{E_z}{E_x}$, la valeur fournie par la formule empirique

$$(t'') \qquad \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{E_z}{E_x} - 1\right);$$

2° Si l'on connaît plutôt le rapport $\frac{d}{f}$ des deux coefficients d'élasticité de glissement dans les plans xy et yz, la valeur fournie par

$$(u'') \qquad \frac{1}{n} = \frac{8\gamma - 8 - \dfrac{d^2}{f^2}}{8\gamma - 9\dfrac{d^2}{f^2}};$$

car c'est ce qu'on obtient en mettant pour $\frac{E_z}{E_x}$ dans (t'') sa valeur $\frac{9-n}{8n}$ donnée par les formules (e''), et tirant $\frac{1}{n}$.

Ces expressions de $\frac{1}{n}$, à mettre l'une ou l'autre dans le dernier terme de la troisième des six formules de tension (s''), donnent, l'une comme l'autre, aux élasticités dans diverses directions qu'on peut en tirer, cette variation *simple et graduelle* (n° 21), c'est-à-dire *à trois maxima ou minima seulement*, qu'elles doivent avoir dans la nature. Mais pour cela il faut, comme on l'a dit plus haut après la formule (o''), que γ ne soit jamais pris au-

dessous de 2, mais que sa valeur soit comprise, en général, entre 7 ou 8 et 30.

Si ce sont au contraire les E_x, E_y, E_z qui ont été mesurés au moyen d'expériences d'extensions : 1° de la pièce donnée supposée prismatique; 2° de petits prismes extraits de sa matière dans les deux sens x, y, alors les formules suivantes, qui sont données par (e''),

$$(v'')\qquad \frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}=\frac{2\mathrm{n}}{6-\mathrm{n}}\mathrm{E}_z,\qquad \frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}=\frac{1}{4}\frac{9-\mathrm{n}}{6-\mathrm{n}}\mathrm{E}_x,\qquad \frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}\frac{9-\mathrm{n}}{6-\mathrm{n}}\mathrm{E}_y,$$

fourniront immédiatement, en y faisant d'après (t'') $\frac{1}{\mathrm{n}}=1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{E}_x}-1\right)$, trois des coefficients des formules de tensions (s''); et, quant aux autres, c'est-à-dire à d, e, f, on les obtiendra évidemment en multipliant deux à deux les (v'') et en extrayant les racines carrées.

Nous laissons toujours, dans ces formules, le nombre γ indéterminé; afin, comme nous avons dit au n° 22, que chacun puisse le choisir suivant la connaissance qu'il pourra posséder de faits relatifs aux valeurs de η ou de $\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{G}}$. *Nous pensons qu'on ne courra guère risque de se tromper en faisant* $\gamma=16$.

Si l'on a mesuré, non seulement les trois coefficients de l'élasticité de glissement d, e, f, mais encore le coefficient ou module d'élasticité d'extension longitudinale E_z, on n'a plus besoin du diviseur variable n. Il peut être éliminé au moyen de l'expression (e'') $\mathrm{E}_z=\frac{6-\mathrm{n}}{2\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}$; d'où $\frac{3}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}=\mathrm{E}_z+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}$; ce qui en faisant, conformément aux notations ordinaires,

$$\mathrm{E}_z=\mathrm{E},\qquad \mathrm{f}=\mathrm{G}_1,\qquad \mathrm{d}=\mathrm{G}',\qquad \mathrm{e}=\mathrm{G},$$

donne les formules suivantes :

$$(x'')\quad \left\{\begin{aligned}
t_{xx}&=3\frac{\mathrm{GG}_1}{\mathrm{G}'}\partial_x+\mathrm{G}_1\partial_y+\mathrm{G}\partial_z & t_{yz}&=\mathrm{G}'g_{yz}\\
t_{yy}&=\mathrm{G}_1\partial_x+3\frac{\mathrm{G}_1\mathrm{G}'}{\mathrm{G}}\partial_y+\mathrm{G}'\partial_z & t_{zx}&=\mathrm{G}g_{zx}\\
t_{zz}&=\mathrm{G}\partial_x+\mathrm{G}'\partial_y+\left(\mathrm{E}+\frac{\mathrm{GG}'}{2\mathrm{G}_1}\right)\partial_z & t_{xy}&=\mathrm{G}_1g_{xy}
\end{aligned}\right.$$

Le cas le plus ordinaire est celui où les élasticités transversales sont égales, ou bien diffèrent assez peu pour pouvoir être regardées comme telles en les remplaçant par leur moyenne.

Alors on a d = e, ou G = G', paramètre qui peut être facilement et exactement mesuré par des expériences de torsion de toute la pièce. Il convient

de se passer de la connaissance expérimentale de $G_1 = f$, plus difficile à mesurer, et de le remplacer par ses valeurs en G et en E, seuls paramètres qu'on laissera subsister.

On pourrait, pour cela, éliminer n et $\frac{E_z}{E_x}$ entre l'équation empirique (n'') $\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{E_z}{E_x} - 1\right)$ et les suivantes, qu'on déduit de (e'') en y remplaçant $d = e$ par G :

$$E = \frac{6-n}{2n} \cdot \frac{G^2}{f}, \qquad \frac{E_z}{E_x} = \frac{9-n}{8n} \cdot \frac{G^2}{f^2},$$

de manière à avoir une équation en G, E, et $f = G_1$.

Mais cette équation serait du troisième degré en $\frac{f}{G}$; et, résolue numériquement par approximation pour une suite de valeurs de $\frac{E}{G}$, elle ne nous donnerait rien de plus que ce que nous fournit déjà le tableau (q'').

Or, en traçant des lignes dont les abscisses $\frac{G}{E}$ et les ordonnées $\frac{f}{G}$ soient tirées de ce tableau (q'') dans chacune des deux suppositions sur γ, l'on reconnaît qu'elles sont presque droites. On peut donc, en laissant de côté la formule empirique (n''), $\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{E_z}{E_x} - 1\right)$, en adopter une autre, donnant f, ou le rapport $\frac{f}{G}$. La suivante

$$(y'') \qquad \frac{f}{G} = 1 - \beta\left(0,4 - \frac{G}{E}\right)$$

remplit cet objet. On peut prendre à très peu près

$$(z'') \quad \begin{cases} \beta = \frac{5}{3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{G} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\frac{G}{E} \text{ dans la supposition } \gamma = 9\,; \\ \beta = 2, \quad \text{d'où} \quad \frac{f}{G} = \frac{1}{5} + 2\frac{G}{E} \text{ dans la supposition } \gamma = 22{,}22\ldots \end{cases}$$

En effet, le tableau ci-dessous montre que le plus grand écart entre ce que donnent ces formules (z'') et les chiffres du tableau (q'') n'est pas de plus de $\frac{1}{16}$ de ces chiffres.

VALEURS de $\frac{E_z}{E_x}$	VALEURS CALCULÉES DANS LA SUPPOSITION $\gamma = 9$ par les formules (p'')		VALEURS CALCULÉES DANS LA SUPPOSITION $\beta = \frac{5}{3}$ par la formule (z'')	VALEURS CALCULÉES DANS LA SUPPOSITION $\gamma = 22,22\ldots$ par les formules (p'')		VALEURS CALCULÉES DANS LA SUPPOSITION $\beta = 2$ par la formule (z'')
	$\frac{G}{E}$	$\frac{f}{G}$	$\frac{f}{G}$	$\frac{G}{E}$	$\frac{f}{G}$	$\frac{f}{G}$
1,0	0,400	1,000	1,000	0,400	1,000	1,000
1,1	0,379	0,960	0,998	0,380	0.955	0,961
1,2	0,360	0,924	0,933	0,359	0,907	0,918
1,3	0,344	0,893	0,906	0,348	0,883	0,896
1,4	0,329	0,866	0,881	0,334	0,849	0,868
1,5	0,316	0,842	0,859	0,322	0,826	0,844
2	0,265	0,750	0,775	0,275	0,725	0,750
3	0,204	0,646	0,673	0,212	0,588	0,624
4	0,167	0,584	0,612	0,185	0,537	0,570
5	0,141	0,541	0,568	0,161	0,486	0,523
10	0,084	0,461	0,473	0,103	0,381	0,405
15	0,060	0,429	0,438	0.077	0,338	0,354
20	0,046	0,411	0,411	0,061	0,310	0,322
30	0,032	0,393	0,387	0,045	0,288	0,289
40	9,025	0,384	0,375	0,035	0,273	0,270
60	0,017	0,375	0,361	0,025	0,257	0,249
80	0,013	0,369	0,355	0,019	0,249	0,238
∞	0	0	0	8	0	0

Il ne faudra pas prendre β moindre que $\frac{5}{8} = 0.625$, car cette valeur de β correspond aux limites inférieures (h'') de n qui sont à peu près représentées par

$$n = \frac{2}{1 + \frac{E_z}{E_x}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{E_z}{E_x},$$

c'est-à-dire pour la formule empirique (n'') dans laquelle on fait $\gamma = 2$. Et il ne faudra pas faire β plus grand que 3 : car pour les grandes valeurs de $\frac{E_z}{E_x}$, telles que 80, on approcherait des limites supérieures de n.

On fera bien, en général, de prendre pour β une valeur comprise entre les limites (z''), $\beta = \frac{5}{3}$ et $\beta = 2$, afin de ne pas avoir η et $\frac{G}{E}$ plus grands, pour les grandes valeurs de $\frac{E_z}{E_x}$, que ce que donne le tableau (q'').

En faisant ainsi

$$f = G_1 = G\left[1 - \beta\left(0,4 - \frac{G}{E}\right)\right] \quad \text{et} \quad G' = G;$$

§ 17. — Expressions des six composantes des tensions en fonction des neuf dérivées du premier ordre des déplacements pour les corps isotropes. — Équations de leur équilibre et de leur mouvement intérieur, où entrent les dérivées du second ordre des déplacements des points. — Conditions à la surface, exprimées aussi par les dérivées des déplacements.

Les équations du mouvement et de l'équilibre d'un corps élastique peuvent facilement prendre la forme définitive sous laquelle elles se présentent lorsqu'elles sont exprimées en u, v, w, et lorsqu'elles s'appliquent à un corps isotrope. En résolvant les équations ($1c$) du § 4, page 14, par rapport aux six composantes t_{aa}, t_{bb}..... ou t_{xx}, t_{yy}..... et en ayant égard aux expressions (28), § 13, de ∂_x, ∂_y..... g_{xy}, on obtient d'abord les expressions suivantes des tensions :

$$(34\,c)\left\{\begin{aligned}
\mathrm{t}_{xx} &= \frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right\}; & \mathrm{t}_{yz} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right);\\
\mathrm{t}_{yy} &= \frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right\}; & \mathrm{t}_{zx} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right);\\
\mathrm{t}_{zz} &= \frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right\}; & \mathrm{t}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ (^*);
\end{aligned}\right.$$

---

on transformera les formules (x'') des tensions en d'autres qui ne contiendront plus que les coefficients E et G, faciles à mesurer, et le nombre β auquel on pourra attribuer une valeur arbitraire, dans les limites qui viennent d'être indiquées.

Ce sont les formules ainsi obtenues qui nous paraissent applicables aux corps solides amorphes, mais non isotropes, tels que les pierres, bois et métaux employés dans la construction des bâtiments ou des machines.

(*Fin de la Note du* § 16.)

(*) En y mettant pour υ sa valeur (34 d, p. 112) et eu égard à nos notations $\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x$..... $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = g_{xy}$, ces formules peuvent s'écrire

$$\mathrm{t}_{xx} = \frac{E}{(1+\eta)(1-2\eta)}\Big[(1+\eta)\,\partial_x + \eta\,\partial_y + \eta\,\partial_z\Big]; \quad \mathrm{t}_{yz} = \frac{E}{2(1+\eta)}\,g_{yz}$$

$$\mathrm{t}_{yy} = \ldots\ldots \quad , \qquad \mathrm{t}_{zz} = \ldots\ldots \quad ; \quad \mathrm{t}_{zx} = \ldots\ldots \ ; \quad \mathrm{t}_{xy} = \ldots\ldots;$$

et si l'on fait $\frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)} = \lambda$, $\frac{E}{2(1+\eta)} = \mu$, elles reviennent aux for-

dans lesquelles, pour abréger, on a désigné par υ l'accroissement de l'unité de volume, comme dans l'équation (29) du § 15, p. 50 :

$$(34\,d) \qquad \upsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Si maintenant on introduit ces valeurs dans les équations (30) du § 14, page 51, on obtient les équations du mouvement, exprimées en u, v, w sous la forme suivante, où m représente, avons-nous dit, la densité, ou la masse de l'unité de volume du corps,

$$(34\,e) \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \right\} + X, \\ m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \right\} + Y, \\ m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\eta}\frac{\partial \upsilon}{\partial z} \right\} + Z; \end{aligned} \right.$$

et les conditions limites deviennent, en introduisant les valeurs (54 c) des tensions dans les équations (25) de la fin du § 12, page 46 :

$$(34\,f) \left\{ \begin{aligned} T\cos\varpi &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right)\cos p + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos q + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos r \right\} \\ T\cos\chi &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos p + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right)\cos q + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos r \right\} \\ T\cos\rho &= \frac{E}{2(1+\eta)}\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos p + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos q + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\eta}{1-2\eta}\upsilon\right)\cos r \right\} \end{aligned} \right.$$

---

mules de Lamé (i) de la Note de la fin de notre § 16, page 78 :

$$(i) \quad \left\{ \begin{aligned} & t_{xx} = (\lambda + 2\mu)\,\partial_x + \lambda\,\partial_y + \lambda\,\partial_z \quad ; \qquad t_{yz} = \mu\, g_{yz} \\ & t_{yy} = \ldots\ldots \quad , t_{zz} = \ldots\ldots \qquad ; \qquad t_{zx} = \ldots\ldots,\ t_{xy} = ,\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

qui deviennent celles de M. Kirchoff en faisant $\lambda = 2k\mu$. Elles donneraient également celles (l) de la même note, page 79, contenant, avec E, le coefficient d'élasticité $G = \mu$ de résistance au glissement transversal ou à la torsion, au lieu de contenir η, en y faisant

$$\frac{E}{2(1+\eta)} = G \quad ; \quad \frac{2\eta}{1-2\eta} = \frac{E-2G}{3G-E}.$$

Mais tout en continuant de se servir des formules de Clebsch, qui sont celles d'isotropie à double coefficient, il est bon de se souvenir que, d'après l'expérience et le raisonnement, elles ne doivent être appliquées aux corps élastiques *durs* qu'autant que des essais comparés d'extension longitudinale et de torsion autour d'un axe aussi longitudinal donneront $G = \frac{2}{5}E$ qui revient à $\lambda = \mu$ et que, lorsque le rapport de G à E est trouvé différent de $\frac{2}{5}$, les formules (s') d'hétérotropie ellipsoïdale ou d'amorphie hétérotrope du n° 25 de la même note, page 107, avec $n = 1$ ou environ, méritent plus de confiance.

J'examinerai d'abord ces équations dans quelques cas particuliers simples. Il faut considérer comme tels ceux dans lesquels la surface des corps est exprimée par une équation simple elle-même, comme celle du cylindre ou de la sphère. Un avantage capital de ces formes régulières consiste en ce qu'on peut imaginer des situations d'équilibre, ou des sortes de mouvements simples aussi, pour lesquels le calcul s'abrège considérablement. Ainsi, pour la sphère, on peut admettre, par exemple, que chaque particule soit déplacée seulement suivant le rayon qui lui correspond et que toutes les particules situées sur des sphères concentriques à la sphère donnée se comportent de la même manière. C'est ce qui arrivera toujours lorsque les forces agissant sur la surface seront normales et distribuées uniformément, tandis qu'aucune force extérieure X, Y, Z n'agira sur l'intérieur. La situation ne sera nullement changée si, à l'intérieur, il existe un espace vide limité par une surface sphérique concentrique, et si sur cette surface intérieure sont également appliquées des forces normales et uniformément distribuées.

Mais il est plus important d'examiner des corps en forme de tige, d'une section quelconque. On cherchera d'abord les conditions d'équilibre de ces corps, et on en déduira des bases rigoureuses pour la résolution approximative des problèmes qui ont, dans la pratique, un rôle si important (*).

Ensuite, j'ajouterai à cette étude des considérations sur les plaques planes d'épaisseur finie, et la recherche de quelques-uns de leurs états d'équilibre, états qui, relatifs aussi à des corps cylindriques, se distinguent essentiellement des premiers en ce que, dans les plaques, ce sont les faces extrêmes ou bases, et dans les tiges, les faces latérales qui sont supposées n'être soumises à aucune force extérieure, ou n'en supporter que de constantes et uniformes comme la pression atmosphérique. Les deux premiers problèmes ainsi traités formeront une transition pour arriver à l'importante théorie des déformations élastiques des corps qui ont une ou deux dimensions très petites; théorie qui fera l'objet de la seconde partie de ce livre (**).

(*) Ainsi que nous avons dit à la fin du § 5, ces problèmes importants, et dont les solutions sont presque les seules utiles, sur les tiges, seront résolus pour le cas plus général et ordinaire où leur matière n'est isotrope que transversalement.

(**) Même observation ou généralisation quant à la contexture.

§ 18. — Équilibre d'une enveloppe sphérique (sphère creuse) soumise à des pressions normales et uniformément réparties.

Si les mouvements ou les déplacements à l'intérieur d'une sphère sont tels que chaque point ne se déplace que sur le rayon qui lui correspond; si, en même temps, tous les points placés sur une même surface sphérique concentrique sont déplacés de la même manière, et si, enfin, le centre commun demeure en repos, alors, l'origine des coordonnées rectangles x, y, z étant ce centre, le parallélépipède construit sur celles d'un point après son déplacement *est semblable* à celui qui est construit sur les coordonnées de son emplacement initial, c'est-à-dire que les déplacements u, v, w du point sont proportionnels à ses coordonnées primitives x, y, z.

Si donc l'on pose

$$u = \rho x \quad , \qquad v = \rho y \quad , \qquad w = \rho z \; ,$$

ρ représente l'allongement de l'unité de longueur : car les coordonnées x, y, z sont devenues respectivement, après le déplacement, $x(1+\rho)$, $y\ (1+\rho)$, $z\ (1+\rho)$. La fraction numérique ρ doit être la même pour tous les points de chaque couche sphérique concentrique; ρ dépend donc seulement de la distance au centre qui est

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; ,$$

et, s'il y a mouvement, du temps. Le problème sera entièrement résolu si l'on détermine cette fonction ρ du rayon vecteur r.

Il faut introduire les expressions précédentes dans celles (34 c) de t_{xx}..... t_{xy} et dans celles (34 f) de T cos ω..... On remarquera d'abord qu'à cause de la valeur ci-dessus de r, on a

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \, .$$

Si, en ayant égard à ces relations, on détermine les valeurs des quotients différentiels de u, v, w, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \; , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; , \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xz}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; , \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \; , \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{yz}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{xz}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; , \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{yz}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} \; , \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{z^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \, .$$

Il en résulte immédiatement pour la dilatation $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$,

$$\upsilon = 3\rho + r\frac{\partial \rho}{\partial r},$$

et la substitution dans les équations (34 c) donne le tableau suivant des tensions :

$$(35)\quad \begin{cases} t_{xx}=\frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{x^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{(1+\eta)\rho+\eta r\frac{\partial \rho}{\partial r}}{1-2\eta}\right\}, & t_{yz}=\frac{E}{1+\eta}\frac{yz}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r};\\ t_{yy}=\frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{y^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{(1+\eta)\rho+\eta r\frac{\partial \rho}{\partial r}}{1-2\eta}\right\}, & t_{zx}=\frac{E}{1+\eta}\frac{zx}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r};\\ t_{zz}=\frac{E}{1+\eta}\left\{\frac{z^2}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{(1+\eta)\rho+\eta r\frac{\partial \rho}{\partial r}}{1-2\eta}\right\}, & t_{xy}=\frac{E}{1+\eta}\frac{xy}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}. \end{cases}$$

Si l'on introduit ces valeurs dans les équations du mouvement, après y avoir effacé X, Y, Z, puisqu'aucune force extérieure n'est supposée agir sur l'intérieur de la sphère, ces équations (30) du § 14 ou (34 e) du § 17 se réduisent à la seule équation qui suit, dont la solution déterminera ρ :

$$(36)\qquad m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\frac{E(1-\eta)}{(1-2\eta)(1+\eta)}\left\{\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right\}.$$

Pour les conditions concernant la surface, on les déduit des équations (34 f). Si l'on remarque que, d'après la supposition faite, les forces extérieures agissent normalement ; que, par conséquent, on a les angles $\varpi = p$, $\varkappa = q$, $\rho = r$, et que les cosinus des angles formés avec les axes par la normale, c'est-à-dire par le rayon de la sphère, sont égaux à $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, les équations (34 f) ou (25) se réduisent immédiatement à une seule :

$$(37)\qquad T=\frac{E}{(1+\eta)(1-2\eta)}\left\{(1+\eta)\rho+(1-\eta)r\frac{\partial \rho}{\partial r}\right\}.$$

Dans cette équation, T doit être considéré comme positif s'il représente une force de traction appliquée à la surface, et comme négatif s'il représente une pression. Lorsqu'il y a, dans l'intérieur de la sphère, un espace vide de forme sphérique, et qu'à l'intérieur de cet espace

il s'exerce une autre pression, on établira une équation toute semblable pour la surface interne, avec une valeur différente de T.

Examinons de plus près l'état d'équilibre. Pour cet état, le terme de l'équation (36), qui dépend de l'accélération, disparaît, et cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0\,;$$

ou bien, si l'on multiplie par r^4, à

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = 0\,.$$

L'intégration donne, c et c' étant deux constantes :

$$r^4 \frac{\partial \rho}{\partial r} = c\,,$$

et

(37 *a*) $$\rho = \int \frac{c\,dr}{r^4} = c' - \frac{c}{3\,r^3}\,.$$

En premier lieu, si nous considérons une sphère pleine, nous avons évidemment $c = 0$: car, sans cela, l'extension de l'unité de longueur au centre pour $r = 0$ serait infiniment grande. Donc

Dans le cas où la sphère est pleine, l'extension ou la contraction de l'unité de longueur, suivant la direction du rayon, est la même partout.

Si l'on désigne par $\mathfrak{p}$ la pression qui agit sur la surface, par unité superficielle, en faisant, dans l'équation (37), $T = -\mathfrak{p}$ et en remplaçant ρ par sa valeur c', l'on obtient

$$-\mathfrak{p} = \frac{E\,c'}{1 - 2\,\eta}\,,$$

ou

$$c' = \rho = -\frac{(1 - 2\eta)\,\mathfrak{p}}{E}\,.$$

D'après cela, les trois tensions t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, dont les valeurs sont données par les équations (35), deviennent égales entre elles et à $-\mathfrak{p}$; le corps entier se trouve dans un état de compression uniforme en tous ses points et dans toutes les directions.

Si, au lieu d'une sphère pleine, nous considérons une sphère creuse

dont le rayon extérieur soit a et le rayon intérieur a', et si nous supposons la surface intérieure soumise à une pression p′ ou à une tension —p′ par unité superficielle, nous devons, dans la valeur de ρ, conserver la constante c; et en faisant successivement $r=a$ et $r=a'$ dans l'équation (37), où nous aurons mis (37 a) $c' - \frac{c}{3r^3}$ pour ρ. il viendra

$$-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}} = \frac{c'}{1-2\eta} + \frac{2c}{3(1+\eta)} \cdot \frac{1}{a^3},$$

$$-\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{E}} = \frac{c'}{1-2\eta} + \frac{2c}{3(1+\eta)} \cdot \frac{1}{a'^3};$$

d'où nous déduirons

$$c' = \frac{(\mathrm{p}'a'^3 - \mathrm{p}a^3)(1-2\eta)}{\mathrm{E}(a^3 - a'^3)} \quad ; \qquad c = \frac{3(\mathrm{p}-\mathrm{p}')(1+\eta)a^3a'^3}{\mathrm{E}(a^3-a'^3)};$$

et, par conséquent :

$$\rho = \frac{(\mathrm{p}'a'^3 - \mathrm{p}a^3)(1-2\eta) + (\mathrm{p}'-\mathrm{p})(1+\eta)\dfrac{a^3a'^3}{r^3}}{\mathrm{E}(a^3-a'^3)}.$$

Dans ce cas, la sphère n'est plus soumise en chacun de ses points à un allongement ou à un raccourcissement constant dans la direction du rayon; mais l'*augmentation de l'unité de volume est la même partout.* En effet, cette proportion de l'augmentation de volume, qui est exprimée, comme on a trouvé, par

$$\upsilon = 3\rho + r\frac{\partial \rho}{\partial r}$$

se réduit à

$$\upsilon = 3c' = \frac{3(\mathrm{p}'a'^3 - \mathrm{p}a^3)(1-2\eta)}{\mathrm{E}(a^3-a'^3)}.$$

Cette grandeur de la dilatation cubique υ est positive ou négative, suivant que $\mathrm{p}'a'^3 \lesseqgtr \mathrm{p}a^3$; elle devient égale à zéro quand la pression intérieure et la pression extérieure sont en raison inverse des cubes des rayons des surfaces sur lesquelles elles s'exercent.

Dans le cas que nous considérons, l'ellipsoïde d'élasticité de chaque point doit évidemment être de révolution, et l'axe de révolution de cette surface coïncide avec la direction du rayon vecteur de ce point :

car, autour de chaque rayon, il y a une symétrie complète pour toutes les directions. On vérifie cette proposition de la façon la plus simple, en faisant passer l'un des axes coordonnés, celui des x, par exemple, par le point considéré, ou en dirigeant cet axe suivant son rayon vecteur. On a alors $y=z=0$ et $x=r$, et les équations (35) donnent, pour les valeurs des tensions, en y remplaçant ρ par sa valeur (37 a) ci-dessus :

$$\mathrm{t}_{xx}=\mathrm{E}\left\{\frac{c'}{1-2\eta}+\frac{2c}{3r^3(1+\eta)}\right\}=\frac{\mathrm{p}'a'^3\left(1-\frac{2a^3}{r^3}\right)-\mathrm{p}a^3\left(1-\frac{2a'^3}{r^3}\right)}{a^3-a'^3}$$

$$\mathrm{t}_{yy}=\mathrm{t}_{zz}=\mathrm{E}\left\{\frac{c'}{1-2\eta}-\frac{c}{3r^3(1+\eta)}\right\}=\frac{\mathrm{p}'a'^3\left(1+\frac{a^3}{r^3}\right)-\mathrm{p}a^3\left(1+\frac{a'^3}{r^3}\right)}{a^3-a'^3}$$

$$\mathrm{t}_{yz}=\mathrm{t}_{zx}=\mathrm{t}_{xy}=0.$$

Puisque les tensions tangentielles sont nulles, on a immédiatement les valeurs des tensions principales, et l'on voit que deux d'entre elles, celles qui sont perpendiculaires au rayon, sont égales l'une à l'autre.

Si p′, la pression intérieure, est très grande par rapport à p, les premiers termes des numérateurs des expressions précédentes l'emportent sur les seconds. Or, comme pour tous les points du corps on a $r<a$, le facteur $\left(1-\frac{2a^3}{r^3}\right)$ sera toujours négatif, et la tension t_{xx} qui s'exerce dans la direction du rayon sera aussi négative ; ce sera donc une pression. Mais les deux autres tensions principales t_{yy}, t_{zz} seront positives.

Si nous continuons à ne tenir compte que de ce qui vient des premiers termes des numérateurs de ces expressions des tensions, comme ces premiers termes prennent leurs plus grandes valeurs absolues pour $r=a$, nous avons

$$\mathrm{t}_{xx}=-\frac{\mathrm{p}'a'^3}{a^3-a'^3},\qquad \mathrm{t}_{yy}=\mathrm{t}_{zz}=\frac{2\mathrm{p}'a'^3}{a^3-a'^3}.$$

Les deux dernières tensions sont donc doubles de la force de pression. Dans le cas d'une pression intérieure très grande, la sphère tend à se rompre par *déchirure de la surface extérieure*.

§ 19. — Vibrations d'une sphère.

Lorsque l'on se propose de déterminer les oscillations d'un corps, on peut, d'après le principe de la fin du § 14, faire abstraction des forces extérieures, et par suite, égaler à zéro la pression qui agit sur la surface, si toutefois cette pression n'est pas variable avec le temps. Comme on l'a montré à ce § 14, les vibrations autour de la situation d'équilibre considérée au § précédent pour la sphère, sont, dans ce cas, rigoureusement identiques à celles que les molécules du corps exécutent autour de leurs positions naturelles lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur lui. On doit donc satisfaire à l'équation de mouvement (36) du § 18 qui a été tirée des équations plus générales (30) du § 14 et (34 e) du § 17,

$$(36 \text{ reproduite}) \qquad m\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{E(1-\eta)}{(1-2\eta)(1+\eta)}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right),$$

et en même temps à l'équation exprimant la condition limite pour la surface extérieure ainsi que pour la surface intérieure ; cette équation résulte de celle (37), page 115, T=..... du même § 18, où ρ représente pour chaque instant la proportion de la dilatation d'un rayon vecteur quelconque r, et dans laquelle on fait $T=0$, ce qui donne

$$(38) \qquad r\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1+\eta}{1-\eta}\rho = 0.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons la sphère pleine. L'équation (38), que nous venons d'écrire, n'existe alors que pour la surface extérieure.

A ces conditions, on doit ajouter celle que les déplacements du centre doivent nécessairement être égaux à zéro. On a ainsi des équations suffisantes pour déterminer ρ, et cette détermination se fait de la manière suivante.

Imaginons la fonction ρ exprimée sous la forme

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho = {} & R_1 \sin(k_1 t) + R_2 \sin(k_2 t) + R_3 \sin(k_3 t) + \ldots\ldots \\ & + S_1 \cos(k_1 t) + S_2 \cos(k_2 t) + S_3 \cos(k_3 t) + \ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients R et S sont seulement fonctions du rayon vecteur r et où les k sont des constantes à déterminer ultérieurement. Il est facile de se rendre compte, d'une manière claire, de la signification de cette

façon de représenter la fonction ρ. Un point qui primitivement est à une distance r du centre, s'en trouve, au bout du temps t, à la distance $r(1+\rho)$; il s'est donc éloigné de sa position d'équilibre de la longueur $r\rho$. Si maintenant, chacun des coefficients R, S qui entrent dans l'expression de ρ, reçoit, en même temps que r, une valeur constante pour un point déterminé, la longueur $r\rho$ dont le point s'est éloigné de sa position d'équilibre se trouve exprimée par une somme de binômes de la forme

$$r\mathrm{R}_n \sin(k_n t) + r\mathrm{S}_n \cos(k_n t),$$

où $r\mathrm{R}_n$ et $r\mathrm{S}_n$ sont des coefficients constants. On peut alors se représenter le mouvement tout entier comme la somme de mouvements partiels coexistants, pour chacun desquels l'éloignement par rapport à la position d'équilibre est représenté par l'expression binôme ci-dessus. Examinons de plus près cette expression.

D'abord, on voit qu'elle ne change pas de valeur si on y remplace t par $t+\frac{2\pi}{k_n}$, car l'argument du sinus et du cosinus qui y entrent n'étant augmenté que de 2π, ce sinus et ce cosinus restent identiquement les mêmes. L'expression considérée représente donc des déplacements qui se reproduisent indéfiniment les mêmes après chaque laps de temps $\frac{2\pi}{k_n}$; ou, en d'autres termes, elle représente des vibrations dont la durée périodique est $\frac{2\pi}{k_n}$ et qui se répètent indéfiniment avec la même amplitude.

Si l'on détermine un nombre M et un angle α tels que

$$r\mathrm{R}_n = \mathrm{M}\cos\alpha, \quad r\mathrm{S}_n = \mathrm{M}\sin\alpha,$$

l'expression binôme ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{M}\sin(k_n t + \alpha).$$

Sa valeur, comme on voit, ne peut varier que de $+\mathrm{M}$ à $-\mathrm{M}$, puisque le sinus ne peut varier que de $+1$ à -1. La quantité M qui, d'après les équations écrites tout à l'heure, est égale à

$$\mathrm{M} = \sqrt{r^2(\mathrm{R}_n^2 + \mathrm{S}_n^2)},$$

donne par conséquent l'amplitude des oscillations de part et d'autre

de la position d'équilibre, amplitude qu'elles ne peuvent dépasser. Cette quantité dépend de r; elle est, par suite, différente pour les différents points du corps, ce qui n'a pas lieu pour k_n qui donne par $\frac{2\pi}{k_n}$ la durée de l'oscillation. En résumé, l'expression (39), qui est une somme de termes ou de binômes semblables aux précédents, a la signification suivante : *Elle représente les oscillations exécutées dans la direction du rayon par chacun des points du corps comme une somme d'oscillations simples qui toutes ont la même durée de période* $\left(\frac{2\pi}{k_n}\right)$, *mais qui ont des amplitudes différentes.*

Imaginons l'air ambiant déplacé par les oscillations de la sphère; alors, à chaque vibration partielle du corps correspond une vibration partielle des particules d'air, et la vibration du corps se traduit dans l'air par un *son* dont l'élévation est donnée par le nombre de ces vibrations produites dans une seconde. Ce nombre est $\frac{k_n}{2\pi}$. La série (39) peut donc encore être considérée comme représentant une série de sons produits en même temps par le corps vibrant, et dont l'élévation est respectivement exprimée par les nombres de vibrations

$$\frac{k_1}{2\pi}, \quad \frac{k_2}{2\pi}, \quad \frac{k_3}{2\pi}, \ldots\ldots$$

Si maintenant on introduit l'expression (39), $\rho = \ldots\ldots$ dans l'équation (36), $m\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \ldots\ldots$ et dans l'équation à la surface (38), on pourra exprimer l'égalité des coefficients des sinus et des cosinus dans les deux membres de chacune de ces équations; car, puisque ces équations doivent être satisfaites quel que soit le temps t, elles doivent être indépendantes de t, et, par conséquent, les sinus et les cosinus doivent en disparaître. On obtient ainsi, par l'équation (36), la condition suivante pour chaque fonction R :

$$(40) \qquad -mk_n^2 R_n = \frac{E(1-\eta)}{(1-2\eta)(1+\eta)}\left(\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r}\right).$$

On obtient à la limite, par l'équation (38), la condition suivante :

$$(41) \qquad \frac{\partial R_n}{\partial r} + \frac{1+\eta}{1-\eta} R_n = 0 \quad \text{pour } r = a \;;$$

et, pour chaque fonction S, on obtient des équations semblables aux équations (40) et (41) en R.

On peut facilement intégrer l'équation (40) et en tirer la valeur de R_n en r de la manière suivante.

Posons, pour abréger :

$$(42) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{E(1-\eta)}{m(1-2\eta)(1+\eta)}}\,;$$

cette équation (40) devient

$$(43) \qquad \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r} = -\frac{k_n^2 R_n}{\alpha^2}.$$

Un calcul très simple montre que l'on satisfait toujours à une équation différentielle

$$(44) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{h}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{k^2\varphi}{\alpha^2}$$

en substituant à φ la série suivante que je désigne par $\varphi_h\left(\frac{kr}{\alpha}\right)$:

$$(45) \quad \varphi_h\left(\frac{kr}{\alpha}\right) = 1 - \frac{\frac{k^2r^2}{\alpha^2}}{2(h+1)} + \frac{\frac{k^4r^4}{\alpha^4}}{2.4(h+1)(h+3)} - \frac{\frac{k^6r^6}{\alpha^6}}{2.4.6(h+1)(h+3)(h+5)} + \dots$$

Comme l'équation (44) coïncide avec l'équation (43) si $h=4$, on voit que la valeur

$$R_n = \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)$$

est une intégrale de cette équation (43). Or l'équation (43) prend encore la forme (44) si l'on y fait, R'_n étant pris pour une nouvelle variable :

$$R_n = \frac{R'_n}{r^3}\,;$$

car il résulte de cette substitution, après réduction et multiplication par r^3, l'équation en R'_n :

$$\frac{\partial^2 R'_n}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial R'_n}{\partial r} = -\frac{k_n^2 R'_n}{\alpha^2}$$

qui coïncide avec l'équation (44) en faisant $h=-2$. Cette dernière

équation en R'_n est donc satisfaite si l'on pose

$$R'_n = \varphi_{-2}\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right).$$

D'où il suit que

$$R'' = \frac{1}{r^3}\varphi_{-2}\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)$$

est, comme $R_n = \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)$, une solution de l'équation (43).

Puisque l'équation (43) du second ordre est linéaire, elle a pour intégrale complète une somme de deux solutions particulières multipliées par des constantes arbitraires. On aura donc la forme générale suivante de R_n, en appelant A_n et B_n des constantes quelconques :

$$(46) \qquad R_n = A_n \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right) + \frac{B_n}{r^3}\varphi_{-2}\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right).$$

Si nous remarquons que, pour le centre de la sphère, le déplacement $r\rho$ doit être égal à zéro, nous verrons que le premier terme de cette expression (46) de R_n satisfait seul à cette condition. En effet, l'autre terme qui contient des puissances négatives de r devient infini pour $r = 0$; il doit donc disparaître, c'est-à-dire que la constante B_n doit être nulle. La valeur générale de R_n se réduit ainsi à

$$(47) \qquad R_n = A_n \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right).$$

Il reste maintenant à satisfaire à l'équation de condition (41) qui doit être vérifiée pour $r = a$.

Si l'on y introduit la valeur précédente de R_n, le facteur constant A_n disparaît, et il reste

$$(48) \qquad a\frac{\partial \varphi_4\left(\frac{k_n a}{\alpha}\right)}{\partial a} + \frac{1+\eta}{1-\eta}\varphi_4\left(\frac{k_n a}{\alpha}\right) = 0.$$

Cette équation, à l'exception de k_n, ne renferme que des quantités connues; donc les *racines de cette équation transcendante ou de degré infini sont les différentes grandeurs k_n que l'on doit introduire dans l'expression* (39) *de ρ; et elles donnent les durées des oscillations partielles élémentaires qui coexistent dans le mouvement de la sphère donnée.*

Les racines de cette équation (48), qui évidemment ne contient que les puissances paires de $\frac{k_n a}{\alpha}$, jouissent de deux propriétés communes aux racines de toutes les équations auxquelles conduisent des problèmes analogues d'oscillations, ainsi qu'on le verra au § suivant. Ces propriétés se rencontrent même dans une classe beaucoup plus étendue de problèmes de physique mathématique. D'abord, les valeurs de k^2_n que l'on en déduit sont toutes réelles et positives. Ensuite, si k_n et k_m désignent deux de ces racines de (48), on a toujours

$$(49) \qquad \int_0^a \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right) \cdot \varphi_4\left(\frac{k_m r}{\alpha}\right) r^4 dr = 0 \,, \qquad (*)$$

à la condition que m et n soient inégaux ou que k_m et k_n soient deux racines différentes. On peut voir facilement que tous les k^2_n sont à la fois réels et positifs, et que, par conséquent, les k_n eux-mêmes sont réels. En effet, l'équation (48) ordonnée par rapport aux puissances de $z = \frac{k_n a}{\alpha}$ prend la forme :

$$0 = 1 - \frac{z^2}{2.5}\left(1 + 2\,\frac{1-\eta}{1+\eta}\right) + \frac{z^4}{2.4.5.7}\left(1 + 4\,\frac{1-\eta}{1+\eta}\right) - \ldots\ldots$$

Comme les signes des termes changent constamment d'un terme au suivant, on en conclut, d'après les propriétés connues des équations, que toutes les racines sont positives.

Supposons déterminées toutes les racines k_n. Alors les R_n se trouvent aussi déterminés en tout à l'exception de leur facteur A_n. Les S_n qui doivent satisfaire aux mêmes équations que les R_n, ne se distingueront de ceux-ci que par la valeur de la constante; on peut donc poser

$$S_n = B_n \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right),$$

et, par conséquent, l'expression (39) qui donne la valeur de ρ prend la forme suivante :

$$(49\,a) \quad \rho = \Big\{ A_1 \sin(k_1 t) + B_1 \cos(k_1 t) \Big\} \varphi_4\left(\frac{k_1 r}{\alpha}\right) + \Big\{ A_2 \sin(k_2 t) + B_2 \cos(k_2 t) \Big\} \varphi_4\left(\frac{k_2 r}{\alpha}\right) + \ldots\ldots$$

(*) Cette relation (49) pourrait être démontrée, mais péniblement, en mettant pour les deux φ_4 leurs valeurs en série, (45) pour $h = 4$, et en effectuant les multiplications et intégrations. Mais on en trouvera, à la fin du § 20, une démonstration simple, s'étendant aux vibrations de corps d'autres formes.

Les diverses constantes A et B que contient encore cette expression se déterminent d'après l'état initial du corps élastique mis en vibration.

Pour que le mouvement soit complètement défini, il faut évidemment connaître les positions initiales de tous les points du corps, ainsi que leurs vitesses initiales. Supposons donc qu'à l'origine du mouvement, ou pour $t=0$, le déplacement $r\rho$ des divers points, dans la direction du rayon, soit représenté par une fonction donnée $f(r)$, et la vitesse $r\frac{\partial\rho}{\partial t}$ dans cette même direction, par une autre fonction donnée $F(r)$. Si nous égalons ces valeurs données de ρ et de $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ à celles qui résultent de l'équation précédente dans laquelle nous aurons fait $t=0$, nous aurons les équations :

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(r)}{r} &= B_1\varphi_4\left(\frac{k_1 r}{\alpha}\right)+B_2\varphi_4\left(\frac{k_2 r}{\alpha}\right)+B_3\varphi_4\left(\frac{k_3 r}{\alpha}\right)+\ldots\ldots \\ \frac{F(r)}{r} &= A_1k_1\varphi_4\left(\frac{k_1 r}{\alpha}\right)+A_2k_2\varphi_4\left(\frac{k_2 r}{\alpha}\right)+A_3k_3\varphi_4\left(\frac{k_3 r}{\alpha}\right)+\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

De ces équations, on peut tirer les valeurs de A et de B, exprimées par des intégrales définies, à l'aide de l'équation (49). Si, en effet, on multiplie chacune des équations (50) par $r^4\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)$, et si l'on intègre ensuite les deux membres entre 0 et a, tous les termes, à l'exception de ceux de l'indice n, s'annulent en vertu de l'équation (49), et l'on obtient

$$\int_0^a f(r)\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)r^3dr = B_n\int_0^a\left[\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)\right]^2 r^4dr$$

$$\int_0^a F(r)\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)r^3dr = k_nA_n\int_0\left[\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)\right]r^4dr$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes des constantes A_n, B_n :

$$B_n=\frac{\int_0^a f(r)\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)r^3dr}{\int_0^a\left[\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)\right]^2 r^4dr}\ ;\quad A_n=\frac{\int_0^a F(r)\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)r^3dr}{k_n\int_0^a\left[\varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)\right]^2 r^4dr}.$$

Ces formules donnent la solution complète du problème. On remarque que les dernières quantités déterminées au moyen de l'état initial du mouvement n'influent que sur les amplitudes des oscillations, et nulle-

ment sur leur durée. La durée des oscillations est au contraire entièrement déterminée par la forme géométrique et les dimensions du corps vibrant.

§ 20. — Sur les racines des équations transcendantes qui donnent la solution du problème des vibrations des corps élastiques.

Les vibrations d'un corps élastique quelconque, de quelque manière qu'elles se produisent, peuvent toujours être représentées sous la même forme qui a servi à représenter ci-dessus la quantité ρ, en tant qu'on les considère comme des sommes de vibrations partielles périodiques simples; c'est-à-dire qu'on peut toujours poser, pour les valeurs des déplacements u, v, w des points :

$$\begin{aligned}
u &= u_1 \sin(k_1 t) + u_2 \sin(k_2 t) + \ldots . \\
&\quad + u'_1 \cos(k_1 t) + u'_2 \cos(k_2 t) + \ldots . , \\
v &= v_1 \sin(k_1 t) + v_2 \sin(k_2 t) + \ldots . \\
&\quad + v'_1 \cos(k_1 t) + v'_2 \cos(k_2 t) + \ldots . , \\
w &= w_1 \sin(k_1 t) + w_2 \sin(k_2 t) + \ldots . \\
&\quad + w'_1 \cos(k_1 t) + w'_2 \cos(k_2 t) + \ldots . .
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les termes contenant les sinus et les cosinus du même argument représentent ensemble une vibration partielle. Comme on le reconnaît facilement, chaque système de ces termes, considéré isolément, doit satisfaire aux équations différentielles du mouvement (30) $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ldots\ldots$ du § 14. Si donc après avoir, dans ces équations, annulé X, Y, Z, on y remplace u, v, w par les composantes

$$u_n \sin(k_n t), \quad v_n \sin(k_n t), \quad w_n \sin(k_n t)$$

d'une oscillation partielle, on obtient aussi

$$t_{xx} = t_{xx}^{(n)} \sin(k_n t), \ldots\ldots\ldots \; t_{yz} = t_{yz}^{(n)} \sin(k_n t), \ldots\ldots\ldots ,$$

les $t^{(n)}$ étant les valeurs des t dans lesquelles on a introduit les u_n, v_n, w_n, au lieu des u, v, w.

Alors, tous les termes des équations différentielles (30) contiennent

le facteur sin $(k_n t)$; et en le faisant disparaître, on arrive à

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} -mk_n^2 u_n &= \frac{\partial t_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}^{(n)}}{\partial z}, \\ -mk_n^2 v_n &= \frac{\partial t_{xy}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}^{(n)}}{\partial z}, \\ -mk_n^2 w_n &= \frac{\partial t_{xz}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}^{(n)}}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, le temps t ne figure plus; les u_n, v_n, w_n et les $t^{(n)}$ ne sont fonctions que des coordonnées. Outre ces trois équations générales, on en obtient encore trois autres exprimant les conditions limites à la surface du corps, et qui se déduisent des équations (25), $t_{xx} \cos p + \ldots\ldots = T \cos \omega \ldots\ldots$ du § 13, en y égalant à zéro les pressions extérieures T, et en supposant que p, q, r représentent les angles formés avec les axes par la normale à la surface, dirigée vers l'extérieur. Si dans ces équations on remplace également u, v, w par les quantités désignant une vibration partielle, le facteur commun sin $(k_n t)$ se trouve encore dans tous les termes; et en le supprimant, il reste

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} t_{xx}^{(n)} \cos p + t_{xy}^{(n)} \cos q + t_{xz}^{(n)} \cos r &= 0, \\ t_{xy}^{(n)} \cos p + t_{yy}^{(n)} \cos q + t_{zy}^{(n)} \cos r &= 0, \\ t_{xz}^{(n)} \cos p + t_{yz}^{(n)} \cos q + t_{zz}^{(n)} \cos r &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations ne contiennent pas non plus le temps t.

Les équations (51) et (52) déterminent donc u_n, v_n, w_n en fonction des coordonnées, mais de telle sorte, cependant, que ces trois quantités peuvent être multipliées à la fois par une même constante arbitraire. En effet, ces équations ne changent pas si, au lieu de u_n, v_n, w_n, on y met $\mathrm{k}u_n$, $\mathrm{k}v_n$, $\mathrm{k}w_n$, k désignant un facteur constant quelconque : car ce facteur disparaît immédiatement comme commun à tous les termes.

Mais, pour la détermination des k_n^2 qui figurent dans les premiers membres des équations (51), les équations (51) et (52) conduisent, comme dans le § précédent, à une équation transcendante. *Cette équation transcendante a toujours ses racines réelles et positives*, comme on va le voir immédiatement.

Auparavant, il importe de remarquer que les quantités u'_n, v'_n, w'_n conduisent aux mêmes équations que u_n, v_n, w_n, et ne peuvent, par

conséquent, se distinguer de ces dernières quantités que par des facteurs constants arbitraires.

Considérons l'intégrale triple

$$\mathrm{J} = \iiint \left(u_n u_k + v_n v_k + w_n w_k\right) dx\,dy\,dz\,,$$

dans laquelle k et n représentent deux nombres différents, et qui doit être étendue au volume entier du corps vibrant. On va montrer que cette intégrale est nulle, quelles que soient les valeurs de k et de n, pourvu qu'elles soient différentes.

Si dans l'intégrale J on introduit, à la place de u_n, v_n, w_n, leurs valeurs tirées des équations (51), on a

$$-mk_n^2\mathrm{J} = \iiint \left\{\begin{aligned} & u_k\left(\frac{\partial \mathfrak{t}_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{xy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{xz}^{(n)}}{\partial z}\right) \\ + & v_k\left(\frac{\partial \mathfrak{t}_{yx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{yy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{yz}^{(n)}}{\partial z}\right) \\ + & w_k\left(\frac{\partial \mathfrak{t}_{zx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{zy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{t}_{zz}^{(n)}}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Si maintenant l'on traite cette intégrale identiquement de la même manière que l'intégrale semblable du § 16, p. 58 (qui représente le travail $\delta\mathrm{V}$ des forces intérieures), on obtiendra, comme à ce §, une intégrale double devant être étendue à toute *la surface* du corps, et une intégrale triple. Ces deux intégrales se déduisent des valeurs de $\delta\mathrm{U}_1$ et de $-\delta\mathrm{U}_2$ de ce § 16, pp. 60, 61, en remplaçant, dans leurs expressions, les $\mathfrak{t}$ par les $\mathfrak{t}^{(n)}$ et δu, δv, δw, par u_k, v_k, w_k. Alors, sans aller plus loin, on reconnaît qu'à cause des équations (52), la première de ces intégrales s'évanouit, et il reste seulement

$$mk_n^2\mathrm{J} = \iiint \left\{\begin{aligned} & \mathfrak{t}_{xx}^{(n)}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \mathfrak{t}_{yz}^{(n)}\left(\frac{\partial v_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial y}\right) \\ + & \mathfrak{t}_{yy}^{(n)}\frac{\partial v_k}{\partial y} + \mathfrak{t}_{zx}^{(n)}\left(\frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial z}\right) \\ + & \mathfrak{t}_{zz}^{(n)}\frac{\partial w_k}{\partial z} + \mathfrak{t}_{xy}^{(n)}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Si maintenant l'on considère que les $\mathfrak{t}^{(n)}$ sont des fonctions linéaires

des six quantités $\frac{\partial u_n}{\partial x}, \ldots \frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial y} \ldots$, et sont ainsi (même § 16) les quotients différentiels partiels, par rapport à ces quantités, d'une même fonction du second degré, l'on reconnaîtra que la fonction placée sous le signe d'intégration ne change pas quand on y remplace les u_k, v_k, w_k par les u_n, v_n, w_n. La même chose doit donc avoir lieu pour le premier membre de l'équation. Or, J ne change pas quand on y remplace n par k, tandis que k_n^2 se change en k_k^2. Si donc k et n sont différents, le premier membre ne peut conserver la même valeur qu'autant qu'il est toujours égal à zéro. On a donc nécessairement, lorsque k et n sont différents :

$$(53) \qquad \iiint (u_n u_k + v_n v_k + w_n w_k)\, dx dy dz = 0 ,$$

comme nous l'avons avancé.

Maintenant, si l'équation transcendante qui a pour racines les k_n^2 avait des racines imaginaires, à chacune d'elles répondrait sa conjuguée, et l'on peut prendre k_n^2 et k_k^2 pour deux de ces racines conjuguées. Par suite, u_n et u_k seront aussi des grandeurs imaginaires conjuguées, et il en sera de même de v_n et v_k, de w_n et w_k. Or le produit de deux imaginaires conjuguées de la forme $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ (i étant $\sqrt{-1}$), est égal à $\alpha^2 + \beta^2$, et est par conséquent positif; l'intégrale (53) représenterait donc une somme de nombres positifs qui ne peut être égale à zéro. Donc k^2 ne peut jamais être un nombre imaginaire binôme.

Mais, de plus, tous les k^2 doivent aussi être positifs, et par conséquent, les k eux-mêmes doivent être réels. En effet, si l'on opère, comme on vient de le faire sur l'intégrale J, sur une autre intégrale

$$J' = \iiint (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)\, dx dy dz ,$$

dans laquelle les u_n, v_n, w_n sont nécessairement réels à cause de la réalité démontrée des k_n^2, on obtient de la même manière que tout à l'heure la valeur de $mk_n^2\,J'$, exprimée par l'intégrale triple ci-dessus, dans laquelle les u_k, v_k, w_k sont remplacés par les u_n, v_n, w_n. On reconnaît ensuite facilement que l'expression sous le signe d'intégration n'est autre chose que le double de la fonction F de l'expression (54 a) du § 16, page 62, dans laquelle on aurait remplacé u, v, w, par u_n, v_n,

w_n, fonction homogène du second degré des six déformations élémentaires ∂, g, ou bien des six composantes de tensions $t_{xx}, \ldots t_{xy}$, donnant la valeur du travail des tensions qui ont produit ces déformations pour l'unité de volume de l'élément $dxdydz$ du corps. On a donc

$$(54) \qquad m k_n^2 J' = 2 \iiint F\, dxdydz .$$

Or, la différentielle, prise en signe contraire, de l'intégrale triple du second membre, exprime le travail des forces intérieures pour une déformation. L'intégrale elle-même représente donc, pris en signe contraire, le travail des forces intérieures, lorsque les points de ce corps sont déplacés de leurs positions d'équilibre, et que ces déplacements sont exprimés par u_n, v_n, w_n. Ce travail est, de sa nature, négatif, et exactement opposé au travail positif des forces extérieures, qui lui est égal, et qui est nécessaire pour produire les déplacemements. La triple intégrale est donc nécessairement positive. Or J', qui est une somme de termes positifs, est aussi positif; donc k_n^2 doit nécessairement être positif, ce qu'il fallait démontrer.

Si k_n pouvait devenir imaginaire, sin $(k_n t)$ et cos $(k_n t)$ deviendraient aussi imaginaires, et ces fonctions trigonométriques se développeraient en des termes qui contiendraient le temps en exponentielle à exposant réel, c'est-à-dire en des termes qui, lorsque le temps augmenterait, devraient tendre vers zéro ou s'accroître indéfiniment. La véritable signification de ce qui vient d'être démontré est donc ceci : *Les mouvements intérieurs d'un corps élastique, si ce corps est entièrement abandonné à lui-même, ne peuvent, avec le temps, ni augmenter ni diminuer; mais, au contraire, tous les mouvements* partiels *s'exécutent en périodes d'égale durée entre des limites invariables qu'ils ne peuvent dépasser, mais qu'ils atteignent toujours de nouveau périodiquement.*

L'application de l'équation (53), $\int\int\int = 0$, au problème posé au § 19 qui précède, se fait très simplement. Dans ce problème les déplacements sont :

$$u = px , \qquad v = py , \qquad w = pz ,$$

et peuvent être exprimés, d'après les notations de l'équation (39) $\rho = R_1 \sin(k_1 t) + R_2 \sin(k_2 t) + \ldots$, comme il suit :

$$u_n = R_n x , \qquad v_n = R_n y , \qquad w_n = R_n z ,$$
$$u_h = R_h x , \qquad v_h = R_h y , \qquad w_h = R_h z .$$

Comme on a d'ailleurs

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

l'expression qui, multipliée par $dxdydz$, est à intégrer dans l'équation (53), $\int\int\int (\ldots\ldots) dxdydz = 0$, prend la valeur

$$u_n u_k + v_n v_k + w_n w_k = R_n R_k r^2 ,$$

qui ne dépend plus que de r.

Pour intégrer cette expression multipliée par $dxdydz$ et étendue au corps entier, on peut d'abord intégrer sur une couche sphérique dont le rayon est r et dont l'épaisseur est dr. Comme $R_n\, R_k\, r^2$ a la même valeur pour tous ses points, on obtient la valeur de l'intégrale pour toute cette même couche sphérique en multipliant $R_n\, R_k\, r^2$ par son volume $4\pi r^2\, dr$. On a donc, en supprimant le facteur 4π, puis en ajoutant les intégrales relatives à toutes les couches sphériques, et en tenant compte de l'équation (53),

$$(49\,a) \qquad \int_0^a R_n R_k r^4 dr = 0 . \qquad (^*)$$

(*) En multipliant par le rayon vecteur r l'expression (49 a) de ρ, p. 124, on a le déplacement moléculaire à la distance r du centre; et en différentiant le produit par rapport au temps t on a la vitesse à cette même distance r. Si on l'appelle V, on obtient une expression qui peut être écrite

$$V = \frac{\partial r\rho}{\partial t} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[A_n k_n \cos(k_n t) - B_n k_n \sin(k_n t) \right] r \varphi_4 \left(\frac{k_n r}{\alpha} \right) .$$

Si, après avoir élevé cette expression au carré, on la multiplie par $m.\, 2\pi r^2 dr$, moitié de la masse de la couche sphérique d'épaisseur dr, qui est animée de la vitesse V, et si l'on intègre de $r = 0$ à $r = a$, on a la demi-force vive de la sphère entière. En l'appelant Φ, et en désignant par T_n le binôme entre parenthèses qui est une fonction de t seul, l'on a une expression

$$\Phi = 2\pi m \sum T_n^2 \int_0^a r^4 dr \left[\varphi_4 \left(\frac{k_n r}{\alpha} \right) \right]^2 + 4\pi m \sum T_n T_{n'} \int_0^a r^4 dr\, \varphi_4 \left(\frac{k_n r}{\alpha} \right) \varphi_4 \left(\frac{k_{n'} r}{\alpha} \right) ,$$

le premier Σ comprenant tout ce qui vient des carrés des divers termes de l'expression de la vitesse V, et le second comprenant tout ce qui vient de leurs doubles produits ; de sorte que ce second Σ s'étend à toutes les combinaisons deux à deux des indices inégaux n, n' de k. Or, la seconde des

Si, au lieu de R_n et de R_k, on met leurs valeurs tirées de l'équation (47), $R_k = A_k \varphi_4\left(\frac{k_n r}{\alpha}\right)$, on trouve l'équation (49) du § 19, qui n'avait pas été démontrée.

§ 21. — Les problèmes de l'équilibre des corps élastiques sont complètement déterminés.

De ce qui précède on peut, de la manière la plus simple, déduire une démonstration de ce fait général, que les problèmes concernant l'équilibre des corps élastiques sont entièrement déterminés, si les forces extérieures agissant tant sur l'intérieur du corps que sur sa surface, sont données.

Admettons, en effet, que le problème de l'équilibre comporte deux solutions différentes. Soit l'une de ces deux solutions représentée par les déplacements u, v, w, l'autre par les déplacements u', v', w'. Écrivons les équations de condition du problème une première fois avec u, v, w, une seconde fois avec u', v', w'. Soustrayons l'une de l'autre les équations correspondantes des deux systèmes, nous obtiendrons évidemment un système semblable dans lequel, à la place des variables u, v, w, se trouveront les différences $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$. Mais les forces extérieures qui dans les deux systèmes étaient repré-

---

deux intégrales $\int_0^a$ est zéro d'après l'équation (49), qui a été démontrée au § 19 : Φ se réduit donc à la première de ses deux parties. Donc la *demi-force vive due au mouvement vibratoire total, qui résulte de la superposition d'une infinité de mouvements vibratoires simples ou pendulaires, est égale, à chaque instant, à la somme des demi-forces vives dues à ces mouvements vibratoires composants.*

J'ai reconnu, en 1865-66, que ce théorème s'observe dans le mouvement vibratoire de solides de formes diverses, autres que la forme sphérique, et dont quelques-uns étaient réunis à des masses rigides, vibrant avec eux. Cela tient à ce que, pour tous, il y a une équation comme (49) ou (49 *a*) qui annule la somme des doubles produits des termes entrant dans la composition du carré de la vitesse résultante (*Comptes rendus*, 3 juillet 1865, p. 23, et 28 mai 1866, p. 195). Sur mon invitation, M. Félix Lucas en a cherché une démonstration générale qui a été insérée au tome XXII des *Savants étrangers.* (Voyez aussi un article : *Partage de la force vive*, etc..., aux *Comptes rendus*, 2 et 9 décembre 1872, t. LXXV, p. 1425 et 1567.)

sentées identiquement par les mêmes termes, auront complètement disparu par la soustraction. Ainsi

$$u - u', \quad v - v', \quad w - w',$$

sont des déplacements qui peuvent se produire dans le corps sans qu'aucune force extérieure n'agisse ni sur l'intérieur, ni sur la surface. Il suffira de montrer que de tels déplacements sont nécessairement nuls pour avoir prouvé que

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w',$$

c'est-à-dire que les deux solutions admises n'en font qu'une et qu'il n'y a qu'un seul et unique état d'équilibre.

Admettons donc qu'aucune force extérieure ne soit appliquée au corps; alors, les déplacements qui peuvent s'y produire doivent satisfaire aux mêmes équations (51) $-mk_n^2 u_n = \frac{\partial t_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \ldots\ldots$ et (52), $t_{xx}^{(n)} \cos p + \ldots\ldots = 0$, employées dans le § précédent. Seulement les premiers membres des équations (51) doivent être remplacés par zéro (*); ou, en d'autres termes, nous aurons les équations convenables pour le cas qui nous occupe, si dans les équations du § précédent nous posons $k_n = 0$. L'équation (54) $mk_n^2 J' = \int\int\int \ldots\ldots$, où F représente le travail de déformation par unité de volume de l'élément $dx\,dy\,dz$ du corps, se réduit immédiatement à

$$\iiint F\,dxdydz = 0\,.$$

D'après sa signification, on peut reconnaître que cette intégrale a toujours une valeur positive, quelles que soient les fonctions u, v, w. En effet cette intégrale exprime le travail extérieur nécessaire à la production de ces déplacements. Mais ce caractère de l'intégrale s'applique aussi, nécessairement, à la fonction F, attendu qu'on peut choisir le corps à volonté, et par conséquent le réduire à un espace infiniment petit pour lequel cette intégrale n'est autre chose que F

(*) Car ces premiers membres $-mk_n^2 u_u, -mk_n^2 v_n, mk_n^2 w_n$ provenaient de ceux des équations de mouvement (30) $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, qui n'existent pas dans les questions d'équilibre.

multiplié par le volume, et par conséquent, dans tous les cas, par une grandeur positive; F est donc nécessairement positive.

Comme l'intégrale dont il s'agit est une somme de quantités positives, elle ne peut s'annuler qu'avec ces quantités elles-mêmes. Il faut donc que l'on ait, pour les déplacements en question, $F=0$. Et comme F est une fonction essentiellement positive, cela ne peut arriver que si les termes dont elle se compose s'évanouissent tous ensemble, c'est-à-dire si on a, à la fois,

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\\ &\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \end{aligned}\right.$$

Considérons par exemple la fonction u. D'après la première équation, elle ne peut contenir x, de même que v ne peut contenir y, ni w, z. De plus la dernière équation montre que $\frac{\partial u}{\partial y}$ ne peut contenir y, de sorte que u doit être linéaire en y. L'avant-dernière équation montre de même que u doit être linéaire en z. On peut faire un raisonnement analogue sur les fonctions v et w, et poser alors, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ étant des quantités constantes :

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} u&=a+\gamma y-\beta z,\\ v&=b+\alpha z-\gamma x,\\ w&=c+\beta x-\alpha y. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients de x, y, z dans les seconds membres ont dû être pris deux à deux égaux et de signes contraires pour satisfaire aux trois dernières équations (55).

Les équations (56) ne représentent rien autre chose que les déplacements que pourrait prendre le corps s'il était considéré comme absolument rigide. On peut facilement s'en assurer. Si, en effet, des six constantes $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, on en fait disparaître cinq, en ne conservant que a, on a $v=w=0$, $u=a$. Tous les points du corps sont donc déplacés, parallèlement aux x, de la distance a. De même b indique un déplacement du corps parallèlement à l'axe des y, et c un déplacement parallèle à l'axe des z. Si, au contraire, on ne laisse subsister que α, on a

$$u=0, \quad v=\alpha z, \quad w=-\alpha y;$$

les points de l'axe des x pour lesquels $z=0$, $y=0$, sont donc demeurés en repos; mais si nous considérons un point éloigné de l'axe des x d'une distance r, formant primitivement avec la direction des z un angle φ, et dont les coordonnées sont par conséquent

$$z = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,,$$

et si nous donnons au corps une petite rotation α autour de l'axe des x, les coordonnées de ce point deviendront

$$z + w = r\cos(\varphi + \alpha)\,,$$
$$y + v = r\sin(\varphi + \alpha)\,;$$

ou bien, si l'on suppose α très petit, de sorte que son sinus puisse être remplacé par α et son cosinus par 1,

$$z + w = r(\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)\,,$$
$$y + v = r(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)\,.$$

En retranchant respectivement les valeurs ci-dessus de z et de y, il reste

$$w = -\alpha r\sin\varphi = -\alpha y$$
$$v = \alpha r\cos\alpha = \alpha z\,.$$

Les déplacements trouvés ci-dessus correspondent donc à une petite rotation autour de l'axe des x. De même, β et γ représentent des rotations autour des axes des y et des z. Par conséquent les équations (56) n'indiquent pas autre chose que l'ensemble des déplacements que pourrait prendre le corps supposé rigide.

Il résulte de là que *les problèmes de l'équilibre des corps élastiques sont complètement déterminés lorsque l'on ajoute, aux équations différentielles exprimant cet équilibre, autant de conditions qu'il en faut pour déterminer complètement la position d'un corps rigide.*

Ces conditions sont les suivantes :

1° Qu'un point du corps demeure fixe, en sorte que, pour ce point, u, v, w disparaissent;

2° Qu'un élément de ligne mené par ce point conserve sa direction;

3° Qu'un élément de surface, infiniment petit, passant par cet élément de ligne, conserve sa direction.

Avec ces conditions complémentaires, le problème se trouvera déterminé sans aucune ambiguïté.

La situation du système des coordonnés n'est déterminée que par

des nombres finis, c'est-à-dire par des grandeurs vis-à-vis desquelles on néglige les petits déplacements ; c'est cette situation qui donne d'abord les éléments de détermination du problème, qu'on vient de rappeler. Si, après que les déplacements se sont produits, on les prend en considération, on devra apporter, dans ces éléments de détermination, de petites corrections qui seront données par ce qui précède. Ces corrections, à vrai dire, ne se rapportent qu'à la détermination du système des coordonnées, et il n'y a qu'une illusion dans l'apparence que le corps pourrait être un peu déplacé sans que l'équilibre cessât d'exister, ce qui, évidemment, est une absurdité. Ce n'est pas le corps, mais c'est la position du système de coordonnées par rapport au corps qui peut être un peu déplacée, sans que la forme des conditions d'équilibre change le moins du monde; et c'est seulement cette circonstance qui est indiquée par l'arbitraire dont restent affectées les formules (56).

CHAPITRE II

CORPS PRISMATIQUES OU CYLINDRIQUES EN GÉNÉRAL

---

§ 22. — Équilibre des corps cylindriques ou prismatiques. — Problème de Saint-Venant (*Das de Saint-Venantsche Problem*).

Les corps cylindriques ont dans les applications une telle importance que l'on comprend que l'on ait cherché à établir d'une manière complète la théorie des déformations de ces corps. C'est aux recherches de M. de Saint-Venant que l'on est redevable d'une connaissance plus approfondie des phénomènes qu'ils présentent (*). Partant de points de vue qui lui sont particuliers, de Saint-Venant a appris à connaître une série d'états d'équilibre de corps en général et de corps prismatiques en particulier. Il va être donné plus loin un exposé de ses travaux, modifié dans les points principaux qui ont rapport à l'objet que nous avons en vue.

Considérons un corps cylindrique ou prismatique de section quelconque, et d'une substance homogène qui soit, comme nous avons dit à la fin du § 3, d'égale contexture dans les divers sens transversaux ou perpendiculaires aux arêtes de sa surface et pouvant, du reste, offrir une contexture et des résistances différentes dans le sens longitudinal

---

(*) Mémoire *sur la torsion des prismes*, au tome XVI (1855) des *Savants étrangers*. Mémoire *sur la flexion des prismes*, au *Journal* de Liouville, 2e série, t. I (1856). (Note de Clebsch).

Ces deux Mémoires ont été lus à l'Académie, l'un le 13 juin 1853 (*torsion*), l'autre le 20 juillet 1855 (*flexion*). Un premier extrait de celui-ci avait paru le 20 novembre 1854 aux *Comptes rendus des séances*, t. XXXIX, p. 1027. Voyez au même recueil, t. XXXVI, p. 1028 et t. XLI, p. 143. Voyez encore le lumineux rapport de M. Lamé, 26 décembre 1853, t. XXXVII, p. 984, et aussi la troisième édition, annotée (1864), du *Résumé des Leçons de Navier* sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.

ou parallèle aux mêmes arêtes (*). Conformément aux conditions rappelées à la fin du § précédent, supposons le corps fixé de telle manière que dans l'une des deux bases ou sections transversales qui le limitent, un point, un élément de ligne et un élément de surface soient assujettis à conserver des positions données. Prenons l'axe des z parallèle aux arêtes du cylindre, de manière que les sections transversales soient primitivement parallèles au plan des xy; prenons pour origine le point de la base ou section extrême dont on vient de parler, qui doit rester fixe; et prenons, pour axe des x, la direction de l'élément de ligne dont la position est également invariable; l'élément de surface de la même base, voisin de l'origine, devra encore, après le déplacement, se trouver dans le plan xy. D'après cette hypothèse on voit que

pour $\qquad x=0, \quad y=0, \quad z=0,$
on doit avoir $\qquad u=0, \quad v=0, \quad w=0.$

Si dans cette section extrême, qui forme le plan des xy, nous considérons un point voisin de l'origine et ayant pour coordonnées dx, dy, ses déplacements seront exprimés, les indices 0 signifiant des quantités particularisées pour $z=0$, par

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 dy,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 dy,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 dy.$$

Puisque ce point doit demeurer dans le plan xy, son déplacement, dans la direction des z, doit être nul; on a donc nécessairement

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Si l'on suppose que ce même point se trouve situé sur l'axe des x,

(*) Ici l'auteur disait : « Un corps d'une substance non cristalline (isotrope) »; ajoutant qu'il ne faisait cette hypothèse que pour simplifier, « car des considérations semblables seraient applicables aux corps cristallins (hétérotropes) ».

Nous avons dû remplacer cette phrase par une autre, en conformité avec ce que nous avons dit au commencement de notre *Avertissement*, et aussi dans une note à la fin du § 5, en exprimant alors que les formules étaient tout aussi simples pour les prismes ou cylindres constitués d'une autre manière longitudinalement que transversalement, et qui sont les seuls à peu près qu'offrent la nature et l'industrie.

c'est-à-dire si l'on fait $dy=0$, il devra, après son déplacement, rester sur l'axe des x, et, par conséquent, son déplacement dans la direction des y doit être nul. On doit donc avoir aussi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0=0.$$

En résumé, pour le point fixe choisi, les conditions suivantes doivent être remplies :

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{pour} & x=0, & y=0, & z=0, \\ \text{on doit avoir} & u=0, & v=0, & w=0, \\ & \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=0. \end{array}\right.$$

Nous supposerons qu'*aucune force extérieure n'agisse sur la surface latérale du prisme ou cylindre, ni sur les points de son intérieur*, en sorte que nous abstrayons ici la pesanteur, dont l'influence est, au reste, le plus souvent négligeable. Les forces extérieures qui doivent déterminer l'état de ce corps, ne s'exerceront donc que sur les divers éléments superficiels des bases : nous considérerons comme inconnu leur mode d'action et de distribution sur ces éléments, et nous chercherons quel il doit être sur la base libre, pour que les conditions qui seront supposées puissent être remplies ; mais il nous faut, pour en faire le calcul, un nouvel élément de détermination.

Imaginons, à cet effet, le corps entier comme formé de fibres perpendiculaires aux sections et dont la direction primitive est parallèle aux génératrices du cylindre. Les faces des fibres limites qui font partie de la surface extérieure latérale, ne sont soumises, d'après nos suppositions, à aucune traction ni pression. Pour exprimer cette condition, nous devons, dans les trois équations générales (25), p. 46, $t_{xx}\cos p + \ldots\ldots = T\cos\varpi, \ldots\ldots$ relatives aux surfaces extérieures des corps, faire T, la traction extérieure, égale à zéro, et $\cos r$ nul aussi, puisque la normale à la surface extérieure, dont p, q, r, représentent les angles avec les x, y, z est, ici, perpendiculaire à l'axe des z, en sorte que r est un angle droit. On a, par suite :

$$\cos q=\sin p.$$

Les conditions limites (25) pour la surface latérale sont donc les

suivantes :

$$(57\,a)\quad \begin{cases} \mathrm{t}_{xx}\cos p + \mathrm{t}_{xy}\sin p = 0, \\ \mathrm{t}_{yx}\cos p + \mathrm{t}_{yy}\sin p = 0, \\ \mathrm{t}_{zx}\cos p + \mathrm{t}_{zy}\sin p = 0. \end{cases}$$

Remarquons que les deux premières de ces équations (57 *a*) sont toujours satisfaites d'elles-mêmes pour certains états du cylindre ou prisme dans lesquels les fibres seraient supposées n'exercer les unes sur les autres ni pression ni traction *latérale*, soit dans les sens des x, y, soit aussi dans les sens qui leur sont intermédiaires, en sorte qu'on aurait

$$(57\,b)\qquad \mathrm{t}_{xx} = 0,\quad \mathrm{t}_{yy} = 0,\quad \mathrm{t}_{xy} = 0 \text{ partout.}$$

Il est naturel de se demander à quelles conditions ces égalités (57 *b*) auraient lieu ; on peut donc se poser le problème suivant :

Quels sont, pour un corps cylindrique ou prismatique qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure agissant soit sur sa surface latérale, soit sur les molécules de son intérieur, les états d'équilibre dans lesquels les différentes fibres longitudinales ne supportent aucune pression latérale *ou* perpendiculaire à leur longueur? *Quelles sont les forces qui doivent agir sur la surface extrême ou base libre pour produire des états semblables?*

Tel est le problème de *Saint-Venant* (*). Ce problème, comme on le verra, peut se résoudre de diverses manières et comporte plusieurs solutions différentes présentant cette particularité commune, que les sections infinitésimales primitivement rectangles des différentes fibres du corps demeurent des rectangles, et que les contractions latérales de ces fibres, dans deux sens, sont rigoureusement celles qui, dans les prismes isolés, correspondent à leurs extensions longitudinales.

D'après ce qui précède, $\frac{\partial w}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ étaient les extensions de l'unité de longueur suivant les directions respectives z de la longueur du prisme, ou de ses fibres, et x, y, de ses dimensions transversales ou latérales. Comme maintenant il n'y a plus, vu $\mathrm{t}_{xx} = 0$, $\mathrm{t}_{yy} = 0$, de pression latérale, chaque portion de fibre est dans le cas du petit parallélépipède du § 2, tiré sur ses bases par des forces t_{zz} et libre

(*) Nous dirons, dans une Note à la fin du présent § 22, comment nous avons été conduit à nous poser les divers cas de ce problème, dont l'exacte solution analytique est possible et peut s'appliquer, avec une approximation très suffisante, aux problèmes usuels des tiges, rebelles aux solutions rigoureuses, qui d'ailleurs, si elles étaient trouvées, seraient d'une application impossible, comme on verra. (Note de la fin du § 28.)

sur ses autres faces. On a donc, en vertu des formules $p = E\partial$ et $\partial' = -\eta\partial$ de ce §,

$$(58)\qquad t_{zz} = E\frac{\partial w}{\partial z}$$

et $\eta : 1$ étant, comme au même § 2, le rapport des contractions latérales aux extensions longitudinales,

$$(59)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\eta\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Pour exprimer, maintenant, que l'élément de surface de la section reste rectangulaire, ce qui revient à faire $g_{xy} = 0$ ou $t_{xy} = 0$, on devra poser (§ 13, p. 49)

$$(60)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Par conséquent, les équations (30), § 14, p. 51, dont les premiers membres $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, ainsi que X, Y, Z, doivent être annulés, deviennent :

$$(60\,a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Si, dans la troisième de ces équations, on met pour t_{zz} sa valeur (58), $E\frac{\partial w}{\partial z}$, et si dans toutes trois on met pour les deux autres tensions leurs valeurs (34 *c*) du commencement du § 17, p. 111, où nous écrirons pour plus de généralité, au lieu de $\frac{E}{2(1+\eta)}$, le coefficient d'élasticité de glissement G du § 3 [expressions (1) et (1 *a*), p. 12], en laissant indéterminé son rapport à E et à η, ce qui donne

$$(60\,b)\qquad t_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad t_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

et ce qui embrasse, avons-nous dit (Avertissement), le cas d'un rapport quelconque des élasticités ; enfin si, après la substitution dans la troisième des équations qu'on vient d'écrire, on la réduit en ayant

égard à (59), l'on a

$$(61) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \\ \left(\dfrac{E}{G} - 2\eta\right) \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Des trois équations de conditions limites (57 *a*), il ne reste, avons-nous dit, qu'une seule, savoir :

$$(62) \qquad 0 = t_{xz} \cos p + t_{yz} \sin p;$$

ou bien, eu égard aux valeurs de t_{xz}, t_{yz} que nous venons d'écrire,

$$(62\,a) \qquad 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos p + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \sin p,$$

qui doit être satisfaite à la surface extérieure du cylindre.

L'ensemble des équations (58) à (62) va être étudié d'une manière approfondie dans les §§ suivants. (*)

(*) **NOTE FINALE DU § 22.**

Navier, qui a fondé, en 1821, la théorie mathématique de l'élasticité des solides, s'était contenté d'établir les équations différentielles de leur équilibre intérieur, et, en même temps, celles des conditions à remplir à leur surface, qui donnent implicitement les six formules de composantes rectangulaires de tensions pour les corps isotropes.

Cauchy et Poisson, en 1828, et, vers le même temps, Lamé avec la collaboration de Clapeyron, après avoir traité le même sujet par des considérations un peu différentes, s'occupèrent aussitôt d'en appliquer les formules aux problèmes de déformation des tiges prismatiques ou cylindriques.

Ils résolurent facilement celui de leur extension longitudinale, accompagnée de contractions transversales, sous l'action de forces de traction supposées uniformément réparties dans toute l'étendue de leurs bases, et un autre problème, le plus facile après celui-là, savoir, le problème de la torsion uniforme d'une tige à *section circulaire*, supposée n'être sollicitée qu'aux divers points de ses bases par des forces *tangentielles*, ou agissant dans leurs plans, perpendiculairement aux rayons vecteurs des points et d'intensités proportionnelles à ces rayons; car ce sont là des conditions d'application et de distribution des forces, nécessaires pour que l'extension et la torsion soient ce qu'on les suppose, ou pour que les deux solutions qu'elles présentent soient exactes.

Pour la flexion, Lamé, qui ne se contentait que de solutions rigoureuses, *n'en a jamais donné aucune*, pas même dans son livre de 1852; il y men-

tionne seulement, à sa douzième Leçon, ses longues et infructueuses recherches de *l'état d'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangulaire dont les six faces seraient soumises à des forces données*, problème des plus importants, selon lui, et à la solution duquel il a même inutilement convié tout le monde savant, en déterminant l'Académie à le proposer pour sujet de grand prix à diverses reprises depuis 1846 jusqu'à 1858 (*).

Poisson et Cauchy, pour ce problème difficile de la flexion, tentèrent une solution seulement approximative, par une méthode dont ils avaient peut-être puisé le modèle dans le Mémoire de Lagrange *sur le mouvement des liquides des canaux peu profonds* (*Ac. de Berlin*, 1781, nº 32, ou *Méc. an.*, 2e partie, nº 25 de la section XI) et qui, appliquée aux déformations des prismes solides dont les dimensions latérales sont supposées très petites, consiste à admettre que les tensions et les dilatations, aux divers points de chacune de leurs sections, « sont exprimables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives des coordonnées transversales » comptées à partir des centres. Ils arrivèrent ainsi à deux formules principales, conformes à celles de la théorie ordinaire de la flexion.

Mais, outre que cette méthode se base sur une hypothèse arbitraire, et qui laisse masqués, ou inexactement appréciés, les glissements qui accompagnent nécessairement toute flexion *inégale* ou non circulaire, elle comporte des suppressions de termes dont rien ne justifie l'approximation, et qui conduisent même à des contradictions quand on les opère de différentes manières.

C'est ce qui se manifeste surtout dans l'emploi, du reste fort ingénieux et déjà utile, qu'en a fait Cauchy pour chercher la loi de la torsion d'un prisme rectangulaire. En effet, outre que l'on trouve ainsi, lorsque la base est carrée, une expression dont un raisonnement simple démontre l'erreur, on peut voir que, quand la base est un rectangle quelconque, si l'on prend des termes de plus dans les séries posées, l'on arrive (Voy. *Comptes rendus*, 20 novembre 1843, t. XVII, § IV, p. 1189; 22 février 1847, t. XXIV, p. 265, 485; et surtout Appendice IV de l'édition 1864 annotée des *Leçons* de Navier, § 39, p. 621-626) à une expression qui n'est que les *deux tiers* de celle qu'a donnée l'illustre analyste pour le moment de torsion; modification qu'il a faite lui-même dans la partie de son Mémoire concernant les vibrations tournantes, mais qui ne fait qu'augmenter l'inexactitude de l'expression trouvée. La cause en est précisément dans la circonstance que ce genre d'analyse ne saurait bien évaluer, et qui, peu influente dans la flexion, est dominante dans la torsion, à savoir la forme courbe que les glissements font prendre aux sections transversales primitivement planes, qui, en s'inclinant sur l'axe, doivent rester normales à la surface latérale libre, ce qui exige bien qu'elles cessent d'être planes (**).

(*) Lamé n'indique même, dans cette Leçon XII, la voie où il a essayé de marcher, que pour le cas relativement très particulier où les forces appliquées aux six faces du parallélépipède leur sont toutes normales, symétriquement distribuées en deux sens sur chacune, et les mêmes sur chaque face que sur la face opposée, en sorte que ces forces sont deux à deux égales et directement contraires.

(**) Voyez ci-après, Note de la fin du § 73, pour l'application que les deux mêmes illustres savants en ont faite au problème des plaques élastiques.

Il convenait ainsi de chercher, pour des prismes ayant des sections de formes variées, une méthode ne donnant que des solutions exactes, tout au moins pour des modes déterminés d'application et de distribution des forces, comme sont pareillement les modes qui s'imposent, ainsi que nous venons de le dire, jusque dans les deux cas de déformations les plus simples, savoir celui de l'extension de tout prisme et celui de la torsion d'un cylindre circulaire.

Or, les formules des composantes de tension fournissent, comme on sait, par de simples différentiations, les intensités des forces, quand on se donne la loi des déplacements des points. Le problème inverse, celui d'obtenir les déplacements quand on se donne les forces qui les produisent, dépend d'intégrations qu'on ne sait généralement pas effectuer. Mais si l'on prend pour données, à la fois, *une partie* des forces, et *une partie* des déplacements ou de leurs rapports, et si l'on cherche quels doivent être, en conséquence, les autres déplacements et les autres forces, on conçoit qu'en réduisant ainsi la part des intégrations, l'on puisse n'en rencontrer que d'abordables, et arriver à la solution rigoureuse et complète d'une série de problèmes de torsions et de flexions qui soient de ceux qu'offre la pratique ou qui leur soient très approximativement assimilables.

C'est cette méthode *mixte* ou *semi-inverse* que j'ai employée. Je prenais pour *donnée sur les forces* la nullité de toute action sur la surface latérale; à quoi j'ai dû ajouter, par manière d'essai, pour pouvoir poursuivre le calcul, la supposition naturelle que sur les faces des fibres ou éléments longitudinaux intérieurs, les actions étaient nulles aussi dans tous les sens transversaux; et, pour *donnée sur les déplacements*, que le prisme éprouvait d'un bout à l'autre, tantôt une *torsion uniforme*, tantôt une *flexion*, caractérisée par des dilatations longitudinales inégales, qui ne varient que linéairement dans les sens transversaux.

Le calcul a justifié le choix de ces données et suppositions, en tant que compatibles entre elles, et il a montré bientôt qu'elles réduisent à l'intégration d'une seule équation aux différentielles partielles du second ordre la détermination de ce qui est inconnu, notamment la distribution que les forces doivent prendre sur les éléments des bases ou sections extrêmes des prismes pour que les déplacements suivent rigoureusement partout les lois supposées.

Et cette intégration s'effectue pour une infinité de formes des contours des sections des prismes soit tordus, soit fléchis, comme je l'ai reconnu dans mon Mémoire de 1855 *sur la torsion* et dans celui de 1854-55 *sur la flexion*.

Clebsch, en adoptant cette idée, a embrassé dans une même analyse, comme on va voir, les divers genres de déformation des prismes, en sorte qu'il a pu se dispenser de poser, de prime abord, une *donnée* sur le mode ou la relation des *déplacements;* et il a pris, pour seule donnée *sur les forces*, ma double supposition de nullité non seulement de toutes actions sur les surfaces latérales, mais encore des tensions ou pressions intérieures sur les faces des fibres, dans un sens perpendiculaire à leur longueur. Bien entendu que, pour faire cesser l'indétermination à l'égard des déplacements, ou pour

§ 23. — Solution, sauf les déterminations des constantes et des fonctions arbitraires, du problème dit de Saint-Venant.

Les trois quantités inconnues, u, v, w, § 22, sont, en raison des conditions auxquelles doit satisfaire le corps prismatique, soumises à un nombre d'équations beaucoup plus grand que leur nombre propre. On ne peut donc satisfaire en même temps à toutes ces équations que par des solutions d'un caractère particulier.

Celles de ces équations (59), (60), (61), p. 141, 142, qui doivent être satisfaites pour tous les points du corps, sont les suivantes où, comme nous avons dit à l'Avertissement, nous laissons indéterminés les rapports mutuels de E, G et η, afin d'embrasser le cas d'une relation quelconque entre la contexture longitudinale et la contexture transversale :

$$
(63)\quad \begin{cases}
[1] & \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\eta \dfrac{\partial w}{\partial z} \\
[2] & \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
[3] & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \\
[4] & \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0 \\
[5] & \left(\dfrac{E}{G} - 2\eta\right) \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 .
\end{cases}
$$

---

abstraire les translations et rotations générales, il a dû faire, comme moi, la supposition qu'un point de l'une des sections fût fixe, ainsi qu'un élément matériel linéaire et un élément plan passant par ce point, de manière que le prisme, s'il était rigide, fût rendu par là immobile.

Ultérieurement, il décompose la solution générale en quatre parties qui donnent séparément l'extension, les flexions en deux sens principaux et la torsion.

On verra que dans le § 28, intitulé *Applications à des problèmes réels*, Clebsch remarque, comme nous l'avons fait en 1854 et 1856, que tous ces résultats conviennent, avec une approximation très suffisante, lorsque les forces qui agissent vers les extrémités des prismes sont appliquées et distribuées autrement que ne l'indique l'analyse comme condition de la parfaite rigueur des solutions, et que des forces, statiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultant, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de ces solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprès des endroits où elles agissent, ou sur des portions à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte; en sorte que les méthodes des §§ 22 à 27 fournissent ce qu'on peut désirer pour déterminer l'extension, la flexion et la torsion des prismes.

Nous renvoyons au reste à notre grande Note de la fin du § 28 pour le justifier par des preuves, tant expérimentales que théoriques.

Différentions [5] par rapport à z, et retranchons-en les quotients différentiels de [3] par rapport à x et de [4] par rapport à y, nous aurons :

$$\left(\frac{E}{G} - 2\eta\right)\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} = 0 .$$

Comme, d'après l'équation [1], $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ ne diffèrent de $\frac{\partial w}{\partial z}$ que par un facteur constant, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$ et $\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y}$ ne diffèrent de même de $\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}$ que par un facteur constant; et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0 .$$

Si maintenant on différentie [3] par rapport à y, et [4] par rapport à x, la somme des résultats donne :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0 ;$$

mais la somme des deux premiers termes de cette équation est toujours égale à zéro, comme on peut s'en assurer en différentiant deux fois de suite l'équation [2] par rapport à z. On a donc

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0 .$$

Enfin, si on différentie [5] par rapport à z, en considérant que $\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}$ vient d'être trouvé égal à zéro, on a

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = 0 .$$

Mais, si l'on différentie [3] par rapport à x et [4] par rapport à y, les premiers termes des deux équations ainsi obtenues sont égaux à cause de [1] : les seconds termes sont donc aussi égaux, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} .$$

Ce résultat ne peut être compatible avec l'équation précédente que si l'on a à la fois :

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = 0 ,$$

En réunissant tous les résultats précédents, on voit que les quotients différentiels suivants de $\frac{\partial w}{\partial z}$ doivent tous s'évanouir :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Les trois premières de ces conditions montrent que $\frac{\partial w}{\partial z}$ ne peut contenir x, y ni z, à une puissance supérieure à la première ; la dernière montre que cette expression ne peut contenir le produit xy. La fonction $\frac{\partial w}{\partial z}$ se présente donc sous la forme suivante où les coefficients a, b, sont des constantes arbitraires :

$$(63\ a) \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = (a + a_1 x + a_2 y) + z(b + b_1 x + b_2 y) ;$$

Les deux équations (63 [1]) permettent d'en déduire immédiatement les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial u}{\partial y}$, savoir :

$$(63\ b) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\eta\left[(a + a_1 x + a_2 y) + z(b + b_1 x + b_2 y)\right] ;$$

$$(63\ c) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\eta\left[(a + a_1 x + a_2 y) + z(b + b_1 x + b_2 y)\right] ;$$

Si, pour avoir w, u, v, l'on intègre les deux membres de ces trois équations par rapport à z, x, y, respectivement, il faudra, à ce que fournira immédiatement l'intégration des divers termes de leurs seconds membres, ajouter, pour la première, une fonction arbitraire de x, y ; pour la seconde, une de y, z, et, pour la troisième, une fonction de z, x.

Pour déterminer ces trois fonctions arbitraires de manière que les expressions de w, u, v, ainsi obtenues, satisfassent à toutes les équations (63), p. 145, remarquons d'abord qu'au lieu de la troisième et de la quatrième de ces équations (63) nous pouvons maintenant écrire, en mettant dans leurs seconds termes au lieu de $\frac{\partial w}{\partial z}$ sa valeur (63 a) :

$$(63\ d) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -a_1 - b_1 z, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -a_2 - b_2 \end{aligned} \right.$$

D'où il résulte, si l'on intègre deux fois chacune de ces deux équations, *que u et v ne peuvent contenir z tout au plus qu'à la troisième puissance*, car dans chacune des équations ainsi intégrées la seconde et la troisième puissance de z sont multipliées par des constantes.

Remarquons aussi que, par le même raisonnement, on peut déduire des expressions ci-dessus de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ que u ne peut contenir x et v ne peut contenir y tout au plus qu'à la seconde puissance, et enfin que, d'après la seconde des équations (63), u ne peut contenir y et v ne peut contenir x tout au plus qu'à la seconde puissance.

Il en résulte que la fonction à ajouter à u et qui doit être indépendante de x ne peut s'élever que jusqu'aux puissances y^2 et z^3 de y et de z; que, de même, la fonction à ajouter à v a pour puissances les plus élevées de x et z la seconde et la troisième, savoir x^2 et z^3. Nous aurons donc, pour u, v, les expressions suivantes où les a', b', a'', b'', sont de nouvelles constantes à déterminer ultérieurement, comme les a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 :

$$u = -\eta\left(ax + a_1\frac{x^2}{2} + a_2xy\right) - \eta z\left(bx + b_1\frac{x^2}{2} + b_2xy\right)$$
$$+ (a' + a'_1 y + a'_2y^2) + z(b' + b'_1 y + b'_2y^2) - a_1\frac{z^2}{2} - b_1\frac{z^3}{6};$$

$$v = -\eta\left(ay + a_1xy + a_2\frac{y^2}{2}\right) - \eta z\left(by + b_1xy + b_2\frac{y^2}{2}\right)$$
$$+ \left(a'' + a''_1x + a''_2x^2\right) + z\left(b'' + b''_1x + b''_2x^2\right) - a_2\frac{z^2}{2} - b_2\frac{z^3}{6}.$$

Les équations (63 [1], [3], [4]), sont ainsi satisfaites.

Quant à l'équation (63 [2]), elle donne, lorsqu'on y introduit ces valeurs de u et de v :

$$a''_2 = \frac{\eta a_2}{2}, \qquad a'_2 = \frac{\eta a_1}{2}, \qquad a'_1 + a''_1 = 0 :$$

$$b''_2 = \frac{\eta b_2}{2}, \qquad b'_2 = \frac{\eta b_1}{2}, \qquad b'_1 + b''_1 = 0 .$$

En posant donc, pour simplifier :

$$a'_1 = -a''_1 = a_0$$
$$b'_1 = -b''_1 = b_0$$

on aura pour u et v les expressions

$$(64)\quad \begin{cases} u = -\eta\left(ax + a_1\dfrac{x^2-y^2}{2} + a_2 xy\right) - \eta z\left(bx + b_1\dfrac{x^2-y^2}{2} + b_2 xy\right) \\ \qquad + (a' + a_0 y) + z(b' + b_0 y) - a_1\dfrac{z^2}{2} - b_1\dfrac{z^3}{6}; \\ v = -\eta\left(ay + a_1 xy + a_2\dfrac{y^2-x^2}{2}\right) - \eta z\left(by + b_1 xy + b_2\dfrac{y^2-x^2}{2}\right) \\ \qquad + (a'' + a_0 x) + z(b'' + b_0 x) - a_2\dfrac{z^2}{2} - b_2\dfrac{z^3}{6}. \end{cases}$$

Ces formules satisfont aux quatre premières équations (63), p. 145; elles sont en même temps les plus générales qui puissent y satisfaire à la fois. On voit que par leur moyen les déplacements transversaux u et v sont complètement déterminés, sauf la détermination à faire de certaines constantes arbitraires qui y entrent.

Il n'en est pas de même du déplacement longitudinal w. Cette inconnue, outre l'équation (63 a)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = (a + a_1 x + a_2 y) + z(b + b_1 x + b_2 y),$$

doit satisfaire à la dernière des équations (63)

$$\left(\frac{E}{G} - 2\eta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Si nous intégrons celle-là, nous trouvons, F désignant une fonction quelconque de x et de y :

$$(64\ a)\qquad w = z(a + a_1 x + a_2 y) + \frac{z^2}{2}(b + b_1 x + b_2 y) + F(x, y);$$

et en introduisant cette valeur de w dans cette dernière des équations (63) que nous venons d'écrire, il vient :

$$(64\ b)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left(\frac{E}{G} - 2\eta\right)(b + b_1 x + b_2 y) = 0.$$

C'est la seule équation que l'on ait pour déterminer la fonction F.

Si, au lieu de F, on prend pour inconnue une nouvelle fonction Ω de x et de y déterminée par la relation suivante :

$$(64\ c)\ F = \Omega - \left(\frac{E}{2G} - \eta\right)\left(b\frac{x^2+y^2}{2} + b_1 xy^2 + b_2 yx^2\right) + c - b'x - b''y,$$

l'équation précédente se simplifie et devient

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}=0.$$

Cette équation différentielle indéfinie ne déterminera complètement la fonction Ω qu'autant qu'on y joindra la *condition-limite* relative aux points de la surface du corps.

Si, auparavant, nous introduisons les valeurs trouvées (64) et (64 *a*) pour u, v, w, dans les formules (58), $t_{zz}=E\frac{\partial w}{\partial z}$, et (60 *b*), $t_{yz}=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$; $t_{xz}=G\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, nous aurons le tableau suivant qui renferme, sauf la détermination des constantes et de la fonction Ω, toute la solution :

(65)

1° Déplacements

$$u=-\eta\left(ax+a_1\frac{x^2-y^2}{2}+a_2xy\right)-\eta z\left(bx+b_1\frac{x^2-y^2}{2}+b_2xy\right)$$
$$+(a'+a_0y)+z(b'+b_0y)-a_1\frac{z^2}{2}-b_1\frac{z^3}{6};$$

$$v=-\eta\left(ay+a_2\frac{y^2-x^2}{2}+a_1xy\right)-\eta z\left(by+b_2\frac{y^2-x^2}{2}+b_1xy\right)$$
$$+(a''-a_0x)+z(b''-b_0x)-a_2\frac{z^2}{2}-b_2\frac{z^3}{6};$$

$$w=z(a+a_1x+a_2y)+\frac{z^2}{2}(b+b_1x+b_2y)$$
$$+\Omega-\left(\frac{E}{2G}-\eta\right)\left(b_1xy^2+b_2yx^2+b\frac{x^2+y^2}{2}\right)+c-b'x-b''y.$$

2° Tensions

$$t_{xx}=0,\quad t_{yy}=0,\quad t_{xy}=0;$$
$$t_{zz}=E\left[(a+a_1x+a_2y)+z(b+b_1x+b_2y)\right];$$
$$t_{xz}=G\left[b_0y-\left(\frac{E}{2G}-\frac{3}{2}\eta\right)b_1y^2-\left(\frac{E}{G}-\eta\right)b_2xy-\eta b_1\frac{x^2}{2}-\frac{E}{2G}bx+\frac{d\Omega}{dx}\right];$$
$$t_{yz}=G\left[-b_0x-\left(\frac{E}{2G}-\frac{3}{2}\eta\right)b_2x^2-\left(\frac{E}{G}-\eta\right)b_1xy-\eta b_2\frac{y^2}{2}-\frac{E}{2G}by+\frac{d\Omega}{dy}\right].$$

A l'aide des valeurs ainsi données de t_{xz} et de t_{yz}, et de l'équa-

tion

$$\text{(62 reproduite)} \qquad 0 = \mathfrak{t}_{xz} \cos p + \mathfrak{t}_{yz} \sin p,$$

on obtient les équations qui peuvent servir à la détermination de la fonction Ω. Cette fonction doit satisfaire, pour tous les points du corps prismatique, à l'équation donnée tout à l'heure

$$(66) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0,$$

et, sur la surface latérale de ce corps, ou, ce qui revient au même, sur le contour de ses sections transversales, à l'équation suivante, déduite de celle (62) de la fin du § 22, p. 142, que l'on vient de reproduire, et où nous mettons pour $\mathfrak{t}_{xz}$, $\mathfrak{t}_{yz}$, leurs valeurs (65) :

$$(67) \left\{ \begin{aligned} 0 = \cos p \left\{ -\frac{E}{2G} bx + b_0 y - b_1 \left[\frac{\eta x^2}{2} + \left(\frac{E}{2G} - \frac{3}{2}\eta \right) y^2 \right] - \left(\frac{E}{G} - \eta \right) b_2 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right\} \\ + \sin p \left\{ -\frac{E}{2G} by - b_0 x - b_2 \left[\frac{\eta y^2}{2} + \left(\frac{E}{2G} - \frac{3}{2}\eta \right) x^2 \right] - \left(\frac{E}{G} - \eta \right) b_1 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \right.$$

§ 24. — Sur les fonctions arbitraires à déterminer pour la solution du problème dit de Saint-Venant.

On peut démontrer facilement que les équations (66) et (67) suffisent pour déterminer *complètement* et *sans ambiguïté* la fonction appelée Ω. Cette démonstration se fait par une méthode fort en usage dans la physique mathématique, et qui est analogue à celle que l'on a employée au § 21 pour prouver la *détermination* des problèmes de l'équilibre d'élasticité en général.

Considérons que, s'il y avait deux fonctions différentes Ω qui satisfissent à la fois aux équations (66) et (67), leur différence Θ devrait, d'après ces deux équations, satisfaire aux deux suivantes :

$$(68) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \text{ en tous les points des sections transversales du corps.} \\ & \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos p + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \sin p = 0, \text{ à leur contour ou périphérie.} \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on considère l'intégrale

$$J = \iint \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

étendue à une section entière, et si on effectue par parties l'intégration dans son second membre, comme on a fait au § 16 pour l'intégrale δV, on obtient :

$$\iint \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 dxdy = \int \left[\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_2 - \left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_1\right] dy - \iint \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} dxdy;$$

$$\iint \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 dxdy = \int \left[\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^{(2)} - \left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^{(1)}\right] dx - \iint \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} dxdy.$$

Les indices 2 et 1, dans la première, répondent aux valeurs que prend $\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)$ aux deux extrémités d'une bande de largeur dy prise dans la surface de la section parallèlement à l'axe des x, bande le long de laquelle la première équation est intégrée par rapport à x. La seconde équation, au contraire, est intégrée par rapport à y, c'est-à-dire le long d'une bande de largeur dx parallèle à l'axe des y, et les indices (2) et (1) indiquent les valeurs prises par $\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)$ aux points extrêmes de cette bande.

Si maintenant on représente par ds_2, ds_1, les éléments de la périphérie de la section qui sont interceptés par la première bande, et si on désigne par p_2, p_1, les angles formés avec l'axe des x par les normales à cette périphérie, dirigées vers l'extérieur de la section, on a

$$ds_2 \cos p_2 = dy, \qquad ds_1 \cos p_1 = -dy,$$

et par conséquent :

$$\int \left[\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_2 - \left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_1\right] dy = \int \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos p\, ds,$$

cette intégrale devant être étendue à tous les éléments de la périphérie de la section. On a, absolument de la même manière :

$$\int \left[\left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^{(2)} - \left(\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^{(1)}\right] dx = \int \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y} \sin p\, ds.$$

Si l'on introduit ces valeurs dans les équations ci-dessus, et si on les additionne, on obtient :

$$J = \int \Theta \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos p + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \sin p\right) ds - \iint \Theta \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}\right) dxdy.$$

A cause des équations (68), page 151, les deux expressions placées sous

les signes d'intégration sont nulles; on a par conséquent :

$$J = 0;$$

et comme J est une somme de grandeurs positives, cette condition entraîne forcément l'annulation de chacun des termes isolés de J, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0.$$

Θ ne peut ainsi contenir ni x ni y: c'est par conséquent une constante. On voit donc que *les équations* (68) *admettent, à la vérité, diverses solutions, mais qui ne diffèrent les unes des autres que par l'addition de constantes arbitraires.*

En introduisant la condition que Ω s'annule pour un certain point, par exemple, pour $x = 0$, $y = 0$, on déterminera cette dernière constante, de sorte que la fonction Ω elle-même se trouvera exprimée sans aucune indétermination. On peut toujours faire cette hypothèse sans porter atteinte à la généralité de la solution, car, en passant de F à Ω, on a déjà introduit une constante additionnelle c. Si donc l'on désigne d'une manière trop spéciale ou trop restreinte la valeur de Ω, en posant que, pour un certain point ($x = 0$, $y = 0$), Ω doit s'annuler, cette restriction se trouve compensée par l'introduction de la constante arbitraire c qui figure à l'équation ci-dessus (64 e), $F = \Omega - (\ldots.)$ $+ c - b'x - b''y$, et qu'on retrouve dans la 3[e] des expressions (65).

La fonction Ω se trouvant maintenant tout à fait déterminée, grâce à l'adjonction de cette nouvelle condition, on peut considérer toute forme qu'on peut lui donner comme étant sa forme nécessaire (*so fort als die nothwendige betrachten*), pourvu qu'elle satisfasse à l'équation (66) *indéfinie* ou relative à tous les points, ainsi qu'à l'équation (67) *définie* ou relative aux seuls points des contours des sections; ce qui exige qu'elle contienne les constantes b, b_0, b_1, b_2, figurant dans celle-ci. On obtient cette forme, si l'on pose

(68 a) $$\Omega = bB + b_0B_0 + b_1B_1 + b_2B_2\,, \qquad (^*)$$

B, B_0, B_1, B_2, étant quatre fonctions de x et de y astreintes à ce que les équations (66), (67), soient satisfaites par ce quadrinôme mis à la place de Ω pour toutes les valeurs des nombres b, b_0, b_1, b_2. Ces nombres, qui se

(*) Ceci se trouvera, plus loin, complètement éclairci. Le partage que l'auteur fait de Ω en quatre termes vient de ce qu'il s'est proposé de comprendre, dans une même solution, comme nous avons déjà dit, sauf à les distinguer ensuite, les quatre cas d'extension, de flexion en deux sens, et de torsion.

trouvaient nécessairement dans Ω, puisqu'ils figurent dans (67), ne se trouvent plus dans les fonctions B, B_0, B_1, B_2, et, par conséquent :

1° l'équation (66) se divise en quatre équations distinctes qui sont les suivantes :

$$(69)\quad \begin{cases} 0=\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 B}{\partial y^2} \\[2ex] 0=\dfrac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} \\[2ex] 0=\dfrac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} \\[2ex] 0=\dfrac{\partial^2 B_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 B_2}{\partial y^2}. \end{cases}$$

2° l'équation (67) se divise de même en quatre équations dont chacune contient seulement une des fonctions inconnues B et qui s'obtiennent en ne conservant successivement qu'un seul des coefficients b, b_0, b_1, b_2, et en annulant les autres; ce sont :

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial x}\cos p+\dfrac{\partial B}{\partial y}\sin p=\dfrac{\mathrm{E}}{2\mathrm{G}}(x\cos p+y\sin p), \qquad (^*) \\[2ex] \dfrac{\partial B_0}{\partial x}\cos p+\dfrac{\partial B_0}{\partial y}\sin p=x\sin p-y\cos p, \\[2ex] \dfrac{\partial B_1}{\partial x}\cos p+\dfrac{\partial B_1}{\partial y}\sin p=\left[\eta\dfrac{x^2}{2}+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{2\mathrm{G}}-\dfrac{3}{2}\eta\right)y^2\right]\cos p+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-\eta\right)xy\sin p, \\[2ex] \dfrac{\partial B_2}{\partial x}\cos p+\dfrac{\partial B_2}{\partial y}\sin p=\left[\eta\dfrac{y^2}{2}+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{2\mathrm{G}}-\dfrac{3}{2}\eta\right)x^2\right]\sin p+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-\eta\right)xy\cos p. \end{cases}$$

Chaque couple d'une équation (69) et d'une équation (70) détermine complètement la fonction B correspondante, de même que Ω a été, ci-dessus, reconnu complètement déterminé, à la condition d'admettre que, pour $x=0$, $y=0$, ces fonctions s'évanouissent. Or, on peut conclure déjà, de ces équations, que *b doit être nul*, par la raison que l'équation (69) et l'équation (70) qui contiennent *B sont incompatibles*. Pour démontrer cela, prenons l'expression

$$\iint\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)d\sigma$$

(*) On verra au § 33 une *interprétation* des premiers membres de ces quatre équations. Ce sont, comme le montre l'auteur, des quotiens différentiels des fonctions B par rapport à une coordonnée normale à la périphérie de la section transversale du prisme ou cylindre élastique.

où $d\sigma$ désigne un élément superficiel de la section transversale, et où l'intégration doit être étendue à toute cette section, et prouvons que cette intégrale est nécessairement égale à zéro. A cet effet, posons $d\sigma = dxdy$, puis intégrons le premier terme sur une bande parallèle à l'axe des x, dont les points extrêmes sont, comme tout à l'heure, désignés par les indices inférieurs 1, 2, et le second terme sur une bande parallèle à l'axe des y, dont les points extrêmes sont désignés par les indices supérieurs (1), (2), nous obtenons ainsi

$$0 = \int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_1 \right] dy + \int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^{(2)} - \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^{(1)} \right] dx .$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, on peut remplacer ce second membre par une intégrale pour le contour, et poser

$$0 = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B}{\partial y} \sin p\right) ds .$$

ou, ce qui revient au même, en vertu de la première équation (70),

$$0 = \int (x \cos p + y \sin p)\, ds .$$

On peut considérer l'équation précédente $0 = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B}{\partial y} \sin p\right) ds$ comme provenant de celle

$$\iint \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right) d\sigma = 0 ,$$

et la dernière, $0 = \int (x \cos p + y \sin p)\, ds$, comme provenant de celle

$$0 = \iint \left[\frac{\partial^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{\partial y^2} \right] d\sigma = 2 \iint d\sigma ,$$

traitée aussi comme nous avons fait ci-dessus.

Mais $2 \int\int d\sigma$ donne le double de la surface σ de la section, et il est impossible qu'elle s'annule. La fonction B est donc elle-même impossible (*unmögleiche*) : or, l'équation (69) et l'équation (70) qui contiennent B sont celles qu'on a tirées de (66) et (67) en ne conservant

que le coefficient b. Donc on doit avoir nécessairement

$$b = 0 \,. \tag{70 a}$$ (*)

Les considérations précédentes sont d'une grande importance parce qu'elles montrent qu'en général les solutions (65) ne contiennent que les constantes

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a',\ a'',\ a_0,\ b_1,\ b_2,\ b',\ b'',\ b_0,\ c,$$

et toutes d'une manière linéaire. On voit aussi qu'elles ne contiennent rien d'arbitraire, car la fonction Ω s'est résolue en une expression linéaire par rapport à ces constantes; expression dont les coefficients sont des fonctions complètement déterminées pour chaque section transversale.

Les douze constantes ci-dessus se réduisent même à six, en introduisant les conditions des équations (57) du § 22, p. 139, qui expriment que l'une des extrémités est fixe:

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \text{ pour } x = 0, y = 0, z = 0.$$

Si l'on égale à zéro les valeurs des déplacements du point dont les coordonnées sont $x = 0, y = 0,\ z = 0$, on obtient les équations suivantes :

$$a' = 0,\quad a'' = 0,\quad c = 0,\quad a_0 = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} b' &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_{x=0,\ y=0}, \\ b'' &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_{x=0,\ y=0}. \end{aligned} \right. \tag{71}$$

Quatre de ces constantes s'évanouissent donc, et les deux équations (71)

(*) On aurait pu faire $b = 0$ dès le commencement, si l'on avait, en posant (65 a) $\frac{\partial w}{\partial x} = a + a_1 x + a_2 y + z\left(b + b_1 x + b_2 y\right)$, placé de suite, sur chaque section, l'origine des x, y, à son centre de gravité : car en multipliant par $E d\sigma$ cette expression de $\frac{\partial w}{\partial z}$ et intégrant pour toute l'étendue de la section, on a $\int_\sigma t_{zz}\, d\sigma = (a + bz)\sigma$, résultante des forces longitudinales, qui doit être indépendante de z, puisque les forces extérieures sont supposées n'agir qu'aux extrémités de la tige : d'où $b = 0$.

Lorsqu'il y a flexion et que l'origine des x, y, est placée en un autre point, en sorte que α, β, soient les coordonnées x, y, du centre de gravité, b n'est nul qu'autant qu'on a $b_1 \alpha + b_2 \beta = 0$, ou que l'origine en question est l'un des points d'une certaine droite passant par ce centre.

que nous venons d'écrire montrent que, puisque Ω est fonction linéaire de b_0, b_1, b_2, les deux dernières constantes b' et b'' s'expriment au moyen des trois autres. Il ne reste donc plus, dans le calcul, que six constantes arbitraires

$$b_0\,,\quad b_1\,,\quad b_2\,,\qquad a\,,\quad a_1\,,\quad a_2\,.$$

Les valeurs des tensions données dans (65) ne sont aucunement modifiées par là, sauf que b doit être effacé de la seconde parenthèse de t_{zz}. Mais les déplacements u, v, w, se simplifient, et l'on a les expressions suivantes où les indices 0 mis à $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$ et à $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$ signifient que, dans ces fonctions, il faut faire $x=0$, $y=0$:

$$(72)\quad \begin{cases} u = -\eta\left(ax + a_1\dfrac{x^2-y^2}{2} + a_2xy\right) - \eta z\left(b_1\dfrac{x^2-y^2}{2} + b_2xy\right) \\ \qquad + b_0yz + z\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 - a_1\dfrac{z^2}{2} - b_1\dfrac{z^3}{6}\,; \\ v = -\eta\left(ay + a_2\dfrac{y^2-x^2}{2} + a_1xy\right) - \eta z\left(b_2\dfrac{y^2-x^2}{2} + b_1xy\right) \\ \qquad - b_0xz + z\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 - a_2\dfrac{z^2}{2} - b_2\dfrac{z^3}{6}\,; \\ w = z(a + a_1x + a_2y) + \dfrac{z^2}{2}(b_1x + b_2y) \\ \qquad - \left(\dfrac{E}{2G} - \eta\right)(b_1xy^2 + b_2yx^2) + \Omega - x\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 - y\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0\,. \end{cases}$$

§ 25. — Discussion de la solution. Vues générales. — Division des déplacements en trois groupes indépendants. — Premier groupe : Extensions.

Les équations (72), qui donnent la solution du problème, renferment encore six constantes arbitraires, a, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, qui s'y trouvent engagées d'une manière linéaire. Si on conserve successivement chacune d'elles en annulant les cinq autres, les déplacements u, v, w, se trouvent déterminés, à un facteur constant près, qui est la sixième constante conservée. Ces équations déterminent donc la nature diverse de déplacements pouvant exister ensemble, mais non leurs grandeurs, qui dépendent des valeurs attribuées à ces six constantes. On peut ainsi considérer les déplacements généraux ou totaux donnés par les

équations (72) comme résultant de six déplacements simultanés indépendants, tels que la nature de chacun soit complètement déterminée, mais que sa grandeur absolue reste arbitraire; de sorte que, par une modification des rapports mutuels de ces six déplacements fondamentaux ou composants, on puisse obtenir les déplacements les plus variés.

On peut facilement se rendre compte de la signification ou de la nature de ces six déplacements fondamentaux. Il n'est pas nécessaire, pour cela, de les considérer isolément tous les six; il suffit, comme on le verra, d'en considérer quatre groupes; et même, comme deux de ces groupes conduisent à des résultats tout à fait analogues, le nombre des groupes réellement différents à examiner se réduit à trois. Nous allons les étudier successivement, mais, auparavant, il est nécessaire de présenter les remarques suivantes.

Lorsque des déplacements quelconques se sont produits dans la tige, il y a deux questions géométriques qui attirent particulièrement l'attention : c'est la détermination de la courbe affectée par une fibre qui, primitivement, était parallèle à l'axe des z, et la détermination de la forme d'une section transversale qui, primitivement, constituait un plan perpendiculaire à ce même axe.

Considérons un point qui, originairement, appartenait à la fibre (x, y). Après le déplacement, ses coordonnées seront :

$$(73) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x + u \;, \\ y' &= y + v \;, \\ z' &= z + w \;. \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations, x et y doivent être considérées comme des constantes tout le long de la fibre en question; et z, au contraire, comme une variable. Si donc on élimine z entre les trois équations (73) où l'on ait mis pour u, v, w, leurs valeurs (72), on obtient entre x', y', z', deux équations qui représentent la courbe en laquelle s'est transformée la fibre primitivement rectiligne que l'on considère. Cette élimination s'opère facilement, car, u, v, w, étant de très petites grandeurs, on ne commet qu'une erreur d'ordre supérieur en remplaçant, dans u et v, z par z', qui en diffère très peu. Si on désigne par u', v', les valeurs de u et de v après cette substitution de z' à z, les équations

$$(74) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x + u' \;, \\ y' &= y + v' \;, \end{aligned} \right.$$

sont, en x', y', z', *les équations de la courbe affectée par la fibre*, puis-

qu'elles ne contiennent plus la coordonée z que la troisième équation (75) n'aura servi qu'à faire remplacer par z'.

Au contraire, pour une section transversale primitivement plane, z est constant. Si donc on veut, au moyen des équations (75), obtenir l'équation de la surface en laquelle se transforme, après le déplacement, cette section transversale, il faut, dans ces (75), considérer z comme constant, et éliminer x et y. L'équation résultante en x', y', z', sera celle de la surface cherchée. Cette élimination se fait de la même manière qu'on vient de voir pour l'élimination de z. Il suffit de remarquer que, si dans w on remplace x et y par x' et y', qui en diffèrent très peu d'après les deux premières (75), on ne commet qu'une erreur d'ordre supérieur ; de sorte qu'en désignant par w' la valeur de w que donne la troisième (72) après cette substitution de x', y', à x, y, l'équation

(75) $$z' = z + w'$$

ne contient plus x ni y : elle est donc, en x', y', z', *l'équation de la section transversale déplacée ou déformée.*

Nous pouvons maintenant appliquer ces considérations à l'étude des déplacements fondamentaux isolés.

1er *Groupe.* — Le premier groupe de ces déplacements s'obtient en annulant toutes les constantes, excepté a. Il reste alors

(75 *bis*) $$\left\{\begin{array}{ll} u = -\eta a x, & t_{yz} = 0 , \\ v = -\eta a y, & t_{yz} = 0 , \\ w = a z ; & t_{zz} = Ea . \end{array}\right.$$

Ces déplacements donnent l'*extension* simple. Chaque fibre, dans la direction de l'axe longitudinal, s'est allongée de az, c'est-à-dire dans le rapport de 1 à $(1 + a)$. Par contre, ses dimensions transversales sont diminuées dans le rapport de $1 : (1 - \eta a)$. La tige entière supporte une tension uniforme dans la direction longitudinale ; toutes les fibres sont demeurées rectilignes, et toutes les sections transversales sont demeurées planes (*).

(*) Nous connaissions déjà ce résultat par le § 2.

Il peut être étendu au cas où la contexture, au lieu d'être la même dans tous les sens transversaux, serait simplement symétrique *par rapport aux sections transversales* ou aux plans parallèles aux x, y, ce qui est le cas des formules de tensions (*f bis*) du n° 13 de la Note du § 16, p. 76.

Seulement, dans les valeurs (75 *bis*) de u, v, il faudra donner deux valeurs différentes au coefficient numérique η qui les affecte. Mais il est rare qu'on ait besoin de calculer ces déplacements ou ces contractions de sens transversal dans les problèmes d'extension ou compression simple.

§ 26. — Suite de la discussion. — Deuxième groupe : Flexion.

2e *Groupe*. — Annulons maintenant toutes les constantes des équations (72), p. 157, employées pour les déplacements, et (65), p. 150, pour les tensions, en exceptant de cette annulation les constantes a_1 et b_1. Il reste, eu égard à ce qu'on a d'après l'équation (68 *a*), $\Omega = b_1 B_1$ lorsque b, b_0, b_2, sont nuls :

$$(75\,a)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -a_1 \frac{\eta(x^2-y^2)+z^2}{2} - b_1\left[\frac{z^3}{6} + \eta z\frac{x^2-y^2}{2} - z\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right],\\ v &= -\eta xy(a_1+b_1 z) + zb_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0,\\ w &= a_1 xz + b_1\left[\frac{z^2}{2}x - \left(\frac{E}{2G}-\eta\right)xy^2 + B_1 - x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 - y\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0\right];\\ t_{xz} &= Gb_1\left[-\left(\frac{E}{G}-3\eta\right)\frac{y^2}{2} - \eta\frac{x^2}{2} + \frac{\partial B_1}{\partial x}\right],\\ t_{yz} &= Gb_1\left[-\left(\frac{E}{G}-\eta\right)xy + \frac{\partial B_1}{\partial y}\right],\\ t_{zz} &= Ex(a_1+b_1 z)\,. \end{aligned}\right.$$

Le caractère général de l'état désigné par ces formules est celui de la *flexion*. Remarquons que d'après les équations (74), $x' = x + u'$, $y' = y + v'$, et d'après ce que nous avons dit de la substitution à faire de z' à z, la courbe affectée par une fibre après le déplacement est représentée par les équations :

$$\begin{aligned} x' &= x - a_1\frac{\eta(x^2-y^2)+z'^2}{2} - b_1\left[\frac{z'^3}{6} + \eta z'\frac{x^2-y^2}{2} - z'\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right],\\ y' &= y - \eta xy(a_1+b_1 z') + z' b_1\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0, \end{aligned}$$

dans lesquelles x et y *sont des constantes* représentant les coordonnées de la fibre dans son état primitif, et x', y', z', les coordonnées d'un point quelconque de la fibre déplacée et déformée.

La seconde équation, qui ne contient pas x' et qui est du premier degré en y', z', représente un plan parallèle à l'axe des x : chaque fibre, originairement rectiligne, devient donc une courbe plane dont le plan est parallèle à l'axe des x. Cette courbe, d'après la première équation en x' et en z', est une parabole du 3e degré; et, lorsque b_1 est égal à

zéro, une parabole du 2[e] degré. Mais même lorsque b_1 est différent de zéro, la parabole du 3[e] degré, pour les faibles flexions, ne s'écarte de celle du 2[e] degré, ou même d'un arc de cercle, que de petites quantités d'ordre supérieur.

Il y a, en particulier, des fibres dont le plan reste, après le déplacement, parallèle à l'axe des z. Ce sont celles pour lesquelles la valeur de y', donnée par la seconde des équations ci-dessus, devient indépendante de z', c'est-à-dire celles pour lesquelles :

$$xy = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 ;$$

car. on a alors :

(75 a') $$y' = y(1 - \eta x a_1) .$$

L'équation ci-dessus, considérée comme en x et y, représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les axes des x et des y. Les fibres qui satisfont à cette condition (de rester dans un plan parallèle aux z), rencontraient donc, dans leur position primitive, les plans de chacune des sections transversales en des points appartenant à cette hyperbole équilatère.

La grandeur de la flexion peut se déterminer par la quantité dont l'extrémité de la fibre ($x = 0$, $y = 0$) se trouve déplacée. La valeur correspondante de u, pour $z = l$, devient :

$$u_1 = -\frac{a_1}{2} l^2 - b_1 \left[\frac{l^3}{6} - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_0\right]$$

et peut, conformément à la désignation usuelle, recevoir le nom de *flèche de la flexion*, de même que le plan xz dans lequel se maintient cette fibre peut s'appeler *plan de flexion*.

Les sections transversales, d'abord planes, sont courbes après le déplacement, et leur forme, d'après (75 a) est donnée par l'équation

$$z' = (1 + a_1 x') z + b_1 \left[\frac{z^2}{2} x' - x' y'^2 + B'_1 - x' \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 - y' \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0\right] .$$

Dans cette équation, B'_1, conformément aux notations ci-dessus, désigne la valeur que prend la fonction B_1 lorsque l'on y remplace x et y par x' et y'. On voit que l'équation de la surface courbe affectée par la section transversale dépend de B_1, par conséquent de la forme de la périphérie de cette section (voyez plus loin). On voit aussi que les

formes des diverses sections transversales devenues courbes ne sont pas toutes les mêmes (*).

Les plans tangents à ces surfaces, aux points qui, originairement, appartenaient à l'axe des z, ne sont pas non plus parallèles au plan xy, c'est-à-dire à la direction du plan de la section transversale primitive. Pour le démontrer, supposons x et y très petits, et développons, au moyen du théorème de Taylor, par la série connue qu'on en déduit avec Mac-Laurin, la fonction B_1 qui doit s'annuler pour $x = 0$, $y = 0$, nous aurons :

$$B_1 = x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, et en substituant dans cette série, à x et à y, les quantités x', y', puis portant la valeur qui en résulte pour ce que nous avons appelé B'_1, dans l'équation de la surface, les B disparaîtront et nous aurons simplement :

$$z' = (1 + a_1 x')\, z + b_1 \frac{z^2}{2} x' .$$

C'est l'équation d'un plan, et par conséquent l'équation du plan tangent mené à la surface de la section en son point $x = 0$, $y = 0$. Cette équation, qui ne contient pas y', montre que le plan tangent dont il s'agit est parallèle à l'axe des y, qui est perpendiculaire au plan de flexion xz défini tout à l'heure. Ce plan forme avec l'axe des x (lequel est situé dans le plan de flexion et a une direction perpendiculaire à l'axe du prisme ou cylindre) l'angle très petit dont la tangente est donnée par la formule :

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{dz'}{dx'} = a_1 z + \frac{b_1 z^2}{2} .$$

Cet angle est nul à l'origine, ou pour $z = 0$; il s'accroît de là à l'extrémité libre de la tige.

Enfin, l'équation de la courbe affectée par la fibre $x = 0$, $y = 0$, est

$$x' = -a_1 \frac{z^2}{2} - b_1 \left[\frac{z^3}{6} - z' \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 \right] .$$

(*) En effet, d'après leur équation qu'on vient d'écrire, ces formes varient avec z, c'est-à-dire avec les distances où elles sont de la section fixe $z = 0$.

La normale à cette courbe plane forme avec l'axe des x un angle α dont la valeur est donnée par

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{dx'}{dz'} a_1 z + b_1 \left[\frac{z^2}{2} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right].$$

De sorte qu'entre la direction du plan tangent, c'est-à-dire de l'élément ($x = 0$, $y = 0$) de la section transversale et la direction de la normale à cette fibre, il y a un angle $\alpha' - \alpha$ dont la valeur, en tenant compte de ce que α et α' sont très petits, est exprimée par

$$\alpha' - \alpha = -b_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0,$$

et est, par conséquent, indépendante de z.

On voit que la théorie usuelle de la flexion, qui suppose que les sections transversales restent normales aux fibres, est inexacte.

Les fibres situées dans le plan yz, c'est-à-dire dans le plan mené, par l'axe z, perpendiculairement au plan de flexion xz, ne subissent ni extension ni compression; car, pour $x = 0$, la valeur de t_{zz} devient nulle. Si $(a_1 + b_1 z)$ ne change pas de signe dans toute la longueur de la tige, il y a contraction pour les fibres situées d'un côté de ce plan (*), et dilatation pour celles qui sont situées de l'autre côté. Si au contraire, pour une certaine valeur de z, la grandeur $(a_1 + b_1 z)$ s'évanouit, ce qui annule en même temps t_{zz}, il existe une section transversale, définie par cette valeur de z, à travers laquelle les fibres n'éprouvent ni contraction ni extension (**); et le plan de cette section transversale, avec le plan yz d'extensions et de contractions nulles, par-

(*) Ce plan, qui coupe longitudinalement le prisme, est le plan appelé *neutre*, ou *des fibres invariables*, dans la théorie ordinaire qui, comme le montre l'auteur au § 38, concorde en quelques points avec la théorie ici exposée, où tout est exact, sous la condition que les forces appliquées aux bases soient distribuées de la manière qu'on verra, telle qu'on ait $t_{xx} = 0$, $t_{yy} = 0$, $t_{xy} = 0$ partout.

(**) C'est une section à travers laquelle la fibre moyenne, ou ligne des centres de gravité, devenue courbe, a un *point* d'inflexion. C'est la section même ou base de l'extrémité *libre* de la tige, si les forces qui font fléchir sont appliquées à cette extrémité, forces qui, pour l'exactitude de la solution, ou pour l'accomplissement rigoureux des conditions $t_{xx} = 0$, $t_{yy} = 0$, $t_{xy} = 0$ partout, ont besoin de n'être appliquées qu'aux points de cette section et dans son plan, avec des intensités se distribuant sur ses divers éléments, d'une certaine manière que déterminent les valeurs de t_{zx}, t_{zy} comme l'auteur va le dire.

On peut consulter, à ce sujet, mon mémoire sur la flexion, inséré au *Journal de Liouville* en 1856, déjà cité, ou bien les notes et appendices cités aussi, de l'édition de 1864 des *Leçons* de Navier.

tagent le corps en quatre parties (*) dans lesquelles, alternativement, il y a contraction et extension. Les points dans lesquels l'extension est d'égale intensité sont situés sur des surfaces cylindriques hyperboliques représentées par l'équation

$$\mathrm{t}_{zz} = \mathrm{E}x\,(a_1 + b_1 z) = \text{constante}\ ,$$

et qui ont pour asymptotes les deux plans de non-extension (**).

Pour qu'il se produise des déplacements conformes à ceux qui viennent d'être décrits et calculés, il faut que l'extrémité libre de la tige cylindrique soit soumise à des forces qui, en chaque point de la base ou section transversale extrême, aient leurs composantes suivant les x, y, z, égale aux valeurs données (formule 75 a) pour t_{zx}, t_{zy}, t_{zz} par unité superficielle des éléments. La répartition des forces t_{zz} agissant dans le sens longitudinal s'obtient facilement. En effet, on peut observer que, d'après la dernière formule (75 a), t_{zz} est proportionnel à x; si donc, aux divers points de la base ou section transversale extrême, on mène des lignes parallèles à la direction de ces forces, c'est-à-dire à l'axe des z, et proportionnelles à leurs intensités, les extrémités de toutes ces lignes constitueront un plan parallèle à l'axe des y, et qui coupera la section suivant une droite parallèle à ce même axe. La répartition des forces t_{xz}, et t_{yz}, dont les expressions contiennent la fonction B_1, dépend de la forme du contour des sections transversales. Il sera question plus loin de ces forces, dont la première, surtout, a une influence essentielle sur la nature de la flexion.

Si, au lieu de conserver les constantes a_1, b_1, on avait conservé seulement a_2, b_2, on aurait obtenu des phénomènes tout à fait analogues, à cela près que le plan yz aurait été le plan de flexion au lieu du plan xz. C'est ce qu'on reconnaît facilement en observant que les formules qui expriment u, v, w sont symétriquement construites par rapport à x et à y et par rapport aux constantes a_1, b_1 d'une part, a_2, b_2 de l'autre (***).

(*) Ou, évidemment en deux parties seulement, si la tige, comme il arrive d'ordinaire, se termine là.

(**) Ce sont les cylindres hyperboliques dont il ne faut pas confondre les bases ou coupes par des plans parallèles aux xz, ou au plan de flexion, avec les hyperboles (équation 75 a') d'*égal déplacement transversal* $y' - y$, et qui, tracées sur les sections, ont pour asymptotes leurs deux axes principaux, ou des parallèles aux x et aux y.

Ces deux sortes d'hyperboles, la seconde surtout, me paraissent, au reste, peu intéressantes à considérer; il n'en est jamais question dans les problèmes de pratique.

(***) C'est à cause de cela que l'auteur a dit, au commencement du § 25, que deux des quatre groupes de déplacements fondamentaux peuvent être regardés comme n'en faisant

§ 27. — Suite de la discussion. — Torsion. — Théorème général sur les tensions.

3e *groupe*. — Il n'y a donc plus à examiner que les états représentés par les termes qu'affecte la constante b_0. En la conservant seule, les expressions (72) p. 157 pour les déplacements u, v, w, et (65) p. 150 pour les tensions t_{zz}, t_{xz}, t_{yz}, eu égard à ce que (68 *a*), p. 153, se réduit alors à $\Omega = b_0 B_0$, deviennent :

$$(75\ c)\quad \begin{cases} u = b_0 z \left[y + \left(\dfrac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 \right] & , \quad t_{xz} = G b_0 \left(y + \dfrac{\partial B_0}{\partial x} \right) . \ (^*) \\ v = - b_0 z \left[x - \left(\dfrac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0 \right] & , \quad t_{yz} = - G b_0 \left(x - \dfrac{\partial B_0}{\partial y} \right), \\ w = b_0 \left[B_0 - x \left(\dfrac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 - y \left(\dfrac{\partial B_0}{\partial y} \right) \right], & \quad t_{zz} = 0 . \end{cases}$$

Ces formules, qui expriment la *Torsion*, sont, après celles qui expriment l'extension simple, les moins compliquées. Le cylindre n'éprouve, suivant sa direction longitudinale, aucune traction, puisque $t_{zz} = 0$. L'état exprimé par les formules se trouve produit uniquement par des forces agissant sur la section transversale extrême, parallèlement à la surface de cette section. Les équations (74) des courbes affectées par les fibres après les déplacements sont les suivantes où,

---

qu'un : ce sont ceux des déplacements venant de flexions dans deux sens transversaux perpendiculaires entre eux.

On voit aussi que le coefficient η de contraction transversale n'entre point dans la dernière équation (75 *a*), $t_{zz} = Ex(a_1 + b_1 z)$. Comme c'est la seule de ces équations qui serve à la solution des problèmes pratiques de flexion, la théorie qui y a amené s'étend à des tiges *dont la contexture est symétrique seulement par rapport à leurs sections transversales*, et peut être différente dans les diverses directions latérales.

(*) Dans le livre de Clebsch, au lieu de G il y a $\dfrac{E}{2(1+\eta)}$. On a vu, à la fin du § 2, que ces deux quantités sont égales dans les corps isotropes ou d'égale contexture en tous sens, les seuls que Clebsch ait considérés. Nous avons dit, à plusieurs reprises, et déjà à notre Avertissement, que la matière des tiges, c'est-à-dire des pièces de bois ou de métal, pouvait bien être regardée comme d'élasticités peu différentes dans les sens transversaux; mais, ainsi qu'on a vu surtout à la fin de la grande Note du § 16, que l'élasticité longitudinale en différait énormément pour l'ordinaire. C'est pourquoi nous avons constamment regardé le coefficient G d'élasticité de glissement comme ayant une grandeur indépendante de celles de E et de η. C'est ce qu'il importait surtout de mettre en évidence quand il s'agit de la torsion; nous avons donc dû mettre ici G à la place de $\dfrac{E}{2(1+\eta)}$, et, dans diverses équations ci-dessus, affecter certains termes de $\left(\dfrac{E}{2G} - \eta\right)$ qui n'est égal à 1 que pour une tige isotrope.

comme nous avons dit, x', y', z' représentent les coordonnées de leurs points, et où x, y, coordonnées transversales primitives de points de chaque fibre, doivent être regardées comme des constantes :

$$(76) \quad \begin{cases} x' = x + b_0 z' \left[y + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 \right], \\ y' = y - b_0 z' \left[x - \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0 \right]. \end{cases}$$

Parmi toutes les fibres, il y en a une qui a conservé exactement sa position initiale, c'est celle qui est définie par les coordonnées primitives

$$(77) \qquad x = \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0, \qquad y = -\left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0.$$

Après les déplacements, toutes les autres fibres affectent la forme de lignes droites inclinées (*), car les équations (76) sont du premier degré en x', y', z'. La position de ces lignes est déterminée, d'une part, parce que les points de la section transversale extrême, qui n'est pas libre, ne sont pas, en général, déplacés dans le plan de cette section, puisque u et v s'annulent avec z. D'autre part, on peut voir que toutes les fibres originairement placées sur la surface d'un même cylindre circulaire, ayant son axe parallèle aux z, forment, après les déplacements des points, une hyperboloïde à une nappe. C'est ce que l'on démontre très facilement, si l'on prend l'équation suivante d'un pareil cylindre formé par des fibres dans leur position primitive

$$(78) \qquad r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

et si, dans cette équation, où α et β sont les coordonnées transversales quelconques de l'axe de ce cylindre, de rayon r aussi quelconque, on met à la place de x, y leurs valeurs en x', y'. Ces valeurs se tirent simplement des équations (76) en négligeant les quantités d'ordre supérieur, car on peut alors, dans les derniers termes de ces deux équations, remplacer x et y par x', y', ce qui donne :

$$x = x' - b_0 z' \left[y' + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x} \right)_0 \right],$$

$$y = y' + b_0 z' \left[x' - \left(\frac{\partial B_0}{\partial y} \right)_0 \right].$$

(*) Cela est vrai de leurs éléments, ou de leurs tangentes prolongées; mais la suite de ces éléments, pour chaque fibre, forme une hélice.

Introduisant ces valeurs de x et de y dans l'équation (78) du cylindre formé de fibres du solide élastique, et négligeant de nouveau les termes d'ordre supérieur, savoir ceux qui viendraient des carrés des seconds termes de ces mêmes valeurs de x et de y, on a, pour l'équation de la surface en laquelle le cylindre primitif s'est transformé :

$$r^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 - 2b_0 z' \left\{ \beta x' - \alpha y' + (x'-\alpha)\left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0 + (y'-\beta)\left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)_0 \right\}.$$

Les termes du troisième ordre ayant disparu, cette équation est celle d'une surface du second ordre. C'est l'équation de l'hyperboloïde dont il s'agit, qui a son centre dans la section extrême non libre, et au point où cette section extrême est rencontrée par l'axe du cylindre (78); car si l'on pose :

$$x'-\alpha = \xi, \qquad y'-\beta = \eta,$$

l'hyperboloïde se trouve rapporté à son centre, et son équation devient :

$$\xi^2 + \eta^2 - 2b_0 z' \left\{ \left[\beta + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0\right]\xi - \left[\alpha - \left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)\right]\eta \right\} = r^2,$$

où les termes du premier degré ont complètement disparu. Cet hyperboloïde a toujours deux génératrices parallèles à l'axe du cylindre (78) qui l'a engendré, car si l'on pose les deux équations suivantes :

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2,$$

$$\xi\left[\beta + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0\right] = \eta\left[\alpha - \left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)_0\right],$$

dont la première n'est autre chose que l'équation du cylindre, et dont la seconde représente un plan passant par son axe, les valeurs de ξ et de η qui satisfont à ces deux équations satisfont aussi à l'équation de l'hyperboloïde ; d'où il suit que les deux génératrices de ce cylindre, suivant lesquelles il est coupé par le plan, et qui sont parallèles à l'axe des z, se trouvent tout entières sur l'hyperboloïde.

Enfin, si l'axe du cylindre (78) coïncide avec la fibre immobile (77) mentionnée ci-dessus, c'est-à-dire si (formule 77) l'on a

$$\alpha = \left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)_0, \qquad \beta = \left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0,$$

l'hyperboloïde se confond avec le cylindre lui-même, à des grandeurs

d'ordre supérieur près. Dans ce cas, chaque génératrice du cylindre est seulement un peu déplacée dans le plan tangent qui lui correspond, mais ne sort pas de ce plan, si on néglige les grandeurs d'ordre supérieur de petitesse (*).

On a vu au § 21 qu'une petite rotation d'un corps autour de l'axe des z, si α représente l'angle de cette rotation, est définie par les déplacements :

$$u = \alpha y, \qquad v = -\alpha x.$$

Cela concorde rigoureusement avec les formules ci-dessus, si au lieu de prendre comme axe de rotation l'axe des z qui est une parallèle quelconque aux arêtes du cylindre, l'on prend la droite immobile (77) qui est parallèle à cet axe, et si, par conséquent, l'on met

$$y + \left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0, \qquad \text{au lieu de } y.$$

$$x - \left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)_0, \qquad \text{au lieu de } x.$$

On voit alors que, pour établir la concordance rigoureuse, il faut que l'angle de rotation ait la valeur

$$\alpha = b_0 z.$$

Chaque section transversale se trouve donc avoir tourné, autour de la droite (77), d'un angle proportionnel à sa distance à la section extrême fixe ; et la constante b_0 désigne l'angle de torsion correspondant à la section située à l'unité de distance de cette section fixe. Enfin, si l désigne la longueur de la tige, $b_0 l$ est la rotation de la base ou section extrême mobile par rapport à la base ou section fixe.

Chacune des sections transversales, d'abord plane, est maintenant une surface courbe, et toutes ces surfaces courbes ont une même forme, puisque w est indépendant de z. La forme de ces surfaces courbes dépend de la fonction B_0, par conséquent de la forme périphérique de la section transversale du prisme.

(*) Les *fibres* ou files de molécules primitivement parallèles à l'axe de z, formant les génératrices d'un cylindre ayant pour axe cette *fibre immobile* (77) qui peut être considérée comme l'axe de torsion, restent bien effectivement, après les déplacements de leurs points, des lignes droites si l'on n'en prend que de faibles portions. Mais si on les considère sur toute leur longueur supposée n'être pas très petite, ces fibres transformées forment des hélices, toutes de même pas, quel que soit le rayon de leur cylindre primitif. C'est un des caractères de la torsion, ici considérée, que ce changement de toutes les fibres en hélices.

Les curieux hyperboloïdes à une nappe, considérés ici par l'auteur, ayant pour axes des fibres quelconques, me paraissent avoir peu d'intérêt.

Résumons la discusion des §§ 25, 26, 27. Elle nous a manifesté les trois déformations principales d'une tige élastique : l'*extension*, la *flexion* et la *torsion*. Elle nous a donné aussi un point de départ certain pour les problèmes réels (*wirklicher*) que nous aurons à étudier, et une base solide sur laquelle nous pourrons, en les traitant, appuyer une suite de développements ayant forcément une rigueur mathématique moins grande, mais qui suffit au but proposé.

Comme conclusion de ces considérations, on peut encore énoncer le théorème suivant qui résulte de ce que les tensions tangentielles t_{xz}, t_{yz} [formules (65), (75 *a*), (75 *b*)] ne contiennent pas la variable z.

Les tensions qui résultent du déplacement latéral des fibres les unes par rapport aux autres sont constantes pour chaque fibre, en tous les points de sa longueur.

§ 28.— Application approximative à des problèmes réels (*wirkliche*).

Dans les applications pratiques, le problème posé est ordinairement inverse de celui des §§ précédents, à savoir : pour des forces quelconques appliquées à l'extrémité d'une tige, déterminer les extensions, flexions, torsions qu'elle éprouve. Mais, jusqu'à présent, c'est à peine si l'on a réussi à résoudre exactement ce problème pour un seul cas ; on doit donc considérer comme un résultat important, de pouvoir ramener approximativement aux déformations qui viennent d'être étudiées les déformations quelconques, en ne faisant que modifier la *répartition* des forces agissant sur la surface d'extrémité libre. Dans la théorie des corps rigides, on sait que l'action d'un système de forces quelconques dépend simplement de six combinaisons de ces forces, savoir, les trois sommes de leurs composantes parallèles aux axes des coordonnées, et les trois sommes de leurs moments autour des mêmes axes. Si donc on a, d'un côté, un système donné de forces agissant à l'extrémité libre d'une tige, et d'un autre, les déformations qu'on vient d'étudier, rigoureusement produites par un certain système de forces agissant aussi sur la section formant la même extrémité, et dans l'expression desquelles il entre un certain nombre de constantes arbitraires, on pourra disposer de ces constantes pour rendre ces deux systèmes *équivalents* l'un à l'autre, comme on dit en statique, c'est-à-dire ayant, non seulement en grandeur, mais encore en direction, la même *résultante* géométrique, et le même moment ou couple *résultant*. Pour cela, l'on égalera les unes aux autres les six expressions de sommes de composantes et de sommes de moments qui suffiraient à

définir l'action de chacun de ces deux systèmes, s'il s'agissait d'un corps rigide. Sans doute, l'action des deux systèmes de forces sur le corps élastique n'est pas identiquement la même ; toutefois, on peut admettre que l'on obtiendra une grande approximation en substituant au système qui est donné celui qui résulte de la discussion et des calculs des §§ 25, 26 ou 27, en y donnant des valeurs convenables aux constantes arbitraires, et en considérant ensuite les déformations et les tensions, résultant de l'analyse de ces §§, comme celles qui seraient produites par le système des forces données et qui constitueraient la solution rigoureuse et inconnue du problème (*).

On a donc à déterminer les constantes de manière à satisfaire à six équations.

Rappelons (commencement du § 22) que l'axe des z étant dirigé parallèlement aux arêtes du corps cylindrique ou prismatique que nous considérons, et le plan des xy étant celui de la base qui doit rester fixe, l'axe des x est supposé le prolongement de l'élément linéaire de la même base qui doit conserver sa direction. Décomposons toutes les forces données, agissant sur l'extrémité libre, en leurs composantes parallèlement aux axes coordonnés; désignons par

(78 *a*)
- A la somme de leurs composantes parallèlement aux x,
- B. . . . . aux y,
- C. . . . . aux z,

et par

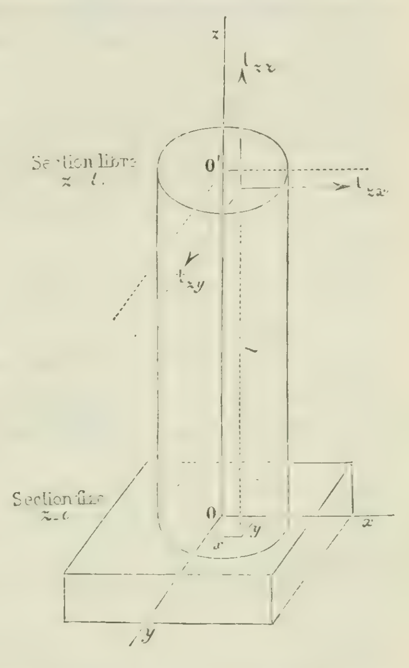
(78 *b*)
- A′ la somme de leurs moments autour de l'axe des x,
- B′. . . . . des y,
- C′. . . . . des z;

ceux des x, des y *étant tracés sur la base fixe*, distante de l de la base libre où les forces ont leurs points d'application.

Les moments positifs seront ceux des forces qui tendraient à faire tourner le corps dans le sens des aiguilles d'une montre, pour un observateur regardant l'origine et adossé sur l'axe positif des coordonnées; et nous admettrons aussi que les axes sont disposés de telle

(*) Voir, à la Note de la fin du présent paragraphe 28, les diverses preuves qui seront données de la possibilité, sans altérer sensiblement les résultats, d'une pareille substitution mutuelle de systèmes de forces statiquement équivalents; et l'inutilité probable de recherches qui seraient faites de solutions convenant à des tensions données quelconques, appliquées sur les bases et les faces des prismes.

façon qu'un observateur situé sur celui des x positifs, et regardant l'origine, voie l'aiguille d'une montre se diriger des y positifs vers les z positifs. Cela posé, les sommes A, B, C, A', B', C' de composantes et de moments des forces extérieures agissant à l'extrémité libre, doivent être égalées aux sommes correspondantes que l'on calculera en supposant appliquées, en chaque point de la section transversale libre, des forces précisément égales aux tensions qui s'y produisent. Ces tensions s'obtiennent en faisant $z = l$ dans les expressions (65) p. 150 (avec $b = 0$) de t_{xz}, t_{yz}, t_{zz}. Comme elles sont rapportées à l'unité de surface, si on les suppose appliquées en chaque point sur un élément $d\sigma$ de la section extrême σ, on aura les forces



$$t_{zx}\, d\sigma, \quad t_{zy}\, d\sigma, \quad t_{zz}\, d\sigma$$

appliquées au point dont les coordonnées sont x, y, l, et sur un élément $d\sigma$. Si maintenant on égale les sommes de ces composantes, et les sommes de leurs moments autour des axes des x, y, z dont l'origine est sur la section fixe, aux sommes de composantes et aux sommes de moments de forces extérieures A, B, C, A', B', C', définies par (78 a) et (78 b), on aura les équations suivantes :

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \int t_{zx}\, d\sigma = A, & \int (t_{zz} y - t_{zy} l)\, d\sigma = A', \\ \int t_{zy}\, d\sigma = B, & \int (t_{zx} l - t_{zz} x)\, d\sigma = B', \\ \int t_{zz}\, d\sigma = C, & \int (t_{zy} x - t_{zx} y)\, d\sigma = C'; \end{array} \right.$$

où les intégrales doivent s'étendre à toute la superficie σ de la section transversale considérée.

Les fonctions t_{zx}, t_{zy}, t_{zz}, ne contiennent les constantes inconnues a, b.... que d'une manière linéaire, et ces constantes s'y trouvent

multipliées par des fonctions que l'intégration définie transforme en coefficients numériques. Les équations (79) forment donc un système de six équations du premier degré qui suffisent pour la détermination des constantes.

S'il n'y a pas de raisons particulières de faire autrement, on peut encore simplifier cette détermination par un choix convenable du point fixe et de la direction des axes dans la première base ou section transversale. Le point qui se présente le plus naturellement pour en faire un point fixe est le centre de gravité de cette section, et alors l'axe des z devient *la ligne des centres de gravité*, c'est-à-dire la droite qui passe par ceux de toutes les sections transversales. On sait que les coordonnées du centre de gravité d'une section sont toujours données par les équations

$$\xi = \frac{\int x d\sigma}{\int d\sigma}, \qquad \eta = \frac{\int y d\sigma}{\int d\sigma}.$$

Si donc on prend pour origine des coordonnées le centre de gravité, on annule ξ, η, et par suite les intégrales qui forment les numérateurs de ces expressions. On a alors, par conséquent :

$$(80) \qquad \int x d\sigma = 0, \qquad \int y d\sigma = 0.$$

Enfin on peut encore choisir la direction des axes de manière que

$$(81) \qquad \int xy d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire prendre pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie de la section. Il est facile de déterminer de quel angle on doit faire tourner un système quelconque, pour le faire coïncider avec les axes principaux. Supposons donnés deux axes rectangulaires quelconques x et y; posons, en coordonnées polaires

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Pour passer à un nouveau système d'axes, faisant avec les premiers un angle α, il suffit de remplacer φ par $(\varphi - \alpha)$, et les coordonnées, dans ce nouveau système, deviennent :

$$x' = r\cos(\varphi - \alpha), \qquad y' = r\sin(\varphi - \alpha).$$

Pour que ce nouveau système coïncide avec celui des axes principaux

il faudra que l'on ait :

$$0 = \int x'y'd\sigma - \frac{1}{2}\int r^2 \sin 2(\varphi - \alpha)\, d\sigma \,.$$

Si l'on développe la valeur de sin $(2\varphi - 2\alpha)$ et si l'on remarque que l'angle α étant le même pour tous les points de la surface, il doit sortir du signe de l'intégration, cette équation devient :

$$0 = \cos 2\alpha \int r^2 \sin 2\varphi d\sigma - \sin 2\alpha \int r^2 \cos 2\varphi d\sigma \,,$$

ce qui donne :

$$\tan 2\alpha = \frac{\int r^2 \sin 2\varphi d\sigma}{\int r^2 \cos 2\varphi d\sigma}\,.$$

En remplaçant maintenant r et φ par leurs valeurs en x et en y, on a évidemment

$$r^2 \sin 2\varphi = 2xy \,, \qquad r^2 \cos 2\varphi = x^2 - y^2 \,;$$

et par suite

$$\tan 2\alpha = \frac{2\int xy d\sigma}{\int (x^2 - y^2)\, d\sigma}\,.$$

Le second membre ne contient que des quantités données : ce sont des intégrales définies, s'étendant à toute la section considérée, de fonctions de coordonnées rapportées au système d'axes considéré. L'angle α est donc déterminé par cette équation. Cependant elle donne pour cet angle plusieurs valeurs et il paraît subsister une certaine indétermination ; mais on voit facilement que ces diverses valeurs ne diffèrent entre elles que de multiples d'un angle droit. Si donc, par le choix de l'une de ces valeurs de α, on a déterminé un système d'axes, les autres systèmes possibles s'obtiendront en faisant tourner celui-là d'un certain nombre d'angles droits. Tous ces autres systèmes coïncideront donc avec le premier : il n'y aura de changé, pour quelques-uns, que la désignation des deux axes. On doit donc considérer la position du système d'axes coordonnés comme déterminée sans aucune ambiguïté.

Représentons maintenant par $\varkappa$ et λ les rayons de gyration de la section σ par rapport aux axes principaux x et y ; nous aurons les équations :

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int d\sigma = \sigma \,, \\ &\int x^2 d\sigma = \lambda^2 \sigma \,, \\ &\int y^2 d\sigma = \varkappa^2 \sigma \,; \end{aligned} \right.$$

et si maintenant, dans les équations (79) de la page 171, on exprime les tensions t au moyen des trois dernières formules (65) de la page 130 avec $b = 0$ et $z = l$, si l'on effectue les intégrations en tenant compte de (80) $\int x d\sigma = 0$, $\int y\, d\sigma = 0$, de (81) $\int xy\, d\sigma = 0$ et de (82) que nous venons d'écrire, enfin si l'on remarque que la deuxième et la quatrième équation (79) reviennent à

$$\int t_{zz}\, y d\sigma = Bl + A', \qquad \int t_{zz}\, x d\sigma = Al - B',$$

l'on obtient facilement les résultats suivants :

$$
(83)\quad
\begin{cases}
(1) & a = \dfrac{C}{E\sigma}\,; \\[2ex]
(2) & -\dfrac{b_1}{2}\left[\eta\lambda^2 + \left(\dfrac{E}{G} - 3\eta\right)\varkappa^2\right] + \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma = \dfrac{A}{G\sigma}\,; \\[2ex]
(3) & -\dfrac{b_2}{2}\left[\eta\varkappa^2 + \left(\dfrac{E}{G} - 3\eta\right)\lambda^2\right] + \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} d\sigma = \dfrac{B}{G\sigma}\,; \\[2ex]
(4) & a_2 + b_2 l = \dfrac{Bl + A'}{E\sigma\varkappa^2}\,; \\[2ex]
(5) & a_1 + b_1 l = \dfrac{Al - B'}{E\sigma\lambda^2}\,; \\[2ex]
(6) & \begin{cases}
-b_0(\varkappa^2 + \lambda^2) + \dfrac{1}{\sigma}\displaystyle\int \left(x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) d\sigma \\[2ex]
+ \dfrac{b_1}{2\sigma}\displaystyle\int \left[\left(\dfrac{E}{G} - 3\eta\right) y^3 - \left(2\dfrac{E}{G} - 3\eta\right) x^2 y\right] d\sigma \\[2ex]
- \dfrac{b_2}{2\sigma}\displaystyle\int \left[\left(\dfrac{E}{G} - 3\eta\right) x^3 - \left(2\dfrac{E}{G} - 3\eta\right) x y^2\right] d\sigma = \dfrac{C'}{G\sigma}\,. \quad (*)
\end{cases}
\end{cases}
$$

(*) **NOTE FINALE DU § 28**

1. — L'auteur avance dans ce § 28 (p. 169), et nous pensons que c'est avec raison, que les solutions données du § 23 au § 38, bien qu'elles exigent, pour être rigoureuses, un mode particulier, jamais réalisé, d'application et de distribution des forces aux extrémités des tiges qu'elles étendent, fléchissent ou tordent, conviennent néanmoins, avec toute l'approximation désirable, si des forces qui leur soient *statiquement équivalentes* sont appliquées et distribuées d'une autre manière quelconque vers ces extrémités ; c'est-à-dire que les dernières forces donneront les mêmes extensions, flexions et torsions que les premières, tout le long de la tige qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent.

Ainsi que nous l'avons promis à la Note de la fin du § 22, nous allons rapporter les motifs de penser qu'il en est bien ainsi.

D'abord, des expériences assez nombreuses tendent à prouver ce fait de la presque indifférence du mode d'application et de distribution des forces vers les extrémités des tiges, pourvu que leur longueur contienne un grand nombre de fois leurs dimensions transversales.

Ainsi déjà, la formule de l'extension simple, exprimant sa proportionnalité à la longueur de la tige étendue et à la résultante des tractions *longitudinales* qu'elle éprouve, rapportée à l'unité superficielle de la section, n'est analytiquement vraie que si les tractions sont appliquées aux points mêmes des bases, et uniformément distribuées sur leurs éléments ; et pourtant la loi que la formule exprime s'observe quand les forces agissent autrement auprès des extrémités de la tige, par exemple, comme le plus ordinairement, sur les faces latérales.

Ainsi, la formule de la flexion *égale*, ou en arc de cercle, n'est fournie par l'analyse qu'autant que les deux *couples fléchissants* soient formés de forces appliquées normalement sur les bases de la tige fléchie, et distribuées, quant aux intensités, d'une manière linéaire, c'est-à-dire proportionnellement aux distances de leurs points d'application à une même droite : pourtant cette formule s'observe encore quand chaque couple est formé seulement de deux forces appliquées dans deux sens opposés sur les côtés de la tige fléchie.

On peut en dire autant de la formule connue de la flexion *inégale* ou ordinaire, qui donne des résultats conformes à de nombreuses expériences, quoiqu'elle exige, analytiquement, pour l'application et la répartition des forces, sur les seules bases, un mélange complexe d'actions normales et d'actions tangentielles encore plus irréalisables.

Ainsi encore, la formule très simple de la torsion d'un cylindre à section circulaire est exacte seulement sous la condition que les forces qui l'opèrent agissent tangentiellement aux bases, perpendiculairement à leurs rayons, d'une manière égale sur toute zone annulaire ayant le même centre qu'elles, et proportionnellement au rayon moyen de cette zone de largeur très petite. Et cependant cette formule donne, pour tout autre mode d'application des forces ayant même couple résultant, des angles de rotation reconnus depuis longtemps conformes à ce que fournit l'expérience, dans les limites très suffisantes de l'approximation qu'elle comporte.

Nous pourrions citer aussi la confirmation, fournie par les expériences de Duleau, de Savart, de Wertheim, des formules de torsion de prismes à base carrée, à base rectangle, pincés ou sollicités latéralement au lieu de l'être sur leurs seules bases de la manière compliquée que les formules indiquent. (Mémoire sur la torsion et notes sur Navier, déjà cités.)

2. — Des observations très simples, qu'on peut faire sur des prismes de caoutchouc, si l'on n'a point à sa disposition des moyens de mesurage des déformations imperceptibles de matières raides (même Navier annoté § 6

de la note du n° 80, p. 40) rendent raison, en quelque manière, de cette possibilité de substituer, à de certains systèmes de forces agissant aux extrémités des tiges, des systèmes statiquement équivalents, ou qui n'en diffèrent que par des forces en équilibre, sans que cette substitution change les effets produits sur la presque totalité de la longueur; car ces observations montrent que les impressions et autres déformations purement *locales* que produisent ces forces qui se font équilibre sur une même petite partie de tige, ne se font jamais sentir que très peu en deçà et au delà des points où les forces sont appliquées.

Ces faits nombreux tendent à prouver que, quel que soit le mode d'application et de distribution des forces extérieures qu'on fait agir sur les extrémités des prismes élastiques, les tensions *intérieures*, tant normales que tangentielles, qui en résultent, se répartissent naturellement sur leurs diverses sections transversales, même assez peu distantes des bases, presque exactement comme les formules exigent qu'elles soient réparties sur les bases elles-mêmes pour que les effets qu'elles indiquent s'observent dans toute la rigueur analytique; d'où il suit qu'en soustrayant, par la pensée, de très petites portions des tiges, ou en substituant, à leurs bases, des sections qui en sont assez proches, les forces se trouvent appliquées et réparties, sur ces bases fictives, à très peu près conformément à ce que les formules indiquent et régissent.

3. — D'autres observations ou expériences, faites sur des pièces qui s'étendaient ou fléchissaient sensiblement, soit sous leur poids propre, soit par l'effet d'une charge répartie sur toute leur longueur, et aussi, des expériences de mouvements vibratoires, où l'inertie se trouvait en jeu comme une force animant tous les éléments du volume, ont prouvé même que les formules de l'extension, de la flexion, de la torsion, dont nous parlons, peuvent être employées très approximativement lorsqu'il y a des forces agissant ailleurs qu'aux extrémités ou à des endroits très distants les uns des autres. Il suffit, pour pouvoir y appliquer ces formules, de prendre pour base ou extrémité fictive de la pièce une section transversale quelconque, en supposant cette section sollicitée par la résultante des forces extérieures ou d'inertie qui agissent sur toute la partie de la tige se trouvant en deçà.

Bien plus : les formules s'appliquent, presque avec la même approximation, ou représentent à peu près aussi bien les résultats observés et mesurés, lorsque la pièce, toujours de forme allongée, n'est pas prismatique, mais est un peu tronconique, ou courbe, ou *torse*; une section quelconque étant toujours prise pour une des extrémités de la portion de pièce au delà, et soumise aux forces s'exerçant sur la portion en deçà de la section quelconque ainsi choisie.

4. — Et il est fort heureux, on peut le dire, qu'il en soit ainsi; car, comme nous l'avons remarqué plusieurs fois (Historique, n° XXV et Appendice II, § 7, p. 525 de la même réédition des *Leçons* de Navier), si le *pro-*

blème de Lamé (énoncé à la note ci-dessus du § 23), *de l'état d'équilibre d'un prisme rectangle dont les faces seraient soumises à des forces données*, recevait jamais cette solution qu'il a inutilement cherchée et longtemps demandée au monde savant, on ne serait très-vraisemblablement pas plus avancé. En effet, si l'on excepte le seul cas d'une pression uniforme communiquée par un fluide, les *données* mêmes de ce problème, savoir les pressions ou tensions exercées sur les divers éléments des faces extérieures, *ne sont jamais connues;* c'est par l'intermédiaire d'autres solides qu'on les exerce sur ces faces, et l'on n'en connaît dans la pratique que les résultantes et les moments résultants. Il est donc à penser que les solutions du genre de celles dont on s'est occupé depuis le § 22, et dont on va s'occuper encore, offrent tout ce qu'on peut espérer obtenir d'utile pour la détermination, tout au moins approchée, des modifications ou déformations de pièces élastiques, dues à des forces quelconques, dans les limites qu'on est supposé ne pas franchir et qui sont celles de la stabilité de la contexture de la matière et de ses propriétés élastiques.

5. — Mais il convient de donner aussi des raisons théoriques et générales de cette applicabilité, comme approximation, des formules des §§ 23 à 38, tirées de la supposition du § 22 (p. 140) :

$$(a) \quad [(57\,b) \text{ reproduite}] \qquad t_{xx} = 0, \quad t_{yy} = 0, \quad t_{xy} = 0, \text{ partout },$$

aux effets produits par des forces agissant d'une manière quelconque sur des tiges ou pièces de forme allongée, dont les faces latérales, ainsi que les molécules de l'intérieur sont, ou libres de toute action extérieure, ou soumises seulement à des actions réparties d'une manière continue et ne donnant ainsi qu'un faible contingent sur chaque tronçon ou portion de tige, d'une longueur ne surpassant pas la dimension transversale moyenne.

Il convient de prouver que, dans ces conditions-là, ce que donnent les formules pour les trois autres composantes de tension, t_{zz}, t_{zx}, t_{yz}, représente très approximativement la manière dont celles-ci s'établissent et se distribuent sur les diverses sections, excepté sur celles qui sont fort proches des extrémités; de manière qu'on puisse, avec assurance, et indépendamment de tout empirisme, étendre l'emploi de ces formules à l'appréciation d'effets sur lesquels les expériences citées n'ont point porté (tels que les flexions accompagnées de torsion), ainsi que de ceux qu'elles n'ont point révélés (tels que les glissements qui accompagnent la flexion inégale, etc.).

Il semble au premier abord que cette petitesse relative ou cette presque nullité des composantes transversales de tension t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} est facile à prouver ; qu'elle résulterait de ce que chacune de ces trois composantes est nulle à la surface latérale de la tige, à la fois d'un côté et du côté opposé du contour de chaque section ; d'où suivrait, si les dimensions transversales sont très petites du premier ordre, que les composantes en question le sont du second ou du quatrième. C'est ce qu'on peut voir, en prenant pour fixer

les idées une section rectangle ; car si ses côtés sont $2a$ parallèlement aux x, et $2b$ parallèlement aux y, comme t_{xx}, t_{xy} s'annulent pour $x = a$ et $x = -a$, t_{yy} et t_{xy} pour $y = b$ et $y = -b$, t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} doivent avoir leurs expressions en x et y respectivement divisibles par $a^2 - x^2$, $b^2 - y^2$ et $(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, facteurs qui sont du deuxième et du quatrième ordre. On met même ces trois facteurs en évidence si, comme ont fait Poisson et Cauchy dans leurs tentatives de 1828, déjà citées (Mém. de l'Institut, t. VIII. — Exercices de mathématiques), l'on admet que les tensions sont exprimables en séries procédant suivant les puissances et produits de puissances entières de x, y (Mémoire sur la flexion, 1854, au Journal de Liouville, 1856, n° 5).

Mais il faut convenir que cette supposition des deux illustres géomètres, essayée en 1828, est bien arbitraire ; elle est même sujette à égarer : et fût-elle juste, il faut remarquer que ce qu'on dit ainsi de t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} s'appliquerait également à t_{xz}, t_{yz} qui s'annulent aussi sur les bords. On annulerait donc toutes les composantes excepté t_{zz}. Cela est supposable pour les tiges longues et minces, quand on ne s'occupe que de leur flexion ; mais cela ne s'applique plus quand il y a torsion, cas où t_{xz}, t_{yz} subsistent et sont très grands devant t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} ; et cela ne fournirait pas non plus, pour la flexion *inégale*, les glissements qui l'accompagnent et qui dépendent des *efforts tranchants*, sommes des intensités de t_{xz} ou t_{yz} sur tous les éléments de chaque section.

6. — Aussi M. Kirchhoff a présenté des considérations (*) destinées, en partie, au même but, et où il laisse subsister les tensions transversales t_{xz}, t_{yz}, bien que l'illustre Correspondant de l'Institut suppose *infiniment petites* les dimensions transversales des tiges élastiques auxquelles elles se rapportent. Clebsch reproduit, aux §§ 47, 48, 49 ci-après, son analyse, que j'ai tâché aussi de présenter d'une manière claire à la fin de l'Appendice complémentaire de l'édition annotée (1864) de Navier. Elle consiste surtout dans des calculs de pure cinématique, d'où il conclut que si la tige mince est divisée, par la pensée, en tronçons ayant des longueurs du même ordre de petitesse que les dimensions transversales, et si l'on représente par x, y, z avant les petits déplacements éprouvés, $x+u$, $y+v$, $z+w$ après, les coordonnées d'un point M par rapport à des axes *locaux* accompagnant dans ses mouvements le tronçon dont ce point M fait partie, l'axe des z étant *longitudinal* ou dirigé suivant la ligne des centres de gravité des sections, on a les expressions suivantes, où r_1, r_2, r, ∂, sont quatre quantités sensiblement constantes pour chaque tronçon, et pouvant varier d'un tronçon à l'autre [Expressions (11) § 49] :

$$(b) \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = ry - r_2 z\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = r_1 z - rx \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \partial + r_2 x - r_1 y\,.$$

(*) Cette discussion est une sorte d'anticipation, que j'ai cru utile de faire ici, des considérations de la *deuxième partie*, ch. IV, §§ 47 à 50.

Elles signifient, comme il n'est pas difficile de le reconnaître, que, par cela seul que les dimensions transversales d'une tige élastique sont infiniment petites, les déplacements de ses points, produits par des forces appliquées et distribuées n'importe de quelle manière, sont, s'ils opèrent avec continuité, réductibles, dans chacune de ses petites parties :

1° A une dilatation longitudinale ∂;

2° A des *flexions* r_1 autour d'une parallèle à l'axe transversal des x, et r_2 autour d'une parallèle à celui des y; flexions faisant prendre, en cet endroit, aux projections de l'axe de la tige sur les plans zy et zx, des courbures dont les rayons sont $-\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$;

3° A une *torsion* r, faisant tourner une des bases du tronçon, devant l'autre base, d'un angle égal à r multiplié par leur distance.

D'où M. Kirchhoff déduit par intégration, en appelant u, v, w les valeurs de u, v, w pour $x=0$, c'est-à-dire les petits déplacements des divers points d'une section quelconque prise pour base d'un tronçon aussi quelconque, des expressions de u, v, w qui, différentiées en x, y, z, donnent les suivantes pour les dilatations et glissements :

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}, & \partial_y = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}, & \partial_z = \partial + r_2 x - r_1 y\,; \\[2ex] g_{yz} = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} - rx\,, & g_{zx} = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + ry\,, & g_{xy} = \dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}. \end{array}\right.$$

La troisième de ces formules *justifie* en quelque sorte le fondement principal de la théorie de la flexion, à savoir la *linéarité* de l'expression de la dilatation des *fibres* ou éléments longitudinaux de la tige, en fonction des coordonnées transversales x, y. Les quatrième et cinquième fournissent aussi le fondement principal de la théorie de la torsion. Et si l'on met toutes ces expressions de $\partial_x \ldots\ldots g_{xy}$ dans celles qui donnent t_{xz}, t_{yz}, t_{zz}, puis celles-ci dans $\frac{\partial \mathrm{t}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{t}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{t}_{zz}}{\partial z} = 0$ qui est la troisième des équations de l'équilibre intérieur, ainsi que dans une de celles qui sont relatives à la surface latérale, on obtient l'équation indéfinie du second ordre, et l'équation définie, aussi en w, qui donnent ce déplacement longitudinal, ou le *gauchissement* des sections, dû à la torsion ; et cela, comme on voit, indépendamment de tout mode particulier d'application et de distribution des forces sur la tige, à la seule condition que ses dimensions transversales puissent être regardées comme infiniment petites.

7. — Mais deux objections peuvent être faites à la remarquable et délicate analyse de M. Kirchhoff, en tant que présentée comme propre à conduire au but ici désiré.

L'une est que les résultats qu'elle fournit sont achetés par trop de suppositions restrictives. Les formules (c) donnent, en effet, zéro pour les dérivées,

par rapport à z, des six quantités $\partial_x \ldots g_{xy}$, et par conséquent aussi des six composantes de tension t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}. Or, pareille chose n'a pas lieu avec les formules (65) de la fin du § 25, car la cinquième donne, eu égard à ce qu'il est démontré au § 25 [équation (70 a)] qu'il faut faire $b = 0$,

$$\frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = \mathrm{E}(b_1 x + b_2 y),$$

quantité petite sans doute, vu la petitesse supposée des coordonnées transversales, en sorte qu'on peut la faire nulle pour obtenir certaines évaluations de *première* approximation; mais quantité à laquelle il faut, pour d'autres, de *deuxième*, attribuer une valeur finie; car dans la flexion *inégale*, c'est-à-dire variable d'un bout à l'autre de la tige, et qui est constamment déterminée par les forces ne faisant pas couples, $\mathrm{E}b_1$, $\mathrm{E}b_2$ peuvent avoir des valeurs très grandes, et il faut tenir compte de la dérivée $\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}$ pour obtenir les glissements transversaux et longitudinaux qui se combinent, d'une manière souvent sensible et influente, avec les dilatations ∂_z des fibres; circonstances que la théorie de M. Kirchhoff, qui vient d'être présentée, serait impuissante à fournir.

L'autre objection, nous le croyons, est plus grave :

L'expression (c), $\partial_z = \partial + r_2 x - r_1 y$ ou $= \partial + \frac{x}{\rho_2} + \frac{y}{\rho_1}$ (ρ_2 et ρ_1 étant les rayons de courbure des deux projections de l'axe de la tige sur les plans yz, xz passant par sa tangente) donne bien la loi des dilatations des fibres à travers chacune de ses sections; mais, pour calculer les flexions, il faut aussi autre chose; il faut connaître les tensions t_{zz} de ces fibres, ou savoir par quoi on doit multiplier les ∂_z pour avoir les t_{zz}; si c'est bien, par exemple, le coefficient ou module d'élasticité E, comme si chaque fibre ne recevait aucune action transversale de la part des fibres voisines. Cela exige qu'on connaisse les rapports des dilatations ou contractions transversales aux dilatations longitudinales, et, par conséquent, que l'on détermine les déplacements latéraux u, v.

Aussi, M. Kirchhoff substitue les t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} résultant des valeurs (c) des ∂, g, dans les équations de l'équilibre des éléments intérieurs, ainsi que dans celles qui sont relatives aux points de la *surface latérale* de la tige; ce qui lui donne des équations différentielles, tant *indéfinies* que *définies*, en u, v, comme en w. On ne peut pas les intégrer toutes, comme on fait pour celles qui ne contiennent que w. Mais il observe *qu'on y satisfait* en posant $t_{xx} = 0$, $t_{yy} = 0$, $t_{xy} = 0$ (comme il dit que je l'ai remarqué le premier, et ce qui a pour conséquence $t_{zz} = \mathrm{E}\partial_z$).

En effet, ajoute-t-il, si l'on résout par rapport à ∂_x, ∂_y, g_{xy} les trois équations ainsi posées, on a, pour leurs valeurs, $c\partial_z$, $c'\partial_z$, $c''\partial_z$; c, c', c'' étant

des constantes, même dans les cas où il n'y a de plans de symétrie de contexture que perpendiculairement à l'axe de la tige ou des z; d'où il suit, d'après la valeur linéaire (c) de ∂_z en x, y, *que les dérivées secondes*, en x, y, de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, *sont toutes* $=0$; elles satisfont, ainsi, identiquement à

$$(d) \qquad \frac{\partial^2 \partial_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \partial_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y};$$

ce qui est la condition (appelée quelquefois de *compatibilité*) *pour que les grandeurs* u, v, *puissent être déterminées conformément aux deux premières et à la sixième des égalités* (*c*).

Or, cette manière de prouver, par une de ses conséquences, savoir, par une *possibilité*, ou une non-incompatibilité, la nullité qu'on veut établir de t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}, n'est, évidemment, point satisfaisante. Rien ne dit qu'aucune autre hypothèse ne remplirait la condition (*d*). Bien plus, observons que, si les inégalités posées : $t_{xx}=0$, $t_{yy}=0$, $t_{xy}=0$, permettent de satisfaire aux équations d'équilibre intérieur, et d'équilibre sur la plus grande partie de la surface latérale, elles ne satisfont nullement aux conditions et équations d'équilibre aux extrémités, c'est-à-dire sur les bases, et sur les petites parties latérales qui les avoisinent, car il peut y agir de pareilles composantes de tension non nulles, puisque aucune hypothèse n'a été faite sur le mode d'action et de distribution des forces appliquées en ces endroits. La réduction des dimensions transversales à des lignes infiniment petites, et ce qu'on en déduit, n'ajoutent donc que peu de chose à ce qu'on avait tiré, aux §§ précédents (et qui était même plus complet à certains égards) de la même supposition de composantes transversales de tension nulles, faite comme essai dès le début.

8. — M. Boussinesq nous paraît être parvenu plus complètement et plus assurément au même but qui est surtout, répétons-le, la justification du point de départ d'une analyse comme celle des §§ 23 à 38, savoir la supposition *exacte* ou *approchée*

$$(e) \qquad t_{xx}=0, \qquad t_{yy}=0, \qquad t_{xy}=0$$

de nullité des actions mutuelles des fibres longitudinales dans les sens transversaux.

Nous allons exposer, en le développant, son procédé que nous rendrons aussi clair que nous pourrons, en l'appliquant, pour cela, au cas simple d'une tige *pleine*, de matière homogène, offrant trois plans de symétrie de contexture, et en renvoyant au Mémoire du savant professeur de la Faculté de Lille (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1871, première partie, *les tiges*), ainsi qu'à son *complément* inséré en 1879 au même journal, pour sa généralisation; car il l'applique à un corps allongé, pouvant être évidé tubulairement en plusieurs endroits, ayant ses sections transversales

pour seuls plans de symétrie de contexture, et composé d'une matière dont la nature peut changer, même brusquement, dans les sens transversaux.

Ce qu'a de spécial sa méthode, et ce qui permet, lorsqu'on l'emploie, de tirer des conclusions plus générales et plus certaines que par les autres, c'est qu'il met en œuvre non seulement les équations de l'équilibre des éléments, mais encore le principe non moins incontestable du *potentiel d'élasticité*, ou le fait connu et généralement admis que ce *travail de déformation élastique*, déjà considéré au § 16 ci-dessus, est toujours positif, quelles que soient les petites déformations, à partir de l'état *naturel* ou sans tensions, que l'on fasse subir à un corps élastique; fait évident, car il n'est autre que celui de la consommation nécessaire, pour tout corps qu'on écarte de cet état primitif, d'un certain travail dont le potentiel mesure la grandeur.

Le double de ce potentiel ou de ce travail, depuis l'état où les tensions étaient zéro, jusqu'à celui où leurs six composantes sur trois petites faces perpendiculaires aux x, y, z ont acquis les intensités $t_{xx}, \ldots\ldots t_{xy}$, par suite des déformations $\partial_x, \ldots\ldots g_{xy}$ de l'élément dont le centre est au point (x, y, z), a, si on le divise par le volume de l'élément, et si on le représente par $2\,\Phi$, la valeur suivante:

$$(f) \qquad 2\,\Phi = t_{xx}\partial_x + t_{yy}\partial_y + t_{zz}\partial_z + t_{yz}g_{yz} + t_{zx}g_{zx} + t_{xy}g_{xy}\,;$$

car, d'après ce qu'on a vu à ce § 16, p. 61, le travail élémentaire qu'exige, par exemple, la production d'une portion infiniment petite $\delta\partial_x$ de la dilatation ∂_x est $t_{xx}\,\delta\partial_x$; par conséquent, jusqu'à ce que ∂_x ait acquis sa valeur totale, et t_{xx} sa valeur finale, en passant uniformément par tous les degrés d'intensité depuis zéro, il y aura eu travail total opéré $\frac{1}{2}t_{xx}\partial_x$, dont le double est le premier terme de l'expression (f) de $2\,\Phi$; et la même chose peut être dite pour les autres termes.

9. — C'est cette quantité qui doit rester positive pour toutes les valeurs, soit positives soit négatives, de $\partial_x, \ldots\ldots g_{xy}$.

Si l'on y met, pour ces six déformations élémentaires, ∂, g, les valeurs qu'on tire pour elles en résolvant, comme équations du premier degré, les six formules (25) $t_{xx} = a_{xx,xx}\partial_x + \ldots$, $t_{yy} = \ldots$, du § 11, s'appliquant à des corps de toute contexture, $2\,\Phi$ se trouvera exprimé en une fonction homogène du second degré des six quantités $t_{xx}, \ldots\ldots t_{xy}$.

On sait qu'une pareille fonction est toujours partageable en autant de carrés parfaits de polynômes du premier degré qu'elle a de variables, ces carrés étant affectés de coefficients qui doivent être tous positifs si la fonction elle-même est astreinte à rester positive pour toutes les valeurs de ses variables; et c'est ici le cas, ainsi qu'il vient d'être dit. Comme nous nous

bornons au cas de trois plans de symétrie perpendiculaires aux x, y, z, ou au cas des formules (h), $t_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z$, $t_{yy} = \ldots\ldots$, $t_{xy} = fg_{xy}$ de la grande Note de la fin du § 16, nous aurons à substituer dans (f) les expressions (r) du nº 15 de cette note :

$$(g)\quad \left\{\begin{array}{l} \partial_x = \dfrac{t_{xx}}{E_x} - \dfrac{t_{yy}}{F_z} - \dfrac{t_{zz}}{F_y},\quad \partial_y = \dfrac{t_{yy}}{E_y} - \dfrac{t_{zz}}{F_x} - \dfrac{t_{xx}}{F_z},\quad \partial_z = \dfrac{t_{zz}}{E_z} - \dfrac{t_{xx}}{F_y} - \dfrac{t_{yy}}{F_x}, \\ \text{en y joignant} \\ \qquad g_{yz} = \dfrac{t_{yz}}{d},\qquad g_{zx} = \dfrac{t_{zx}}{e},\qquad g_{xy} = \dfrac{t_{xy}}{f}; \end{array}\right.$$

E_x, E_y, E_z étant des modules d'élasticité; et F_x, F_y, F_z, trois quotients, par des binômes tels que $ad' - e'f'$, du déterminant quintinôme appelé D (voir page 80).

Les trois termes fournis par la substitution des g seront déjà des carrés; disposons de la composition des trois autres carrés de manière que le premier contienne les trois tensions t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, le second t_{xx}, t_{yy}, le troisième t_{yy} seul, nous aurons :

$$(h)\quad 2\Phi = \frac{1}{E_z}\left(t_{zz} - \frac{E_z}{F_y}t_{xx} - \frac{E_z}{F_x}t_{yy}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(t_{xx} - \frac{A}{C}t_{yy}\right)^2 + \frac{1}{B}t_{yy}^2 + \frac{t_{yz}^2}{d} + \frac{t_{zx}^2}{e} + \frac{t_{xy}^2}{f};$$

$\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ étant trois quantités qu'on déterminera facilement en E_z, E_y, ... F_z si, après avoir développé les carrés du binôme et du trinôme, on égale ce qui multiplie les carrés et les produits deux à deux des tensions t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, à ce qui affecte les carrés et produits pareils dans l'expression (e) de 2Φ, après qu'on y a mis pour les ∂_x, ∂_y, ∂_z leurs valeurs trinômes (g).

Quelle que soit leur composition, on peut affirmer que $\frac{1}{E_z}$, $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ sont des quantités positives, ainsi que d, e, f. En effet, 1º si l'on suppose, ce qui est possible, toutes les composantes t_{xx}, ... nulles excepté t_{zz}, 2Φ se réduit à $\frac{1}{E_z}t_{zz}^2$; et, 2Φ devant être positif, $\frac{1}{E_z}$ doit l'être aussi.

2º Comme on peut faire t_{yy} nul, ainsi que les t_{yx}, t_{zx}, t_{xy}, et faire, en même temps, $t_{zz} = \frac{E_z}{F_y}t_{xx}$, ou, autrement dit, comme on peut disposer de tous les t, hors t_{xx}, de manière que 2Φ se réduise à $\frac{1}{A}t_{xx}^2$, on voit que $\frac{1}{A}$ doit être positif aussi.

3º Comme on peut annuler tous les t, hors t_{yy}, $\frac{1}{B}$ encore doit être positif.

10. — Ceci établi, mettons dans l'égalité (h), à la place de 2Φ, le sextinôme (f) qu'il représente; effaçons, dans chacun des deux membres de l'équation qui en résultera, les deux avant-derniers termes, car ils ont, de part et d'autre, les mêmes valeurs; puis, dans le premier terme du second membre, remplaçons l'un des deux facteurs trinômes du carré par $\mathrm{E}_z\partial_z$, qui est sa valeur d'après la troisième formule (g); ce premier terme deviendra

$$(i) \qquad \partial_z\left(\mathrm{t}_{zz}-\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{F}_y}\mathrm{t}_{xx}-\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{F}_x}\mathrm{t}_{yy}\right).$$

Faisons-le passer dans le premier membre; le produit $\mathrm{t}_{zz}\partial_z$ disparaîtra, et l'équation se réduira à

$$(j) \quad \mathrm{t}_{xx}\partial_x+\mathrm{t}_{yy}\partial_y+\mathrm{t}_{xy}\mathrm{g}_{xy}+\left(\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{F}_y}\mathrm{t}_{xx}+\frac{\mathrm{E}_z}{\mathrm{F}_x}\mathrm{t}_{yy}\right)\partial_z=\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\mathrm{t}_{xx}-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\mathrm{t}_{yy}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{B}}\mathrm{t}_{yy}^2+\frac{1}{\mathrm{f}}\mathrm{t}_{xy}^2.$$

Or, je dis que si l'on multiplie les deux membres de cette équation par l'élément $d\sigma=dxdy$ de la superficie, que nous appellerons σ, de la section ayant la coordonnée longitudinale quelconque z, et si on les intègre ensuite pour toute l'étendue de cette superficie, *on aura zéro dans le premier membre.*

11.— Pour le démontrer, examinons d'abord comment les tensions intérieures, les dilatations, etc., doivent, d'une manière générale, se comporter et se régler dans une tige mince et allongée, prismatique ou bien presque prismatique, c'est-à-dire très peu courbe et très peu torse, dont les dimensions transversales, si elles ne sont pas constantes, ne varient que lentement d'un bout à l'autre; tige qu'on suppose soumise à des forces extérieures agissant les unes localement, c'est-à-dire aux extrémités, ou bien à des endroits isolés, où elles sont réparties sur de très faibles longueurs, les autres s'exerçant entre ces endroits-là, tant à l'intérieur de la masse que sur sa surface latérale, mais distribuées ou uniformément ou *continûment* et graduellement; et dont l'intensité totale, sur chacune des longues portions de la tige ainsi partagée, n'excède point celle des forces isolées ou locales qui sont appliquées vers les extrémités de cette portion.

Prenons pour axe des z, en chaque endroit, la ligne des centres de gravité des sections transversales, et les axes des x, y, rectangulaires entre eux et à cette ligne sur une des sections. Dans une quelconque des portions dont nous parlons, que nous appelons longues parce qu'elles sont supposées l'être beaucoup par rapport aux dimensions transversales, il est facile de reconnaître que les composantes t de tension et les dilatations ou glissements ∂, g, varient d'une manière incomparablement moins rapide dans le sens longitudinal z que dans les sens x et y; de sorte que, si nous exceptons de petites portions de tige avoisinant les extrémités, où se trouvent les points d'application des forces locales ou discontinues, les dérivées de ces déformations ∂, g par rapport à z seront, de nécessité, considérablement moin-

dres que ce que sont ou peuvent être leurs dérivées par rapport à x et à y. En effet, pour g_{zx}, par exemple, $\frac{\partial g_{zx}}{\partial z}$ sera de l'ordre de grandeur du quotient, par la longueur de la tige ou de la longue portion de la tige considérée, de cette déformation g_{zx}, ou de la différence des valeurs qu'elle a aux extrémités ; tandis que $\frac{\partial g_{zx}}{\partial x}$ pourra être de l'ordre de grandeur du quotient de g_{zx} par la demi-épaisseur, qui n'est, disons-nous, qu'une fort petite fraction de la longueur. Autrement dit, si pour fixer les idées nous divisons la tige, par la pensée, en tronçons dont la longueur soit de l'ordre de grandeur de la dimension transversale moyenne, les ∂, g auront des valeurs extrêmement peu différentes en deux points homologues des bases de chaque tronçon, tandis qu'ils pourront avoir, du centre au périmètre des sections, des différences de valeur aussi considérables que d'une extrémité à l'autre de la tige. Nous pouvons donc, comme approximation, déterminer la loi de variation des déformations ∂, g transversalement, ou en fonction de x et y, *comme si leurs dérivées par rapport à z étaient nulles*. Cette hypothèse, ou ce point de départ, n'est que comme une traduction analytique de l'énoncé de la question même qui nous occupe, et qui est de déterminer ce qui se passe dans une tige allongée et très mince sollicitée de la manière continue que nous venons de supposer.

12. Il nous suffira, toutefois, et ce sera le moyen de rendre nos résultats aptes à fournir, ultérieurement, des secondes approximations, de partir, comme bases de calcul, des suppositions suivantes, fort approchées, disons-nous, quand elles ne sont pas rigoureuses :

$$(k) \qquad \frac{\partial^2 \partial_x}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 \partial_y}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 \partial_z}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial z^2} = 0 ,$$

$$(l) \qquad \frac{\partial g_{zx}}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial g_{zy}}{\partial z} = 0 ,$$

et qui sont plus *larges* ou moins restrictives que ne serait la supposition de nullité de toutes les dérivées du *premier ordre* en z ; car elles se réduisent, en ce qui concerne ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{xy}, à supposer qu'au lieu de rester sensiblement les mêmes, ces quantités *varient linéairement* en passant d'un tronçon au suivant ; ce qui peut être regardé comme presque rigoureux.

Or, les deux (l) et la dernière (k) sont la même chose que

$$(m) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} = 0.$$

Si successivement, 1° on différentie la première de ces trois équations (m) par rapport à x, 2° on différentie la seconde par rapport à y, 3° on retranche la troisième de la somme des deux premières différentiées respecti-

vement par rapport à y et à x, l'on obtient, eu égard aux deux premières (k) où l'on mettrait pour ∂_x, ∂_y leurs valeurs $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$(n) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\ ,$$

pour tous les points (x, y) des diverses sections; en exceptant seulement celles qui sont très proches des points d'application des forces que nous avons appelées *isolées*, agissant discontinûment, ainsi que des points où les forces qui agissent continûment changeraient brusquement d'intensité par unité de longueur.

Sous cette restriction, qui n'atteindra que de minimes portions de la tige, on voit, par ces trois équations (n), que la dilatation longitudinale $\frac{\partial w}{\partial z}=\partial_z$ doit être, aux divers points de chaque section, une même fonction du premier degré de leurs coordonnées, en sorte qu'on peut poser

$$(o) \qquad \partial_z=\mathcal{A}+\mathcal{B}x+\mathcal{B}_1 y\ ;$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ étant des fonctions de z seul; premier et important résultat qui même aurait pu être obtenu en supposant seulement

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial y}\right)=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_{zx}}{\partial x}\right)=0\ ,\quad \text{au lieu de } (l)\ ,\quad \frac{\partial g_{yz}}{\partial z}=0\ ,\quad \frac{\partial g_{zx}}{\partial z}=0\ .$$

13. Ceci obtenu, pour arriver à reconnaître la nullité, partout, des composantes de tension dans les sens x, y sur toute face parallèle aux fibres ou aux arêtes, il nous faut nécessairement mettre en œuvre :

1° Les équations exprimant leur nullité sur les faces latérales du prisme, équations qui sont celles (57 a) du § 22, savoir, n désignant la direction d'une normale à ces faces,

$$(p) \quad t_{xx}\cos(n,x)+t_{xy}\cos(n,y)=0\ ,\quad t_{xy}\cos(n,x)+t_{yy}\cos(n,y)=0\ .$$

2° Les équations de l'équilibre dans les mêmes sens x, y, à partir de ces faces, entre les tensions et les forces extérieures X, Y agissant sur les éléments du volume. Nous pouvons, de ces deux équations (24) du § 12, effacer les avant-derniers termes $\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}$, $\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}$, puisque les égalités posées (l) supposent ces dérivées en z nulles ou négligeables vis-à-vis des deux termes précédents qui sont des dérivées en x et y; ces équations d'équilibre sont ainsi

$$(q) \qquad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+X=0\ ,\qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+Y=0\ .$$

Pour pouvoir les combiner avec celles (p), nous les multiplierons par l'élément $d\sigma = dxdy$ de la section σ, et par une fonction quelconque U de x, y, dont nous disposerons ensuite; puis nous intégrerons pour toute l'étendue de la superficie σ, et nous transformerons les intégrales des termes en d'autres qui soient prises pour le contour de σ où agissent les forces dont les équations de condition (p) annulent les sommes.

Afin de le faire facilement, écrivons ainsi le produit de la première équation (q) par $\mathrm{U}\,dxdy$:

$$(r) \quad \iint dxdy \left(\frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xx}}{\partial x} - \mathrm{t}_{xx}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xy}}{\partial y} - \mathrm{t}_{xy}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right) + \iint \mathrm{UX}\,dxdy = 0.$$

Il est facile de reconnaître qu'en vertu de la première des équations (p) relatives au contour de σ, le premier et le troisième terme entre parenthèses de celle (r) qu'on vient d'écrire peuvent être effacés.

La chose est évidente si la section est un rectangle ayant pour côtés $2a$ parallèlement aux x, $2b$ parallèlement aux y, car, en effectuant l'intégration en x du premier terme $\frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xx}}{\partial x}$, on a, en vertu de la première équation (p), $\mathrm{U\,t}_{xx} = 0$ aux deux bords $x = -a$, $x = a$ où $\cos(n,y)$ est nul et $\cos(n,x)$ est $= 1$; et il en sera de même du troisième terme $\frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xy}}{\partial y}$ d'après la première équation (p), car, en intégrant en y on a $\mathrm{U\,t}_{xy}$ dont le second facteur est nul aux limites d'intégration $y = -b$, $y = b$ puisqu'on y a $\cos(n,x) = 0$, $\cos(n,y) = 1$.

14. — Mais on reconnaît la même annulation de ces premier et troisième termes entre parenthèses de (r) pour une section ayant un contour courbe quelconque s, si l'on fait usage d'un procédé bien connu et fréquemment employé en physique mathématique (notamment par Clebsch aux §§ 21 et 29). Il consiste à opérer en x l'intégration $\iint dxdy\,\frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xx}}{\partial x}$; cela donne $\int dy\,[(\mathrm{U\,t}_{xx})'' - (\mathrm{U\,t}_{xx})']$, en désignant par les accents $''$ et $'$ les valeurs de $\mathrm{U\,t}_{xx}$ aux points où une droite parallèle aux x, tracée sur la section σ à la distance y de son axe des x, vient rencontrer son contour du côté des x positifs et du côté des x négatifs respectivement. Or, ds représentant les parties du contour interceptées par la bande dont la largeur est dy, on a, d'un des deux côtés, $dy = ds\cos(n,x)$, et, de l'autre, $dy = -ds\cos(n,x)$: l'intégrale $\iint dydx\,\frac{\partial \,.\mathrm{Ut}_{xx}}{\partial x}$ prise pour toute la superficie de la section σ revient donc à l'intégrale $\int \mathrm{U\,t}_{xx}\cos(n,x)\,ds$ prise pour tout son contour.

En y réunissant celle $\int U t_{xy} \cos(n,y)\, ds$ qu'on obtiendra de même en effectuant en y l'intégration $\iint dxdy \dfrac{\partial . U t_{xy}}{\partial y}$, on aura, pour la partie du premier membre de l'équation (r) qui vient du premier et du troisième terme de sa parenthèse, en désignant par $\int_s$ une intégrale s'étendant à tout le contour :

$$\int_s U\,[t_{xx} \cos(n,x) + t_{xy} \cos(n,y)]\, ds \ ,$$

c'est-à-dire *zéro* d'après la première condition (p).

Cette équation se réduit donc, en désignant par $\int_\sigma$ une intégrale prise pour toute l'étendue de la surface d'une section quelconque σ, à la première des deux équations suivantes, dont la seconde se tire de la même manière de la deuxième (q), multipliée par V, qui désigne une autre fonction de x, y :

$$(s)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \left(t_{xx}\frac{\partial U}{\partial x} + t_{xy}\frac{\partial U}{\partial y}\right) d\sigma - \int_\sigma UX\, d\sigma = 0 \ , \\ \displaystyle\int_\sigma \left(t_{xy}\frac{\partial V}{\partial x} + t_{yy}\frac{\partial V}{\partial y}\right) d\sigma - \int_\sigma VY\, d\sigma = 0 \ . \end{cases}$$

Faisons successivement, dans ces deux équations, U et V égaux à x, y, x^2, y^2, xy ; leurs derniers termes pourront être effacés vis-à-vis des premiers, car les forces X, Y qui peuvent être du même ordre de grandeur que les dérivées en x, y, de t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}, ont des produits, par les petites coordonnées x, y, très petits vis-à-vis de ces tensions elles-mêmes. Nous obtiendrons ainsi toutes ces relations, où figurent les trois composantes t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} dont il s'agit de prouver la nullité :

$$(t)\quad \begin{cases} \int t_{xx}\, d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{xx}\, x d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{xy}\, d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{xy}\, y d\sigma = 0, \\ \qquad \int t_{xy}\, x d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{yy}\, d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{yy}\, y d\sigma = 0, \\ \text{et} \quad \int (t_{xx} y + t_{xy} x)\, d\sigma = 0 \ , \quad \int (t_{xy} y + t_{yy} x)\, d\sigma = 0, \\ \text{d'où} \quad \int t_{xx}\, y d\sigma = 0 \ , \quad \int t_{yy}\, x d\sigma = 0. \end{cases}$$

Enfin, en faisant $U = u$, $V = v$, petits déplacements des points de la section, on peut encore effacer comme très petits les derniers termes des deux équations (s) ; et si on les ajoute ensemble, en remplaçant $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$

par ∂_x, ∂_y, g_{yx}, on a

$$(u) \qquad \int_\sigma (t_{xx}\partial_x + t_{yy}\partial_y + t_{xy}g_{xy})\,d\sigma = 0 \ .$$

15. Actuellement, dans l'équation (j) du n° 10, que nous avons déduite du partage du potentiel d'élasticité Φ en carrés, mettons pour ∂_z sa valeur (o), $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{B}_1 y$, et intégrons, pour toute l'étendue de la section σ, ses deux membres multipliés par $d\sigma$. Il résulte de l'égalité (u) ainsi que des 1re, 2e, 4e, 6e et des deux dernières (t) que le premier membre donnera zéro, ainsi que nous l'avons annoncé. Il restera

$$(v) \qquad \int_\sigma \left[\frac{1}{A}\left(t_{xx} - \frac{A}{C}t_{yy}\right)^2 + \frac{1}{B}t_{yy}^2 + \frac{1}{f}t_{xy}^2\right] d\sigma = 0 \ .$$

Comme les $d\sigma$ sont positifs, le $\int$ constituant le premier membre de cette équation a tous ses éléments composés de trois termes essentiellement positifs; nous avons vu, en effet, que $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{f}$, ne pouvaient être que positifs. Ces termes sont donc nécessairement tous nuls; d'où il suit qu'on doit avoir partout, ou en tous les points (x, y) de chaque section,

$$(x) \qquad t_{xx} = 0 \ , \qquad t_{yy} = 0 \ , \qquad t_{xy} = 0 \ .$$

C'est-à-dire les trois composantes de tension, par lesquelles les fibres agissent transversalement les unes sur les autres, nulles, ou assez petites pour qu'on puisse les remplacer par zéro, dans les calculs qui ont pour objet la détermination des trois autres composantes de tension ainsi que celle des déplacements u, v, w, des points.

16. C'est la *donnée* du *Problème* posé au § 22. C'est l'hypothèse fondamentale, déjà justifiée par l'expérience comme exacte ou très approximative (nos 1,2), dont on est parti pour obtenir, des §§ 23 à 57 (ci-après, la solution de tous les problèmes de la déformation des tiges prismatiques dont les faces latérales sont libres, par des forces appliquées sur les bases extrêmes et ayant, de part et d'autre, une résultante et un moment résultant donnés quelconques, mais une distribution inconnue (toujours inconnue), dont la même analyse détermine quel doit être le mode pour satisfaire *rigoureusement* à l'hypothèse posée. On voit, par ce que nous venons de présenter, que les trois égalités reproduites en (x) et, comme conséquence, ce mode d'application et de distribution des tensions t_{zz}, t_{xz}, t_{yz}, s'opérera naturellement, d'une manière extrêmement approchée, si les portions de tiges, qui occupent les intervalles des endroits où les forces agissent comme isolément, ont des dimensions transversales très petites par rapport à leurs longueurs, avec des sections ne variant que continûment et lentement, et si dans ces mêmes intervalles elles ne sont sollicitées que par des forces, aussi continues, dont la somme totale n'excède pas les forces isolées ou disconti-

nues s'exerçant aux extrémités de chaque portion; forces dont, au reste, le mode de distribution pourra être à peu près quelconque si l'on excepte, de la conclusion énoncée, de très petites longueurs de la tige auprès de leurs points d'application.

17. — Cette manière de justifier l'emploi assuré, dans la pratique, comme suffisante approximation, des formules analytiques d'extensions, flexions et torsions, seules ou combinées ensemble, et qui est fondée sur ce qui peut être tiré, non seulement des équations d'équilibre, mais, en même temps du principe du potentiel, ou du travail toujours positif des déformations élastiques à partir de l'état où il n'y a aucune tension, me paraît être la meilleure et la plus complète qui en ait été théoriquement donnée.

Il est facile de voir qu'elle n'est pas, au fond, aussi compliquée à beaucoup près qu'on pourrait le croire, d'après le développement que nous avons cru devoir donner à son exposition.

Et puis, il faut remarquer qu'elle comprend la démonstration, essentielle pour tout ce qui suit, de (o) $\partial_z = \mathcal{A} + \mathcal{B}x + \mathcal{B}_1 y$, c'est-à-dire de la linéarité en x, y, des dilatations longitudinales à travers chaque section. Cette formule (o) est une suite cinématique du point de départ, ou de cette supposition (k), (l), $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{xy}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial z}(g_{zx}, g_{xy}) = 0$, aussi cinématique, qui résulte, comme approximation, de la structure même de ce corps allongé qu'on appelle une tige.

Elle conduirait, on peut le voir, cinématiquement aussi, à l'expression (63 a) de $\frac{\partial w}{\partial z}$ en x, y, z et six constantes a, a_1, a_2, b_1, b_2, b (dont la dernière s'annule), et, par conséquent, à l'expression (64 c) du déplacement w, en sorte que nous aurions pu poser cette expression (o) de ∂_z déjà au § 22.

Mais dès qu'il s'agit de déduire, de $\frac{\partial w}{\partial z}$, les deux autres dilatations $\partial_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, ou de prouver qu'elles égalent $\partial_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ multipliée par la fraction η, et, par suite, de montrer que la composante longitudinale de tension t_{zz} est égale à $\frac{\partial w}{\partial z}$ multipliée par une constante E comme si chaque *fibre* était isolée, ou libre de toute action transversale sur ses faces, cela exige qu'on sorte de la cinématique, et qu'on démontre d'abord la nullité au moins approchée de t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} partout comme sur les faces latérales. Il a fallu, pour y arriver, mettre en jeu les équations d'équilibre extérieur (q) et les combiner avec celles (r) de l'équilibre intérieur par une intégration dans toute l'étendue d'une section σ amenée par une transformation à une intégration pour son contour s; et il a fallu aussi mettre en jeu le principe du potentiel d'élasticité toujours positif, partageable en carrés; en sorte qu'on ne voit pas comment une démonstration du résultat (x) pourrait être réduite à des termes sensiblement moindres.

§ 29. — Détermination des constantes du problème général du § 22, d'une manière plus propre aux applications.

On voit, d'après ce qui précède, que la valeur des constantes b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, pour un système donné de forces, dépend de la fonction Ω (§ 25, 64*c*), dont la forme ne peut pas être déterminée d'une manière générale, bien qu'on puisse la trouver pour un grand nombre de formes particulières de sections transversales.

Mais, ce qui est très remarquable, et de la plus haute importance pour cette théorie, c'est que, sans connaître la fonction Ω, on peut déterminer d'avance, et d'une manière tout à fait générale, la valeur des deux intégrales

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma , \qquad \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} d\sigma ,$$

en s'appuyant seulement sur les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction Ω. Cela s'opère au moyen d'un procédé d'intégration partielle analogue à celui dont il a été fait usage aux §§ 16, 20 ou 24 pour d'autres circonstances,

Exprimons l'élément de surface $d\sigma$ par le petit rectangle $dxdy$; nous aurons $\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma = \iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} dxdy$. Intégrons partiellement, à savoir dans l'étendue superficielle d'une bande infiniment étroite, ayant ses deux bords parallèles aux x, avec une largeur dy, et en prenant, pour le facteur à intégrer, dx et non pas $\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx$ semblablement à ce que nous avons fait aux §§ cités. En désignant les points extrêmes de la bande par les indices 0 et 1 placés au bas des quantités relatives à ces deux points, nous avons :

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma = \iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} dxdy = \int \left\{ \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_1 - \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 \right\} dy - \iint x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} dxdy.$$

Maintenant, comme Ω satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 ,$$

nous pouvons remplacer le dernier terme

$$- \iint x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} dxdy \quad \text{par} \quad \iint x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} dxdy = \int xdx \int \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} dy .$$

Effectuons l'intégrale prise par rapport à y sur toute la longueur de la droite parallèle aux y, ayant x pour abscisse, qui traverse la section, et désignons par les indices 0 et 1, placés comme des exposants, les quantités relatives aux extrémités de cette droite. Nous aurons :

$$\int x dx \int \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} dy = \int \left\{ \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^1 - \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^0 \right\} dx$$

Mettant cette expression à la place du dernier terme de $\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma$, terme dont nous voyons qu'elle donne la valeur, nous avons :

$$\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx dy = \int \left\{ \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_1 - \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_0 \right\} dy - \int \left\{ \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^1 - \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^0 \right\} dx.$$

La première intégrale du second membre doit s'étendre à toutes les bandes superficielles que l'on peut découper dans la section, parallèlement à l'axe des x, ou, ce qui revient au même, sur tous les éléments d'arc, qui sont découpés deux à deux par ces bandes sur la périphérie de la même section. Si, ds étant un de ces éléments d'arc, p est l'angle que fait avec l'axe des x la normale à cet élément, dirigée vers l'extérieur; enfin, si p_0 désigne cet angle pour le point x_0 et de même p_1 pour le point x_1, on a évidemment :

$$dy = ds_1 \cos p_1 = - ds_0 \cos p_0 \;;$$

par conséquent, la première intégrale est égale à

$$\int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p \right)_1 ds_1 + \int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p \right)_0 ds_0 \;;$$

c'est-à-dire, si l'on considère successivement tous les éléments ds de la périphérie, que cette première intégrale est égale à

$$\int x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p ds.$$

De même, la deuxième intégrale devient égale à

$$\int x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \sin p \, ds,$$

et, par conséquent, on a :

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma = \iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx dy = \int x \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin p \right) ds.$$

La valeur de l'expression comprise dans la parenthèse est connue pour tous les points de la périphérie de la section, car, d'après l'équation (67) de la fin du § 23, p. 151, à laquelle la fonction Ω doit satisfaire, on a, pour tous ces points :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos p+\frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin p=\mathrm{X}\cos p+\mathrm{Y}\sin p;$$

où l'on a posé pour abréger [eu égard à ce que (70 a), $b=0$] :

$$(84)\quad \begin{cases} \mathrm{X}=-b_0 y+\dfrac{b_1}{2}\left[\eta x^2+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-3\eta\right)y^2\right]+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-\eta\right)b_2 xy, \\ \mathrm{Y}=b_0 x+\dfrac{b_2}{2}\left[\eta y^2+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-3\eta\right)x^2\right]+\left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}-\eta\right)b_1 xy. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dxdy=\int x(\mathrm{X}\cos p+\mathrm{Y}\sin p)\,ds$$

est une expression *qui ne contient aucune trace de la fonction Ω, et qui est indépendante de la forme de cette fonction inconnue ou exceptionnellement connue.*

Revenons maintenant sur nos pas, et reprenons les diverses équations par lesquelles nous sommes arrivés à la valeur de cette expression; nous pouvons tout d'abord, vu qu'on a, à la périphérie, $ds\cos p=dy$, $ds\sin p=dx$, l'écrire ainsi :

$$\int \left\{(x\mathrm{X})_1-(x\mathrm{X})_0\right\}dy+\int \left\{(x\mathrm{Y})^1-(x\mathrm{Y})^0\right\}dx.$$

Ensuite, si on considère la différence de deux termes, qui se trouve dans chaque accolade, comme le résultat d'une intégration opérée dans l'étendue de deux bandes superficielles, de largeur dy et de largeur dx, comme celles dont il a été question ci-dessus, cette même expression peut être mise encore sous la forme :

$$\iint \frac{\partial .x\mathrm{X}}{\partial x}\,dxdy+\iint \frac{\partial .x\mathrm{Y}}{\partial y}\,dxdy,$$

de sorte que l'on peut écrire :

$$\iint \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dxdy=\iint \left(\frac{\partial .x\mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial .x\mathrm{Y}}{\partial y}\right)dxdy.$$

On arriverait évidemment à une formule tout à fait analogue si l'on changeait partout x en y et réciproquement. Si donc on remplace enfin $dxdy$ par $d\sigma$, on aura les deux expressions suivantes :

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma = \int \left(\frac{\partial . xX}{\partial x} + \frac{\partial . xY}{\partial y} \right) d\sigma ,$$

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} d\sigma = \int \left(\frac{\partial . yX}{\partial x} + \frac{\partial . yY}{\partial y} \right) d\sigma .$$

En introduisant, dans ces expressions, les valeurs (84) de X et de Y, on ne trouve, dans les seconds membres, que les cinq intégrales suivantes auxquelles nous attribuons, vu le choix des axes, les valeurs trouvées ci-dessus (80), (81), (82), savoir :

$$\int x d\sigma = 0, \quad \int y d\sigma = 0, \quad \int xy d\sigma = 0, \quad \int x^2 d\sigma = \lambda^2\sigma, \quad \int y^2 d\sigma = \varkappa^2\sigma.$$

On a donc enfin :

$$(85) \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\sigma &= \frac{b_1\sigma}{2} \left\{ \left(2\frac{E}{G} + \eta \right) \lambda^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta \right) \varkappa^2 \right\} ; \\ \int \frac{\partial \Omega}{\partial y} d\sigma &= \frac{b_2\sigma}{2} \left\{ \left(2\frac{E}{G} + \eta \right) \varkappa^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta \right) \lambda^2 \right\} . \end{aligned} \right.$$

Ces expressions, remarquables en elles-mêmes, donnent aux cinq premières équations (83), p. 174, la forme des cinq premières suivantes, extrêmement simples, parce que G, η, l s'en trouvent complètement éliminées. Nous y ajouterons la sixième (83) simplement reproduite, parce qu'elle n'est pas susceptible de pareilles simplifications,

$$(86) \left\{ \begin{aligned} & a = \frac{C}{E\sigma}, \quad b_1 = -\frac{A}{E\lambda^2\sigma}, \quad a_1 = -\frac{B'}{E\lambda^2\sigma}, \\ & b_2 = \frac{B}{E\varkappa^2\sigma}, \quad a_2 = \frac{A'}{E\varkappa^2\sigma}, \\ & -b_0(\varkappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{\sigma}\int \left(x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) d\sigma \\ & \quad + \frac{b_1}{2\sigma}\int \left[\left(\frac{E}{G} - 3\eta \right) y^3 - \left(2\frac{E}{G} - 3\eta \right) x^2 y \right] d\sigma \\ & \quad - \frac{b_2}{2\sigma}\int \left[\left(\frac{E}{G} - 3\eta \right) x^3 - \left(2\frac{E}{G} - 3\eta \right) x y^2 \right] d\sigma = \frac{C'}{G\sigma}; \end{aligned} \right.$$

dans la dernière desquelles on peut mettre pour b_1, b_2 leurs valeurs en A, B.

Ce qui caractérise ces formules, c'est que a dépend seulement de la composante totale C, dans le sens z, des forces extérieures; que b_1 dépend de celle A; a_1, du moment B'; b_2, de la composante B; enfin, a_2,

du moment A′ [§ 28, notations (78*a*) et (78*b*)]. La dernière équation seule contient toutes les grandeurs à l'exception de C, B′ et A′. On peut interpréter ce résultat par le théorème suivant :

La composante des forces extérieures dirigée suivant l'axe longitudinal ne produit que l'extension. La composante dirigée parallèlement à la surface d'extrémité et suivant un axe principal, jointe au moment de rotation par rapport à l'autre axe principal, produit une flexion dont le plan passe par le premier axe principal ; cette flexion est généralement accompagnée d'une torsion. Enfin (*) *le moment de rotation des forces extérieures par rapport à l'axe longitudinal ne produit que la torsion* (**).

(**) **NOTE FINALE DU § 29.**

1. — On peut démontrer simplement et directement les cinq premières (86), ou, ce qui revient au même, l'expression (*a*) suivante qui résulte de leur substitution dans (63 *a*) p. 147 avec (70 *a*) p. 156, § 23 : $\frac{\partial w}{\partial z} = a + a_1 x + a_2 y + z(b_1 x + b_2 y)$, et où t'_{zz} représente la tension longitudinale à travers l'unité superficielle d'un élément d'une section quelconque, ayant l'abscisse longitudinale $z = z'$:

$$(a) \qquad t'_{zz} = E\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{C}{\sigma} - \frac{B' - Az'}{\int x^2 d\sigma}x - \frac{A' + Bz'}{\int y^2 d\sigma}y\,.$$

On a, en effet, comme il a été trouvé, pour $\frac{\partial w}{\partial z}$ et par conséquent pour t'_{zz}, une expression linéaire en x et y, ou de la forme

$$(b) \qquad t'_{zz} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{B}_1 y\,.$$

(voir, Note de la fin du § 28, expression (*o*), p. 186).

Multipliant successivement par $d\sigma$, $x d\sigma$, $y d\sigma$, et intégrant pour toute l'étendue de la section, on obtient trois équations d'où l'on tire $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, ce qui donne en substituant dans (*b*) :

$$(c) \qquad t'_{zz} = \frac{\int t'_{zz} d\sigma}{\sigma} + x\frac{\int t'_{zz} x d\sigma}{\int x^2 d\sigma} + y\frac{\int t'_{zz} y d\sigma}{\int y^2 d\sigma}\,.$$

(*) En effet, les deux dernières intégrales du premier membre de la sixième équation (86), dans le premier terme de laquelle est engagée *la torsion* b_0, sont affectées de b_1 et de b_2, et par conséquent des deux *efforts tranchants* A et B, qui contribuent aussi, avec les moments A′, B′, aux flexions. Mais, lorsque les sections sont symétriques par rapport à leurs deux axes principaux d'inertie, ce qui a lieu le plus souvent, et ce qui rend nulles les quatre intégrales $\int_\sigma (x^3, y^3, xy^2, x^2y)\,d\sigma$ (voyez § 30), et aussi lorsque A et B sont nuls, en sorte que la flexion n'est due qu'aux *couples* A′ et B′, le premier membre de cette sixième équation (86) se réduit à ses deux premiers termes à parenthèses binômes, et la torsion b_0 ne dépend que du seul moment C′ des forces autour de l'axe longitudinal des z. [Voyez § suivant, 30, après l'équation (87).]

Or, considérons l'équilibre de la portion de tige comprise entre la section $z=z'$ et la section ou base libre $z=l$.

Son équilibre de translation dans le sens z exige que la résultante des forces élastiques longitudinales $\int t'_{zz}d\sigma$ qui agissent sur elle à travers la section $z=z'$, soit égale à la résultante des forces extérieures de même sens agissant sur la base libre : on a donc déjà

$$(d) \qquad \int t'_{zz}d\sigma = C .$$

Son équilibre de rotation autour d'une parallèle aux y, tracée sur la même section $z=z'$, par le centre de gravité de celle-ci, exige que le moment $\int t'_{zz}xd\sigma$ des forces élastiques intérieures, autour de cette parallèle, et tendant à faire tourner de z en x, soit égal, au signe près, au moment de même axe et de même sens des forces extérieures agissant sur la base libre : or ce dernier moment est égal à celui des mêmes forces extérieures, autour de l'axe des y tracé sur la base fixe $z=0$, moment qui a été appelé B′, moins le produit de z', différence de leurs bras de levier, par la somme, appelée A, des forces agissant dans le sens des x sur la base libre. Donc

$$(e) \qquad \int t'_{zz}xd\sigma = -(B'-Az') ;$$

On démontrerait de même, par l'équilibre de rotation autour d'une parallèle aux x tracée sur la section $z=z'$ en ayant égard au sens de la rotation qui a été supposée (§ 28) de y en z pour le moment A′, qu'on a

$$(f) \qquad \int t'_{zz}yd\sigma = A' + Bz' .$$

L'expression (a) coïncide donc avec celle (c), et se trouve démontrée, comme on voit, d'une manière directe, ainsi que les cinq premières expressions ou équations (86), sans faire intervenir la fonction Ω ni les coefficients G, $\mathfrak{y}$, et sans passer par les transformations d'intégrales au moyen desquelles l'auteur les élimine.

2. Il est bon de montrer qu'on arrive au même résultat, et aussi à un autre, fort utile et plus général, en posant l'équilibre de rotation d'un simple tronçon de tige, de longueur dz, compris entre deux sections σ et σ' ayant les abscisses z et $z+dz$.

En effet les forces élastiques ou intérieures longitudinales $t_{zz}d\sigma$ et $-\left(t_{zz}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}dz\right)d\sigma$, s'exerçant sur ces deux sections égales, se composent en forces $-\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}dzd\sigma$, qui, si l'on prend les moments autour d'une parallèle quelconque aux x, tracée sur la section σ, agissent, pour faire

tourner de y en z, avec des bras de levier y. Les forces transversales t_{zx}, qui sont parallèles à l'axe de rotation, ne donnent aucun moment; celles $-t_{zy}$ agissant sur la section σ n'en donnent pas non plus, puisque leurs bras de levier sont nuls. Restent celles $\left(t_{zy}+\frac{\partial t_{zy}}{\partial z}dz\right)d\sigma$ agissant sur les éléments $d\sigma$ de la section $\sigma'=\sigma$ avec des bras de levier dz, et dont les moments doivent être pris négativement, vu qu'elles tendent à faire tourner de z en y. L'équation d'équilibre, en négligeant ce qui est affecté de dz^2, est donc, si l'on divise tout par dz :

$$(g)\qquad \int \frac{\partial t_{zz}}{\partial z}yd\sigma - \int t_{zy}d\sigma = 0 .$$

Mettant B à la place du second terme, et, dans le premier, à la place de t_{zz}, $E\frac{\partial w}{\partial z}=E[a+a_1x+a^2y+z(b_1x+b_2y)]$, on a bien, si les x et y sont parallèles aux axes principaux de la section,

$$(h)\qquad B = Eb_2\int y^2d\sigma = Eb_2\varkappa^2\sigma .$$

ou la cinquiéme des équations (86), dont la troisième s'obtiendrait de même en posant l'équilibre de rotation autour d'une parallèle aux y, menée sur la section par son centre.

Le résultat (g), et son analogue démontrable de même, peuvent être écrits

$$(i)\qquad \int t_{zx}d\sigma = \frac{\partial}{\partial z}\int t_{zz}xd\sigma \;;\qquad \int t_{zy}d\sigma = \frac{\partial}{\partial z}\int t_{zz}yd\sigma ,$$

et donnent ce théorème connu et très utile, que l'*effort tranchant*, pour une section quelconque, ou la force tangentielle totale dans une direction transversale *aussi quelconque*, est égale à la dérivée, par rapport à la coordonnée longitudinale, du *moment de flexion* autour d'une droite tracée sur la section perpendiculairement à cette direction.

On pourait le déduire de (e), (f), car en différentiant ces égalités par rapport à z', et effaçant les accents devenus inutiles, on obtient :

$$A = \frac{\partial}{\partial z}\int t_{zz}xd\sigma \;;\qquad B = \frac{\partial}{\partial z}\int t_{zz}yd\sigma .$$

Mais notre démonstration par le petit tronçon donne le théorème d'une manière plus générale, car elle montre qu'il est vrai sans que les axes de flexion aient besoin d'être des axes d'inertie, ni même de passer par les centres de gravité des sections.

Nous verrons à une Note, celle du § 73, relative à l'équilibre d'une plaque élastique, que son équation s'établit de même en posant les conditions de l'equilibre d'un de ses tronçons compris entre quatre petits plans perpendiculaires aux coordonnées transversales x, y.

§ 30. — Sections transversales symétriques.

Ces considérations se simplifient encore si l'on donne à la section transversale une forme symétrique par rapport à deux droites perpendiculaires l'une à l'autre. Dans ce cas, ces droites deviennent les axes principaux de la section, et leur point d'intersection en est le centre de gravité. Cela se démontre facilement à l'aide du théorème suivant :

Si F *est une fonction de x et de y qui ait la propriété de changer de signe sans changer de grandeur lorsque l'on change x en $-x$, ou y en $-y$, l'intégrale $\int F d\sigma$, étendue à une surface symétrique par rapport aux axes coordonnés, est toujours égale à zéro.*

On en voit immédiatement la raison. A chaque élément $d\sigma$ pour lequel la fonction F acquiert une certaine valeur, correspond un autre élément, placé d'une manière symétrique, pour lequel F a la même valeur au signe près; pour ces deux éléments, le produit $Fd\sigma$ a donc des valeurs égales et de signe contraire, en sorte que, dans l'intégration, les termes correspondants à ces éléments s'annulent deux à deux. Mais, lorsque la forme est symétrique, la surface peut être complètement décomposée en groupes d'éléments ainsi placés, et l'intégrale entière s'évanouit, puisque tous ses termes se détruisent deux à deux. On a, par conséquent :

$$\int x d\sigma = 0, \quad \int y d\sigma = 0, \quad \int xy d\sigma = 0 ;$$

ce qui montre que l'origine est le centre de gravité, et que les axes coordonnés sont les axes principaux de la section. On a aussi :

$$\int y^3 d\sigma = 0 , \quad \int xy^2 d\sigma = 0 , \quad \int x^2 y d\sigma = 0 , \quad \int x^3 d\sigma = 0 ,$$

ce qui simplifie notablement la dernière équation (86).

Mais ce n'est pas tout. Désignons, pour abréger, sous le nom de fonction *paire*, par rapport à une variable qu'elle contient, une fonction qui ne change pas de valeur lorsque la variable change de signe sans changer de grandeur; et, sous le nom de fonction *impaire*, une fonction qui, lorsque la variable change de signe, change aussi de signe en conservant la même valeur absolue. Ainsi, pour une section transversale symétrique, le cosinus de l'angle p, formé avec l'axe des x par la normale au contour, dirigée vers l'extérieur, ou $\cos p$, est une fonction impaire par rapport à x, et paire par rapport à y. Au con-

traire, $\sin p$ est impair en y et pair en x; car si l'on passe d'un point (x, y) de la périphérie au point qui a pour coordonnées x et $-y$, p se change en $-p$, par conséquent $\cos p$ en $\cos p$ et $\sin p$ en $-\sin p$. Si, au contraire, on passe au point qui a pour coordonnées $-x$ et y, p se change en $(180° - p)$; par conséquent, $\cos p$ en $-\cos p$, et $\sin p$ en $\sin p$. On reconnaît alors facilement que les seconds membres des trois dernières équations (70), page 154, sont respectivement :

impair en x et y,
impair en x et pair en y,
pair en x et impair en y.

La même chose doit donc avoir lieu pour les premiers membres des mêmes équations (70), § 24. Si, de plus, on observe que lorsqu'une fonction est paire par rapport à une variable, son quotient différentiel, par rapport à cette même variable, est impair et *vice versa*, on voit que les premiers membres des équations (70) dont il s'agit satisferont aux conditions de parité et d'imparité qu'on vient de dire si l'on admet :

B_0, impair en x et y,
B_1, impair en x, pair en y,
B_2, pair en x, impair en y.

Cela est entièrement compatible avec les équations $0 = \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}, \cdots$ ou (69) de la page 154, § 24.

Si on met dans la dernière équation (86), § 29, page 194, la valeur de Ω [(68a) de la page 153, avec b nul, comme on a vu, équation (70a)],

$$\Omega = b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2\ ,$$

on reconnaît que l'intégrale suivante, entrant dans cette dernière équation (86),

$$\int \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) d\sigma,$$

se trouve divisée en trois parties multipliées respectivement par b_0, b_1, b_2. Et, en vertu de ce qu'on vient d'énoncer, celles de ces trois parties qui sont multipliées par b_1 et par b_2 disparaissent lorsque la section est symétrique, en sorte qu'il ne reste que l'intégrale multipliée par b_0,

$$\int \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) d\sigma,$$

pour laquelle la fonction à intégrer devient paire aussi bien en x qu'en y. La dernière équation (86) du § 29 se réduit donc à la suivante, où C′ est, comme on sait par les définitions (78a) du § 28, le moment total des forces extérieures autour de l'axe des z :

$$(87) \qquad b_0 = \frac{-C'}{G\left\{(\varkappa^2+\lambda^2)\sigma - \int\left(x\frac{\partial B_0}{\partial y} - y\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)d\sigma\right\}}$$

Ainsi b_0 ne dépend, *dans ce cas de symétrie* des sections, que du moment de rotation C′ des forces autour de l'axe longitudinal passant par leurs centres; de même, ainsi qu'il résulte des autres équations (86), sans que cette symétrie ait besoin d'exister, a_2 et a_1 ne dépendent que des deux autres moments A′, B′, et b_1, b_2, a, des composantes A, B, C des forces extérieures. On voit ainsi que : l'*extension*, *les flexions dans les deux sens principaux*, *et la torsion*, *constituent quatre problèmes complètement distincts ; car la torsion qui accompagnait la flexion dans les cas* de non-symétrie *des sections, n'existe plus.*

Revenant aux flexions, et supposant les sections symétriques, nous pouvons maintenant, au moyen des équations (75a), page 160, représenter l'action de la force A s'exerçant dans le sens transversal x, et du moment B′ agissant autour d'une parallèle aux y, force et moment qui, ensemble, produisent une flexion simple, lorsque dans ces équations (75a) on remplace, par leurs valeurs (86), les constantes a_1, b_1.

Puisque B_1 est pair en y, $\frac{\partial B_1}{\partial y}$ est impair, et par conséquent $\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0$ s'évanouit comme toute fonction impaire dont la variable s'annule. Il reste alors :

$$(88) \quad \left\{\begin{aligned}
&E\sigma\lambda^2.u = B'\frac{\eta(x^2-y^2)+z^2}{2} - A\left\{\frac{z^3}{6}+\eta z\frac{x^2-y^2}{2} - z\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right\},\\
&E\sigma\lambda^2.v = \eta xy\,(B'-Az),\\
&E\sigma\lambda^2.w = -B'xz + A\left\{\frac{z^2}{2}x + B_1 - \left(\frac{E}{2G}-\eta\right)xy^2 - x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right\};\\
&\sigma\lambda^2.t_{xz} = \frac{G}{E}A\left[\frac{\partial B_1}{\partial x} - \eta\frac{x^2}{2} - \left(\frac{E}{G}-3\eta\right)\frac{y^2}{2}\right],\\
&\sigma\lambda^2.t_{yz} = \frac{G}{E}A\left[\frac{\partial B_1}{\partial y} - \left(\frac{E}{G}-\eta\right)xy\right],\\
&\sigma\lambda^2.t_{zz} = (Az - B')x.
\end{aligned}\right.$$

Dans le cas que l'on considère le plus ordinairement, la flexion

simple est produite par une force A supposée agir au centre de gravité de la section libre. On a donc encore dans ce cas

$$B' = Al;$$

les trois premières équations et la dernière du système précédent deviennent alors :

$$(89)\quad \begin{cases} u = \dfrac{A}{E\sigma\lambda^2}\left\{ \eta \dfrac{x^2 - y^2}{2}(l - z) + \dfrac{z^2 l}{2} - \dfrac{z^3}{6} + z\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 \right\}, \\ v = \dfrac{A}{E\sigma\lambda^2}\eta xy\,(l - z), \\ w = \dfrac{A}{E\sigma\lambda^2}\left\{ -lxz + \dfrac{z^2}{2}x + B_1 - \left(\dfrac{E}{2G} - \eta\right)xy^2 - x\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 \right\}; \\ t_{zz} = -\dfrac{Ax(l - z)}{\sigma\lambda^2}. \end{cases}$$

Il est remarquable que la section transversale particulière dont il a été question au § 24, et dont les éléments superficiels n'éprouvent aucune tension dans le sens longitudinal z de la pièce, c'est-à-dire la section pour laquelle $t_{zz} = 0$, coïncide ici avec la section d'extrémité libre $(z = l)$ (*). Dans ce cas, la tige est divisée par le plan longitudinal yz en deux parties dont l'une n'éprouve, dans la direction longitudinale z, que des extensions, et l'autre, que des contractions. Pour la section ou base libre, sur laquelle $z = l$, on lui reconnaît cette propriété que u et v y sont indépendants de x et de y (**), c'est-à-dire que les points de cette section sont déplacés en avant ou en arrière du plan qu'elle occupait primitivement, mais ne sont pas déplacés dans la surface elle-même.

La flèche de la flexion (u pour $z = l$)

$$u_1 = \frac{A}{E\sigma\lambda^2}\left\{ \frac{l^3}{3} + l\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 \right\}$$

dépend de la forme de la section transversale, mais seulement à un très faible degré. Car le second terme entre accolades dépend sans doute, comme B_1 lui-même, de la forme de cette section; mais précisément à cause de cette dépendance, il n'entre dans son facteur $\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0$

(*) L'auteur parle ici de la section traversée par l'axe de la pièce à l'endroit où cet axe a un point d'inflexion, dont nous avons parlé à une note, p. 163, vers la fin du § 26.

(**) Même, v est nul sur cette section $z = l$.

que des termes de l'ordre de grandeur des dimensions transversales. Or, ils se trouvent multipliés par la première puissance l de la longueur; si donc, comme cela a lieu généralement, les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur de la tige, le second terme entre accolades est très petit par rapport au premier qui contient la troisième puissance de la longueur. Aussi, c'est ce premier terme, $\frac{l^3}{3}$, qu'on obtient seul dans la théorie ordinaire.

Les formules relatives à la torsion se simplifient aussi un peu. Car, comme B_0, qui entre dans les formules (75b) du commencement du § 27, est impair aussi bien en x qu'en y, les quotients différentiels de cette fonction sont aussi impairs pour l'une *ou* l'autre de ces deux variables. Par conséquent $\left(\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\right)_0$ qui représentent, suivant notre notation, les valeurs de $\frac{\partial B_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial B_0}{\partial y}$ pour $x=0$, $y=0$, sont nuls; et on peut déduire de ces équations (75b) les suivantes, dans lesquelles b_0 doit avoir la valeur donnée par la formule (87) :

$$(90)\quad \begin{cases} u = b_0 z y, & t_{xz} = G b_0\left(y + \frac{\partial B_0}{\partial x}\right) \\ v = -b_0 z x, & t_{yz} = -G b_0\left(x - \frac{\partial B_0}{\partial y}\right) \\ w = b_0 B_0, & t_{zz} = 0. \end{cases}$$

Ces résultats ne modifient en rien les considérations précédentes. Seulement, la fibre non déplacée par la torsion coïncide alors avec la ligne des centres de gravité des sections.

§ 31. — Détermination de la fonction Ω du § 23 pour une section transversale elliptique.

Dans tout ce qui précède, il reste toujours à déterminer certaines fonctions, et cette détermination doit être faite en particulier pour chaque forme de section transversale. Je vais en donner un exemple pour une forme simple. Considérons le cas où la périphérie de la section transversale est formée par une ellipse, ce qui donne bien une section symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires l'un sur l'autre. On détermine facilement, dans ce cas, les fonctions B_0, B_1, B_2. Remarquons d'abord que l'équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

à laquelle ces trois fonctions doivent satisfaire, est vérifiée si l'on y remplace φ par la somme d'une fonction quelconque de $\left(x+y\sqrt{-1}\right)$ et d'une fonction quelconque de $\left(x-y\sqrt{-1}\right)$, c'est-à-dire si l'on y fait :

$$\varphi = f\left(x+y\sqrt{-1}\right) + \mathrm{F}\left(x-y\sqrt{-1}\right),$$

ce qui se démontre en effectuant les différentiations.

Par exemple, cette équation différentielle est satisfaite par une somme et une différence de puissances égales de $\left(x+y\sqrt{-1}\right)$ et de $\left(x-y\sqrt{-1}\right)$ multipliées par des constantes quelconques. Si l'on écrit cette somme et cette différence successivement pour chacune des puissances 0, 1, 2, 3..... et si, après avoir multiplié chaque fois par une constante quelconque, l'on additionne toutes les solutions ainsi trouvées, on aura l'expression suivante qui vérifie l'équation différentielle, ainsi qu'on peut s'en assurer directement :

$$(91)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = \alpha &+ \alpha_1 x + \beta_1 y \\ &+ \alpha_2 (x^2 - y^2) + \beta_2 xy \\ &+ \alpha_3 (x^3 - 3xy^2) + \beta_3 (y^3 - 3\,yx^2) \\ &+ \alpha_4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \beta_4 (4x^3y - 4xy^3) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Chacune des fonctions B_0, B_1, B_2 est contenue dans cette forme générale, ainsi qu'on le verra plus loin.

Supposons l'ellipse qui limite la section transversale représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1\ ,$$

de sorte que m et n soient ses demi-axes. En différentiant cette équation, on trouve, pour la tangente trigonométrique de l'angle formé avec l'axe des x par la tangente à la courbe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x}{m^2}}{\frac{y}{n^2}};$$

et, comme l'angle formé par la normale tirée extérieurement, que nous avons appelé p depuis le § 5, diffère de cet angle-là de 90° seule-

ment, on trouve pour l'angle p de la normale avec l'axe des x :

$$\operatorname{tang} p = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{y}{n^2}}{\frac{x}{m^2}},$$

ou

$$\sin p : \cos p = \frac{y}{n^2} : \frac{x}{m^2}.$$

Les conditions de limite (70), page 154, qui doivent être satisfaites en tous les points de la périphérie, deviennent par conséquent, en omettant la première ou celle en B qui, comme nous avons démontré au § 24 [équation (70a) $b = 0$], ne doit point subsister :

$$(91\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{m^2}\dfrac{\partial B_0}{\partial x} + \dfrac{y}{n^2}\dfrac{\partial B_0}{\partial y} = xy\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)\ (^*)\ ; \\[2ex] \dfrac{x}{m^2}\dfrac{\partial B_1}{\partial x} + \dfrac{y}{n^2}\dfrac{\partial B_1}{\partial y} = \left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} - \eta\right)\dfrac{xy^2}{n^2} + \dfrac{\eta x^3 + \left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} - 3\eta\right) y^2 x}{2m^2}\ ; \\[2ex] \dfrac{x}{m^2}\dfrac{\partial B_2}{\partial x} + \dfrac{y}{n^2}\dfrac{\partial B_2}{\partial y} = \left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} - \eta\right)\dfrac{yx^2}{m^2} + \dfrac{\eta y^3 + \left(\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} - 3\eta\right) x^2 y}{2n^2}\ . \end{cases}$$

(*) On se rappelle sans doute que la fonction Ω de x, y, à ajouter à des termes entiers des trois premiers degrés en x, y pour composer la valeur (65), § 23, du déplacement w des points dans le sens z, fonction astreinte à satisfaire à $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} = 0$ pour tous les points, et, pour ceux des faces latérales du prisme, ou de la périphérie des sections, à l'équation (67) de la fin du même § 23 (exprimant que $g_{zx}\cos p + g_{yz}\sin p$ y est nul), a été partagée par l'auteur au § suivant 24, expression (68 a), en quatre autres fonctions B, B_0, B_1, B_2, affectées respectivement, comme multiplicateurs, des quatre constantes arbitraires b, b_0, b_1, b_2, qui entraient dans cette équation *définie* (67); de telle sorte que la somme $bB + b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2$, mise pour Ω dans l'expression de w, lui donne toute la généralité que comporte la question des petites déformations de la tige sollicitée sur ses bases libres par des forces ayant une résultante et un moment résultant quelconques donnés en intensité et en direction.

On peut se souvenir aussi que l'auteur a reconnu : 1° même § 24 (70 a), que b ne peut être que nul, ce qui réduit le partage à ne plus être opéré qu'entre trois fonctions B_0, B_1, B_2 ; 2° au § 26, que la fonction B_1 doit entrer dans l'expression (65) de w quand le prisme est fléchi autour d'un des deux axes principaux d'inertie de la section dont les points éprouvent ce déplacement longitudinal ; et (fin du même § 26) la fonction B_2 quand il est fléchi ou en même temps, ou séparément, autour de l'autre axe principal (et dont des formules (86) du § 29 ont donné les multiplicateurs b_1, b_2) ; 3° enfin, au commencement du § 27, que la fonction B_0 y entre quand il y a une torsion, et que la constante b_0 représente l'angle de cette torsion par unité de longueur du prisme.

Ainsi Clebsch suppose, dans le § 31 actuel, que le cylindre à base elliptique d'axes $2\,m$,

On voit alors facilement que ces trois équations sont satisfaites si, conformément à l'expression (91), on pose :

$$(91\ b)\quad \begin{cases} B_0 = \beta_2 xy, \\ B_1 = \alpha_1 x + \alpha_3 (x^3 - 3xy^2), \\ B_2 = \beta_1 y + \beta_3 (y^3 - 3yx^2). \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation qui sert à déterminer B_0 deviendra :

$$\beta_2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

Quant aux équations servant à déterminer B_1 et B_2, on les modifie en multipliant les termes du premier degré par $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2}$, qui, pour la périphérie, est égal à l'unité. On a ainsi les équations suivantes, homogènes en x et y :

$$\frac{x}{m^2}\left[\alpha_1\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)+3\alpha_3\left(x^2-y^2\right)\right]-6\alpha_3\frac{xy^2}{n^2}=\frac{\eta x^3+\left(\frac{E}{G}-3\eta\right)y^2x}{2m^2}+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)\frac{xy^2}{n^2},$$

$$\frac{y}{n^2}\left[\beta_1\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)+3\beta_3\left(y^2-x^2\right)\right]-6\beta_3\frac{yx^2}{m^2}=\frac{\eta y^3+\left(\frac{E}{G}-2\eta\right)x^2y}{2n^2}+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)\frac{x^2y}{m^2}.$$

Et si, dans ces équations, on égale entre eux les coefficients d'égales puissances, on obtient les équations suivantes pour la détermination

---

$2n$, est à la fois *fléchi* autour de chacun de ces deux axes transversaux, et *tordu* autour de l'axe longitudinal ou des z.

Ses sections transversales primitivement planes éprouvent, par suite, *trois gauchissements* qui se superposent, et qui peuvent être regardés comme représentés par les trois équations (91 b) ou (91 c) ci-après en mettant, dans les premiers membres, le petit déplacement longitudinal w au lieu de B_0 ou B_1 ou B_2. Le premier de ces gauchissements est en paraboloïde hyperbolique, comme je l'ai reconnu en 1847 (Compte rendu 10 mai, p. 847); les deux autres sont en surfaces du troisième degré, ainsi que je l'ai trouvé aux nos 18 et 21 du *Mémoire sur la flexion* cité ci-dessus, lu le 10 juillet 1855.

Mais ces secondes parties du gauchissement, liées aux flexions et dues aux fonctions B_1, B_2 sont, comme le reconnaît l'auteur, le plus souvent négligeables, en sorte qu'il n'y a généralement à considérer que la première partie, liée à la torsion et due à la portion $b_0 B_0$ de w.

de α_1, α_3, β_1, β_3 :

$$\frac{\alpha_1}{m^2} + 3\alpha_3 = \frac{\eta}{2}$$

$$\frac{\beta_1}{n_2} + 3\beta_3 = \frac{\eta}{2}$$

$$\frac{\alpha_1}{m^2 n^2} - 3\alpha_3 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{2}{n^2}\right) = \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right)\frac{1}{2m^2} + \left(\frac{E}{G} - \eta\right)\frac{1}{n^2},$$

$$\frac{\beta_1}{m^2 n^2} - 3\beta_3 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{m^2}\right) = \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right)\frac{1}{2n^2} + \left(\frac{E}{G} - \eta\right)\frac{1}{m^2};$$

ce qui donne les valeurs

$$\alpha_1 = m^2 \frac{\frac{E}{G} m^2 + \left(\frac{E}{2G} - \eta\right) n^2}{3m^2 + n^2}; \quad \alpha_3 = -\frac{\left(2\frac{E}{G} - 3\eta\right) m^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) n^2}{6(3m^2 + n^2)}.$$

$$\beta_1 = n^2 \frac{\frac{E}{G} n^2 + \left(\frac{E}{2G} - \eta\right) m^2}{3n^2 + m^2}; \quad \beta_3 = -\frac{\left(2\frac{E}{G} - 3\eta\right) n^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) m^2}{6(3n^2 + m^2)}.$$

De sorte qu'enfin les fonctions B_0, B_1, B_2 se présentent sous les formes suivantes :

$$(91\,c)\quad \left\{\begin{aligned} B_0 &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy; \\ B_1 &= \frac{m^2\left[\frac{E}{G} m^2 + \left(\frac{E}{2G} - \eta\right) n^2\right] x - \left[\left(2\frac{E}{G} - 3\eta\right) m^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) n^2\right] \frac{x^3 - 3y^2 x}{6}}{3m^2 + n^2}; \\ B_2 &= \frac{n^2\left[\frac{E}{G} n^2 + \left(\frac{E}{2G} - \eta\right) m^2\right] y - \left[\left(2\frac{E}{G} - 3\eta\right) n^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) m^2\right] \frac{y^3 - 3x^2 y}{6}}{3n^2 + m^2}. \end{aligned}\right.$$

La seconde de ces expressions, différentiée, donne, en faisant ensuite $x = 0$, $y = 0$,

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 = \frac{m^2\left[\frac{E}{G} m^2 + \left(\frac{E}{G} - \eta\right) n^2\right]}{3m^2 + n^2};$$

formule qui peut servir à vérifier le fait énoncé ci-dessus, que cette quantité est en général très petite par rapport à l^2 et n'a qu'une influence insignifiante sur la flèche de la flexion.

La surface en laquelle se transforme, après la flexion, la section

transversale, a pour équation, z' étant la coordonnée z après les déplacements,

$$z' = z + w',$$

équation qui porte le n° 75 au § 25, où il a été dit que, dans $z' = z + w$, l'on peut, en ne commettant que des erreurs du second ordre de petitesse, remplacer w par w' qui est ce que devient l'expression [telle que (65) ou (89)] de ce déplacement, lorsqu'on y remplace les coordonnées primitives x, y, par les coordonnées ultérieures x', y'.

Cette expression devient, en mettant pour w' la valeur tirée de (89), pour le cas où la flexion est produite par des forces qui ont une résultante A agissant au centre de gravité de la surface d'extrémité libre :

$$z' = z + \frac{A}{E\sigma\lambda^2}\left\{ -lx'z + \frac{z^2}{2}x' - \left(\frac{E}{2G} - \eta\right)x'y'^2 - \frac{\left(2\frac{E}{G} - 3\eta\right)m^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right)n^2}{6\,(3m^2 + n^2)}(x'^3 - 3x'y'^2)\right\}.$$

Cette équation, où z est une constante, représente en x', y', z' une surface du troisième ordre (*) qui est symétrique par rapport au plan de flexion x', z', puisque y' n'entre qu'au carré, et qui est coupée suivant des paraboles par les plans parallèles à l'axe longitudinal et perpendiculaires à celui de flexion. En effet, pour $x' =$ constante, qui est l'équation de ces plans parallèles, l'équation précédente n'est plus qu'entre z' qui y figure à la première puissance, et y', qui y figure à la seconde.

On traitera plus loin du calcul des grandeurs $\varkappa$, λ des rayons de gyration. Il suffit de remarquer qu'ici l'on a

$$\lambda = \frac{m}{2}, \qquad \varkappa = \frac{n}{2} \qquad (^{**})$$

(*) C'est ce qui a été trouvé au *Mém. sur la flexion*, Journ. Liouville, 1856. Voir form. (55), (54), (61).

(**) Un moyen très simple d'obtenir les deux moments d'inertie, et, par suite, les rayons de gyration d'une ellipse autour de ses axes principaux $2m$, $2n$, est de déterminer d'abord le moment d'inertie du cercle de rayon m *autour de son centre*. C'est, $d.\pi r^2$ représentant la surface d'une couronne comprise entre deux cercles intérieurs de rayons r et $r + dr$,

$$\int_0^{m^2} r^2.\ \pi d.r^2 = \frac{\pi m^4}{2};$$

puis d'en déduire, vu que $r^2 = x^2 + y^2$, x et y étant les coordonnées du point éloigné de r du centre, qu'on aura, pour les moments d'inertie du même cercle *autour d'un diamètre*, la moitié de cette expression, ou $\frac{\pi m^4}{4}$; enfin, comme une ellipse ayant les axes $2m$, $2n$ n'est autre chose qu'un cercle dont tous les éléments ont diminué de superficie dans la proportion $\frac{n}{m}$, et se sont rapprochés du diamètre dans la même proportion, de conclure que la somme des moments des éléments autour de $2m$ se trouve diminuée dans la proportion

Le cas de la torsion donne lieu à des observations particulières. Puisque l'on a :

$$B_0 = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy \,,$$

on a aussi :

$$\int \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) d\sigma = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \int (x^2 - y^2) d\sigma \,;$$

ou, à cause des notations adoptées précédemment,

$$= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} (\lambda^2 - \varkappa^2)\, \sigma \;;$$

ou enfin, en remplaçant λ et $\varkappa$ par leurs valeurs,

$$= \frac{(m^2 - n^2)^2}{4(m^2 + n^2)} \sigma.$$

Par suite, l'équation (87) du § 30, où C' représente (78*b* du § 28) le moment total des forces extérieures autour de l'axe des z, donne

$$b_0 = -\frac{1}{G\sigma} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2} C' \;;$$

et les équations (90) de la fin du § 30, exprimant les déplacements et les tensions, deviennent alors

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{C'}{G\sigma} \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2} zy \,, & t_{xz} &= -\frac{2C'y}{n^2 \sigma} \,, \\ v &= \frac{C'}{G\sigma} \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2} zx \,, & t_{yz} &= \frac{2C'x}{m^2 \sigma} \,, \\ w &= \frac{C'}{G\sigma} \frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2} xy \,, & t_{zz} &= 0 \,. \end{aligned} \right.$$

L'angle, ou l'arc d'un rayon $= 1$, dont la surface d'extrémité libre a tourné par rapport à sa position primitive, devient (voir § 27)

$$\psi = b_0 l = -\frac{C'l}{G\sigma} \cdot \frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2} \;;$$

$\frac{n}{m} \cdot \frac{n^2}{m^2}$; d'où, pour le moment d'inertie de l'ellipse autour de ce diamètre

$$\frac{\pi m n^3}{4};$$

ce qui donne bien $\lambda = \frac{m}{2}$ pour le rayon de gyration, racine carrée du quotient de ce moment par l'aire $\pi m n$ de l'ellipse.

et, par conséquent, le moment dit *de torsion*, c'est-à-dire le moment appelé C′, des forces tendant à imprimer une rotation du cylindre autour de l'axe des z, a la valeur suivante s'il est capable de produire une torsion $\frac{\psi}{l}$ par unité de longueur,

$$C' = -G\frac{\psi}{l}\cdot\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}\sigma\,;$$

ou bien, en mettant pour σ sa valeur πmn :

$$C' = -G\frac{\psi}{l}\frac{\pi m^3n^3}{m^2+n^2}\,. \qquad (92\,a) \quad (*)$$

Il y a lieu de remarquer le dernier facteur $\frac{m^2n^2}{m^2+n^2}$. Il diffère de celui qui est usité dans la théorie ordinaire :

$$\frac{m^2+n^2}{2}\,.$$

La différence entre ces deux facteurs n'est pas considérable lorsque les deux axes de l'ellipse sont très peu différents, et elle disparaît pour le cercle. La longue adoption de celui-ci s'explique si l'on considère que la théorie ancienne a été établie pour le cercle seulement, et qu'on a cru ensuite pouvoir l'étendre à d'autres formes de sections transversales; mais, en fait, cette théorie ne peut donner des résultats même approchés que pour des formes qui s'écartent très peu du cercle.

L'équation des sections transversales déformées devient :

$$z' = z + w' = z + \frac{C'}{G\sigma}\,\frac{m^2-n^2}{m^2n^2}\,x'y'$$

Pour le cercle, c'est-à-dire lorsque $m = n$, elle se réduit à $z' = z$, et, par conséquent, la section transversale reste plane. Mais, en général,

---

(*) Ce moment C′ est ordinairement appelé M_z.

Si l'on fait $\sigma(\varkappa^2+\lambda^2) = I_0$, qui est le moment d'inertie, dit *polaire*, de la section σ autour de son centre, l'on a pour le moment de torsion, quel que soit le rapport des deux demi axes m et n de la base elliptique :

$$M_z = G\frac{\psi}{l}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\frac{\sigma^4}{I_0} = \text{environ}\ \frac{1}{39{,}48}\,G\frac{\psi}{l}\frac{\sigma^4}{I_0}.$$

Or, j'ai trouvé pour des sections rectangulaires, triangulaires, en double spatule (comme celle des rails), et même en secteur de cercle plein ou évidé, etc., que le moment de torsion était encore représenté par cette formule sans qu'il y ait jamais erreur de plus d'un treizième Ses résultats sont loin de cadrer avec la formule *ordinaire* $G\frac{\psi}{l}I_0$ (*Comptes rendus*, 27 janvier 1879, p. 142), fautive comme on a dit.

l'équation ci-dessus représente une surface du second ordre coupée suivant des lignes droites par des plans parallèles au plan xz et par des plans parallèles au plan yz. Cette surface est donc un paraboloïde hyperbolique qui a un système de génératrices rectilignes parallèle au plan xz et un autre parallèle au plan yz (*).

(*) **NOTE FINALE DU § 31.**

1. *Effet du gauchissement des sections non circulaires.* — Ainsi que je l'ai montré dès 1843 (*), ou avant d'avoir trouvé les formules de la torsion du prisme rectangle et du cylindre elliptique (**), c'est parce que les sections planes transversales se *gauchissent* lorsqu'on tord certains cylindres ou prismes (et on sait maintenant que ce sont tous ceux dont la section n'est pas circulaire), que l'on ne peut pas, sans commettre une erreur souvent très grande, appliquer la formule de la théorie appelée ordinaire par Clebsch, pour la détermination de la torsion $\frac{\psi}{l}$ que ces corps éprouvent sous l'action d'un couple ayant un moment M_z; formule ancienne qui est $M_z = G\frac{\psi}{l}\int r^2 d\sigma$; $\int r^2 d\sigma$ désignant le moment d'inertie polaire $\int (x^2+y^2)d\sigma$ de leur section autour de son centre de gravité, et $G = \dfrac{E}{2(1+\eta)}$ étant le coefficient d'élasticité de glissement ou de réaction élastique tangentielle de la fin du § 3.

2. *Fondement, souvent erroné, de la formule ordinaire du moment de torsion, exacte seulement pour le cylindre à base circulaire.* — Cette formule dite ordinaire se base essentiellement sur ce qu'on croit les sections encore planes après la torsion; en effet, si l'on considère une quelconque des fibres, distante de r de l'axe passant par le centre de gravité des sections, le rayon vecteur r de l'extrémité de cette fibre sur la base libre a tourné d'un petit angle ψ, Cette extrémité a donc cheminé d'un petit arc $r\psi$, tandis que l'extrémité sur la base fixe est restée immobile; d'où il suit que tous les éléments de cette même fibre, de longueur l, devenue une hélice, se sont inclinés d'un petit angle $\frac{\psi}{l}r$ sur des parallèles à l'axe de torsion, et que les fibres font maintenant, avec les éléments superficiels des sections qu'elles traversent, des angles $\frac{\pi}{2}-\frac{\psi}{l}r$, qui ont des cosinus

---

(*) *Comptes rendus*, t. XVII, 30 octobre, p. 945 et 20 novembre, p. 1188 (il n'y a pas lieu de s'arrêter aux parties de celui du 20 novembre où il est question d'un prisme à base losange)

(**) T. XXIV, 22 mars et 10 mai, p. 48 et 1188.

$\frac{\theta}{l} r$ si les sections sont restées planes et normales à l'axe. Il en résulte bien, d'après le § 5, page 10, sur un élément $d\sigma$ de section, un glissement $g = \frac{\theta}{l} r$, et une composante tangentielle de traction $\mathrm{G}g d\sigma = \mathrm{G} \frac{\theta}{l} r d\sigma$, ayant, autour de l'axe, un moment $\mathrm{G} \frac{\theta}{l} r^2 d\sigma$; d'où, pour l'égalité de la somme de ces moments à celui M_z des forces extérieures, la formule en question

$$(a) \qquad \mathrm{M}_z = \mathrm{G} \frac{\theta}{l} \int r^2 d\sigma = \mathrm{G} \frac{\theta}{l} \int (x^2 + y^2)\, d\sigma,$$

qui a été donnée en 1784 par Coulomb (*Recherche sur la force de torsion*, au volume des *Mémoires des savants étrangers* paru en 1787), pour les cylindres à base circulaire, les seuls pour lesquels elle soit exacte.

Mais, si les sections ne restent pas planes, les fibres, toujours devenues hélicoïdales et inclinées de $\frac{\theta}{l} r$ sur l'axe ou la fibre centrale et immobile, ne font plus, avec les éléments de chaque section, ces angles dont le cosinus a pour valeur $\frac{\theta}{l} r$.

3. *Incurvation des sections, surtout aux angles.* — Même, si le contour de la section a des angles saillants, par exemple, si elle est carrée ou rectangulaire, on démontre (voyez au n° 7 ci-après) que les éléments superficiels occupant ces angles s'inclinent justement de $\frac{\theta}{l} r$ sur leurs anciens plans, en sorte qu'ils restent normaux aux fibres correspondantes, qui sont les arêtes vives du prisme. Il n'y a donc pas de glissement en ces endroits; on y a $g = 0$, et les tractions tangentielles $\mathrm{G}g$ par unité de superficie y sont nulles. Aussi le vrai moment de résistance élastique à la torsion, des prismes à section non circulaire, est-il toujours moindre que ce que donne la formule connue $\mathrm{M}_z = \mathrm{G} \frac{\theta}{l} \int r^2 d\sigma$; et la vraie valeur de la torsion $\frac{\theta}{l}$, produite par des forces ayant un moment donné M_z, est toujours plus grande que ce qu'on tire de cette formule ancienne.

4. *Situation ordinaire des points dangereux dans les sections non circulaires.* — De plus, après avoir donné, en 1847 (mêmes *Comptes rendus*), les formules de la torsion du prisme rectangle et du cylindre elliptique, j'ai reconnu (Mémoire de 1855) que les *points dangereux*, où l'inclinaison g de la fibre sur la normale à l'élément de section qu'elle traverse a cette plus grande valeur qu'il faut renfermer dans une limite (voyez note finale du § 37 ci-après) se trouvent généralement aux endroits *les plus rapprochés* de

l'axe de torsion; tandis que d'après la théorie usitée, ces points seraient aux endroits les plus éloignés ou ayant le plus grand rayon vecteur. Cette théorie, fondée sur une fausse extension de celle de Coulomb à des cylindres autres que ceux à section circulaire dont il s'est exclusivement occupé, est donc, sous un double rapport, propre à inspirer une fausse sécurité, et doit être abandonnée, surtout pour les sections allongées, les sections en croix de Malte de pièces à côtes ou à ailes, etc.

5. *Équations de la torsion d'un prisme à base quelconque.* — C'est en étudiant la solution du problème de la torsion du prisme rectangle, tentée en 1829 par Cauchy, qui a adopté, depuis, la mienne (Comptes rendus, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 326), que j'ai aperçu pour la première fois, en 1843, la nécessité du *gauchissement*, par la torsion, des sections transversales autres que le cercle. M. Clebsch a bien voulu m'écrire qu'il regrettait de n'avoir pas donné dans son livre, comme deuxième exemple, après la torsion du cylindre elliptique, celle du prisme à base rectangle. Je crois remplir son vœu en la donnant succinctement ici, sans supposer, comme l'auteur a cru devoir le faire pour le cylindre elliptique, des flexions simultanées qui, ici, et sans utilité, amèneraient des complications plus grandes.

Reprenons les formules de la fin du § 30, p. 202, applicables à des sections de toute forme :

$$(b)\ (90\ \text{reproduite})\left\{\begin{array}{ll} u = b_0 zy \quad , & t_{xz} = Gb_0\left(y + \dfrac{\partial B_0}{\partial x}\right) , \\ v = -b_0 zx \ , & t_{yz} = -Gb_0\left(x - \dfrac{\partial B_0}{\partial x}\right) . \\ w = b_0 B_0 \ , & t_{zz} = 0 . \end{array}\right.$$

Voyons d'abord ce que signifient leurs coefficients.

D'après les deux premières, on voit que sur la section qui est à la distance z de la base fixe, le point (x, y) a tourné autour du point $(x=0, y=0)$ qui y est resté immobile, c'est-à-dire autour de l'axe de torsion qui est aussi l'axe du prisme, d'un petit arc dont le rapport au rayon vecteur est $b_0 z$; car si $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est ce rayon, les projections sur l'axe des x et sur l'axe des y d'un pareil arc $b_0 zr$ supposé décrit de gauche à droite (dans le sens où marchent les aiguilles d'une montre), sont respectivement $b_0 zr\dfrac{x}{r}$ et $-b_0 zr\dfrac{y}{r}$, c'est-à-dire précisément les projections u, v, du déplacement de ce point.

Donc 1°, b_0 représente ce qu'on appelle *la torsion* ou *l'angle de torsion*, à savoir l'arc que la torsion fait décrire aux points situés à l'unité de distance de l'axe immobile, sur la section à l'unité de distance de la section immobile. C'est ce que l'auteur a représenté ci-dessus (92 *a*) par $\dfrac{\psi}{l}$.

Nous désignerons cette torsion $b_0 = \frac{\psi}{l}$ par θ.

2° B_0, d'après la 3ᵉ équation, est $\frac{w}{b_0}$, quotient, par la torsion, du déplacement longitudinal w. Mettons donc $\frac{w}{\theta}$ à la place de B_0. Nous aurons ainsi, pour la torsion d'un prisme quelconque, à section supposée symétrique, les formules

$$(c)\quad \begin{cases} u = \theta z y \quad, & t_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y\right), \\ v = -\theta z x\ , & t_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x\right). \end{cases}$$

De plus, en appelant p, comme ci-dessus, l'angle que fait, avec les x, la normale menée, du côté extérieur, à la surface latérale du prisme, qui ne supporte aucune pression ni traction, l'on a, en vertu des troisièmes équations générales (24) et (25) de l'équilibre d'élasticité du § 12,

$$(d)\quad \begin{cases} \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} = 0\ , \text{ partout,} \\ t_{zx} \cos p + t_{zy} \sin p = 0\ , \quad \text{sur la surface latérale,} \end{cases}$$

équations conformes, du reste, aux secondes (69) et (70) du § 24, invoquées au présent § 31 pour le cylindre elliptique.

Et l'on a, pour le moment de torsion

$$(e)\quad M_z = C' = \int (t_{xz} y - t_{yz} x)\, d\sigma = G \int \left[\theta\,(x^2 + y^2) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} y - \frac{dw}{\partial y} x\right)\right] d\sigma\,.$$

Il résulte, des équations (c) et (d), que la détermination du déplacement longitudinal w, dont la connaissance amènera celle des tensions tangentielles t_{xz}, t_{yz} et celle du moment de torsion, se réduit, pour des prismes ou cylindres de toute forme, à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(f)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,,$$

avec la condition qu'on ait, autour des sections,

$$(g)\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y\right) \cos p + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x\right) \sin p = 0\,;$$

ou, ce qui revient au même, si

$$(h)\quad F\,(x, y) = 0$$

est l'équation du contour des sections, d'où $\frac{\sin p}{\cos p} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, que l'on ait, en

tous les points du contour :

$$(i) \qquad \theta(xdx + ydy) - \left(\frac{\partial w}{\partial y}dx - \frac{\partial w}{\partial x}dy\right) = 0 .$$

6. *Application à un prisme à base rectangle.* — Pour un pareil prisme ayant

son plus grand côté, $2a$, parallèle aux x,
son plus petit côté, $2b$, parallèle aux y,

la condition au contour (g) ou (i) se dédouble en

$$(j) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\theta y \text{ pour } x = \pm a , \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \theta x \quad \text{pour } y = \pm b . \end{cases}$$

Sans indiquer la voie connue qui mène à l'intégration, voie dont le présent livre donne plusieurs exemples où l'on détermine les coefficients A d'une série telle que $w = \sum A\left(e^{mx} - e^{-mx}\right)\sin my$ par une multiplication et une intégration faisant disparaître tous les termes du $\sum$ hors un, qu'il nous suffise d'en rapporter le résultat et de le vérifier. On peut lui donner, à volonté, ces deux formes qui sont équivalentes, les sommes $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives du nombre i :

$$(k) \qquad \begin{cases} w = +\theta xy - \dfrac{\theta b^2}{2}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^3 \displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^3} \dfrac{e^{\frac{2i-1}{2b}\pi x} - e^{-\frac{2i-1}{2b}\pi x}}{e^{\frac{2i-1}{2b}\pi a} + e^{-\frac{2i-1}{2b}\pi a}} \sin\dfrac{2i-1}{2b}\pi y ; \\ w = -\theta xy + \dfrac{\theta a^2}{2}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^3 \displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^3} \dfrac{e^{\frac{2i-1}{2a}\pi y} - e^{-\frac{2i-1}{2a}\pi y}}{e^{\frac{2i-1}{2a}\pi b} + e^{-\frac{2i-1}{2a}\pi b}} \sin\dfrac{2i-1}{2a}\pi x . \end{cases}$$

Elles satisfont l'une et l'autre :

1° à l'équation (f) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, évidemment ;

2° évidemment aussi, la première (k) à la deuxième (j), et la deuxième (k) à la première (j), vu que $\cos\dfrac{2i-1}{2}\pi = 0$;

3° la première (k) à la première (j) et la deuxième (k) à la deuxième (j), vu qu'on a, s étant une variable quelconque par laquelle nous remplaçons $\dfrac{x}{a}$ ou $\dfrac{y}{b}$:

$$(l) \quad 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 s = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{2n-1}{2}\pi s = \frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi s}{2} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi s}{2} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi s}{2} - \ldots ;$$

égalité qu'on vérifie facilement si on multiplie les deux membres par $ds \sin \frac{2n-1}{2}\pi s$, et si l'on intègre ensuite de $s=0$ à $s=1$; car tous les termes de la série $\sum$ disparaissent, excepté celui pour lequel le coefficient de $\frac{\pi s}{2}$ est $2n-1$, ou répond à la même valeur de n que dans le facteur introduit avant d'intégrer; et il reste :

$$2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\left[\frac{2}{(2n-1)\pi}\right]^2 \sin\frac{2n-1}{2}\pi = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}, \quad \text{ou une identité.}$$

L'une et l'autre des deux expressions (k), à volonté, est donc la solution des équations posées.

Substituant cette valeur de w dans (c) t_{xz}, t_{yz}, puis ces tensions dans l'expression (e) avec $dxdy$ pour $d\sigma$, et intégrant de $-a$ à $+a$ et de $-b$ à $+b$, on obtient, eu égard à la sommation connue

$$\sum \frac{1}{(2i-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{96},$$

le moment

$$(m)\quad \begin{cases} M_z = G\theta a b^3\left[\frac{16}{3} - \frac{b}{a}\left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum \frac{1}{(2i-1)^5} \frac{e^{\frac{2i-1}{2b}\pi a} - e^{-\frac{2i-1}{2b}\pi a}}{e^{\frac{2i-1}{2b}\pi a} + e^{-\frac{2i-1}{2b}\pi a}}\right] = \\ = G\theta a^3 b\left[\frac{16}{3} - \frac{a}{b}\left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum \frac{1}{(2i-1)^5} \frac{e^{\frac{2i-1}{2a}\pi b} - e^{-\frac{2i-1}{2a}\pi b}}{e^{\frac{2i-1}{2a}\pi b} + e^{-\frac{2i-1}{2a}\pi b}}\right]. \end{cases}$$

Ces deux expressions, dont l'équivalence résulte de la manière dont on les a obtenues, et peut d'ailleurs se démontrer analytiquement et se vérifier aussi numériquement, donnent :

1° Lorsque le prisme est plat, ou que le côté $2b$ est très petit par rapport à l'autre $2a$,

$$(n)\quad M_z = \frac{16}{3} G\theta a b^3 \left(1 - 0{,}63025\,\frac{b}{a}\right) = \text{sensiblement } \frac{16}{3} G\theta a b^3.$$

Cette expression, énormément plus petite que celle $G\theta \int (x^2+y^2)\,d\sigma = \frac{4}{3} G\theta a b (a^2+b^2)$ de la théorie ordinaire, se trouve conforme à ce qui résulte de la formule de Cauchy

$$M_z = \frac{16}{3} G\theta \frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}.$$

Aussi, quoique cette formule de 1829 ne soit exacte que pour le cas extrême actuel, de b très petit, le Mémoire de l'illustre analyste mettait sur la voie de a vraie solution, et constituait déjà un progrès important;

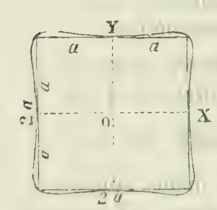
2° Lorsque $a = b$, ou que le prisme est à base carrée :

$$(o) \qquad M_z = 0{,}843462\, G\theta \cdot \frac{8a^4}{3}$$

expression qui n'est que les 0,84..... de ce que fournirait la formule $G\theta \int (x^2 + y^2)\, d\sigma$ de la théorie ordinaire, et de ce que donne aussi cette formule citée de 1829, que Cauchy avait tirée d'un développement supposé possible de w, en puissances entières de x, y, et à laquelle il a renoncé comme nous avons dit. Ce coefficient, 0,84 ..... est d'accord avec les résultats comparés d'expériences de Duleau sur la torsion de barres carrées et de barres rondes, résultats auparavant inexplicables.

Je ne peux que renvoyer, pour les détails, à mon mémoire du tome XVII des *Savants étrangers*, ou à la longue note du n° 156 de l'édition de 1864 des *Leçons de Navier*, ainsi qu'à l'Historique mis en tête.

7. *On peut obtenir ce dernier résultat approximativement d'une manière presque élémentaire.* — Ce coefficient, 0,843..... peut être trouvé très approximativement par un calcul tiré de formules simplement algébriques, susceptibles d'être présentées dans des cours d'arts et métiers. Il n'y a pour cela qu'à assimiler, quant au gauchissement ou à l'incurvation de son plan, la section carrée rectiligne dont les côtés sont $2a$, à une section curviligne à angles arrondis, ayant, avec celle-là, huit points communs (les quatre angles et les quatre milieux des côtés), et représentée par l'équation du quatrième degré :



$$(p) \qquad x^4 + 6x^2y^2 + y^4 + 5a^2(x^2 + y^2) = 6a^4\,.$$

On peut voir en effet que si l'on prend

$$(q) \qquad w = 2\,\frac{x^3y - y^3x}{5a^2}\,\theta\,.$$

on satisfait non seulement à l'équation différentielle indéfinie du second ordre (f), mais encore à la condition (i) relative au contour; car si l'on met dans celle-ci, pour w, la valeur (q), si l'on multiplie par $\frac{10a^2}{\theta}$ et si l'on remplace x, y, par x, y qui désignent les coordonnées des points du contour, on a :

$$4(x^3 - 3xy^2)\,dx - 4(3x^2y - y^3)\,dy + 5a^2(2x\,dx + 2y\,dy) = 0\,,$$

équation à laquelle satisfait le $\frac{dy}{dx}$ tiré de l'équation (p) de la courbe de con-

tour, puisqu'elle est identique à ce qui résulte de la différentiation de celle-ci.

Or, si l'on met pour w sa valeur (q) dans la formule générale (e) du moment de torsion, on a

$$(r)\qquad \mathrm{M}_z = \mathrm{G}\theta\left[\int (x^2+y^2)\,d\sigma - \frac{2}{5a^2}\int (6x^2y^2 - x^4 - y^4)\,d\sigma\right].$$

Cette expression du moment est tout à fait exacte pour la section curviligne dont le contour est représenté par l'équation (p). L'appliquer à la section carrée rectiligne inscrite, ayant pour côté $2a$, c'est supposer que celle-ci prend, par la torsion, approximativement la même forme courbe que le plan de l'autre. On trouve, en remplaçant $d\sigma$ par $dx\,dy$, et intégrant pour l'étendue *de la section carrée rectiligne:*

$$(s)\quad \mathrm{M}_z = \mathrm{G}\theta\left[\frac{8}{3}a^4 - \frac{2}{5a^2}\left(6\,.\,\frac{4a^6}{9} - \frac{8a^6}{5}\right)\right] = \mathrm{G}\theta\,\frac{8}{3}a^4\,.\,\frac{21}{25} = 0{,}84\,.\,\frac{8}{3}\mathrm{G}\theta a^4\ ;$$

c'est-à-dire justement les 0,84 de ce que donne l'ancienne théorie, ou de ce qu'on aurait si la section carrée restait *plane* comme fait une section circulaire, au lieu de s'infléchir vers les quatre angles de manière à rester normale, comme nous avons dit, aux quatre arêtes devenues des hélices.

Cette conservation de la normalité des sections aux arêtes vives résulte immédiatement des équations de condition (j) qui annulent à la fois les deux glissements $g_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \theta x$, $g_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \theta y$, aux angles des sections. C'est une suite de la supposition que les faces latérales, même supportant une pression normale uniforme comme celle de l'atmosphère, n'éprouvent aucune traction tangentielle, dans la direction des arêtes par exemple; car il résulte du théorème ($t_{xy} = t_{yx}$, etc.) de réciprocité des composantes tangentielles de traction sur deux facettes rectangulaires contiguës dans des sens perpendiculaires à leur intersection commune, qu'il n'y a, de même, aucune traction tangentielle sur les sections auprès de leur contour, dans un sens normal à ce contour, en sorte qu'en se courbant, les sections, sur leurs bords, restent normales aux arêtes devenues courbes.

Et cela s'applique même aussi bien aux tiges fléchies qu'aux tiges tordues.

8. *Contours variés, en nombre infini.* — Au reste, outre le contour du 4ᵉ degré (p), la condition (i) considérée comme équation différentielle en x et y peut fournir un nombre infini d'autres contours de sections, pour lesquels le problème de la torsion est immédiatement résoluble. En effet si l'on prend à volonté, pour w, l'une quelconque, $\mathrm{F}(x, y)$, des expressions soit algébriques de tous les degrés, soit transcendantes, qui satisfont à (f) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, et si l'on substitue en x, y, ou r, α, au lieu de x, y, dans (i), l'on

a une équation dont le second terme est une différentielle exacte aussi bien que le premier, et qui, immédiatement intégrée, en mettant dans le second membre telle constante qu'on voudra, donnera le contour d'une section de prisme dont le plan acquiert, par la torsion, la forme courbe choisie $w = F(x, y)$. On voit qu'à chaque forme de surface répondent une infinité de contours dont les équations diffèrent entre elles par la valeur donnée à la constante du second membre, à laquelle on peut même substituer une fonction de z pourvu qu'elle soit fort peu variable avec cette coordonnée; de sorte que l'analyse précédente pourra s'étendre approximativement à des tiges dont les sections n'ont pas exactement les mêmes dimensions d'un bout à l'autre.

En se bornant, par exemple, aux sections symétriques en deux sens, la condition (i) fournit, c_2, c_4, c_6, $c_8 \dots m$, C_m et K étant des constantes, l'équation

$$(t) \quad \begin{cases} \theta \dfrac{x^2+y^2}{2} + c_2(x^2-y^2) + c_4(x^4-6x^2y^2+y^4) + c_6(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6) + \\ \quad + c_8(x^8-28x^6y^2+70x^4y^4-28x^2y^6+y^8) + \dots + \sum C_m(e^{mx}+e^{-mx})\cos my = K \end{cases}$$

pour définir les contours des sections dont les plans, sous l'empire de la torsion θ de l'unité de longueur du prisme auquel elles appartiennent, prendront la forme d'une surface courbe ayant pour ordonnée perpendiculairement à ce plan

$$(u) \quad \begin{cases} w = c_2.2xy + c_4(4x^3y-4xy^3) + c_6(6x^5y-20x^3y^3+6xy^5) + \\ \quad + c_8(8x^7y-56x^5y^3+56x^3y^5-8xy^7) + \dots + \sum C_m(e^{mx}-e^{-mx})\sin my \,. \end{cases}$$

Et l'expression (e) du moment de torsion est en conséquence :

$$(v) \quad \begin{cases} M_z = G\displaystyle\int_\sigma d\sigma \Big\{ \theta(x^2+y^2) + 2c_2(x^2-y^2) + 4c_4(x^4-6x^2y^2+y^4) \\ \quad + 6c_6(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6) + 8c_8(x^8-28x^6y^2+70x^4y^4-28x^2y^6+y^8) + \dots \\ \quad + \sum mC_m\Big[x(e^{mx}-e^{-mx})\cos my - y(e^{mx}+e^{-mx})\sin my\Big]\Big\} \,; \end{cases}$$

ou, si l'on prend des coordonnées polaires r, α, de manière qu'au lieu des équations (f), (g) en x, y, on ait à satisfaire à

$$(x) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \text{, en tous les points de chaque section ,} \\ \theta r dr - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} dr + r\dfrac{\partial w}{\partial r} d\alpha = 0 \text{, à leur contour ,} \end{cases}$$

on a, au lieu de (p), une solution générale de la forme suivante, les $\sum$ représentant des sommes de termes avec des coefficients A quelconques,

les exposants m, m' entiers ou fractionnaires étant quelconques aussi :

$$(y) \qquad w = \sum \left(\mathrm{A}r^m + \mathrm{A}_1 r^{-m}\right) \sin m\alpha + \sum \left(\mathrm{A}'r^{m'} + \mathrm{A}'_1 r^{-m'}\right) \cos m'\alpha \,,$$

si l'équation du contour a cette forme (z) qui y correspond, et où les $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}', \mathrm{A}'_1, m, m'$ sont les mêmes :

$$(z) \qquad \frac{\theta r^2}{2} + \sum \left(\mathrm{A}r^m - \mathrm{A}_1 r^{-m}\right) \cos m\alpha - \sum \left(\mathrm{A}'r^{m'} - \mathrm{A}'_1 r^{-m'}\right) \sin m'\alpha = \mathrm{K} \,.$$

Et le moment de torsion est alors :

$$(a') \qquad \mathrm{M}_z = \mathrm{G} \iint \left(\theta r^2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) r dr d\alpha \,,$$

l'intégrale étant étendue à toute la section σ dont les éléments sont les $d\sigma = r\,dr\,d\alpha$.

Je renvoie au mémoire cité du t. XVII et aux notes de 1864 sur Navier, pour divers exemples, tels que les prismes même avec sections symétriques en un seul sens, à savoir, un triangle équilatéral, une étoile ou croix de Malte donnant des prismes à côtes, une double spatule comme les rails de chemins de fer, une section composée de deux autres non contiguës et rendues solidaires, etc., et pour la *topographie*, ou la description, par coupes parallèles, des surfaces courbes dans lesquelles se changent, par la torsion, les plans des diverses sections. — On peut aussi, à la librairie de Ch. Delagrave, rue Soufflot, se procurer des reliefs en plâtre de quelques-unes de ces surfaces.

On peut voir encore aux *Comptes rendus* des séances de l'Académie, 2 et 9 décembre 1878, pages 849 et 893, le calcul de la torsion pour des prismes à base mixtiligne, par les coordonnées *isothermes* de Lamé (dont Clebsch fait, au § 32, un autre usage), spécialement lorsqu'elles se réduisent aux coordonnées semi-polaires ordinaires ; et l'application de cette méthode à des prismes à base de secteur de cercle pleins ou évidés, auxquels avaient déjà pensé MM. Thomson et Tait (*a Treatise on natural Philosophy*).

9. *Formule générale et usuelle du moment de torsion des prismes ou cylindres, exacte lorsque la section est une ellipse et fort approchée pour presque toutes les autres sections.* — Lorsqu'il ne s'agit que d'avoir la valeur de ce moment, et qu'on se contente d'une approximation généralement suffisante, on peut, et cela paraît digne de remarque, se servir de la formule (92 *a*) trouvée en 1847 pour le cylindre à base d'ellipse, en l'écrivant sous la forme suivante,

$$(b') \qquad \mathrm{M}_z \text{ (ou C}') = \mathrm{G}\frac{\psi}{l} \cdot \frac{1}{4\pi^2}\frac{\sigma^4}{\mathrm{I}_0} \,,$$

$$\text{ou} = \frac{1}{39{,}48}\,\mathrm{G}\,\frac{\psi}{l}\frac{\sigma^4}{\mathrm{I}_0} = 0{,}02533\,\mathrm{G}\theta\,\frac{\sigma^4}{\mathrm{I}_0} \,;$$

dans laquelle $\quad \mathrm{I}_0 = \sigma(\varkappa^2 + \lambda^2) = \int_\sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma = \int_\sigma r^2 d\sigma$

désigne le moment d'inertie *polaire* de la section σ autour de son centre de gravité.

En effet si l'on met à la place de σ et de I_0 leurs valeurs pour des sections rectangulaires, carrées rectilignes ou curvilignes, triangulaires, ou en double spatule (comme celles des rails) et même en secteurs de cercle pleins ou évidés par des secteurs de même angle, j'ai reconnu (*Comptes rendus*, 27 janvier 1879, p. 142) que le moment de torsion était encore représenté par cette formule, sans qu'il y ait eu des écarts de plus d'un treizième au maximum.

Mais, si l'on veut déterminer *le plus grand glissement*, auquel on doit imposer une limite, et pouvoir établir en conséquence les conditions de cohésion permanente ou de stabilité de la contexture de la matière, il faudra recourir dans chaque cas à la solution exacte qui lui est spéciale; à moins qu'on ne puisse faire quelques assimilations à des cas où le calcul a déjà été opéré, et quelque intercalation possible entre les chiffres de la petite table donnée au § 40, p. 566, de la Note que j'ai mise au n° 156 de l'édition de Navier de 1864.

10. *Élasticités inégales.* — Toutes les formules ci-dessus de torsion de prismes ou cylindres conviennent sous la seule condition que les élasticités soient les mêmes dans tous les sens transversaux, quels que soient leurs rapports avec l'élasticité longitudinale.

Mais il suffit de les modifier légèrement pour les rendre applicables aux cas ordinaires où les élasticités transversales peuvent être inégales. On n'a, pour cela, qu'à remplacer les équations (f) et (i) par les deux suivantes, où G_x, G_y sont deux coefficients de résistance élastique aux glissements dans les sens x et y supposés être, avec les z, ceux des intersections, en chaque point, de trois plans de symétrie de contexture

$$G_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 ,$$

$$G_y \left(\theta x - \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx + G_x \left(\theta y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dy = 0 \cdot$$

Les formules principales, telles que celles qui donnent le déplacement longitudinal w, les équations correspondantes des contours, les moments de torsion et les glissements, sont les mêmes en mettant, à la place des coordonnées transversales x, y, leurs quotients par les racines carrées de G_x, G_y, et en modifiant divers coefficients, par exemple au moyen du changement de G en $\sqrt{G_x G_y}$ de manière qu'ils prennent, lorsque $G_x = G_y = G$, les mêmes valeurs que quand les élasticités transversales sont égales, etc. (Voyez §§ 39 et 40 de la Note du n° 156 de l'édition de Navier de 1864.)

§ 32. — Cylindre creux.

Si le cylindre considéré est creux à l'intérieur, de manière que la ligne des centres de gravité tombe dans un espace vide, on peut encore, avec de très légères modifications, se servir des formules développées dans les §§ 22 à 27. A la vérité, la détermination des constantes employées dans le cas précédent ne peut se faire de la même manière, attendu qu'il ne peut plus être question de supposer fixes les éléments voisins du centre de gravité. Mais on peut arriver à cette détermination au moyen d'une autre hypothèse qui consiste à admettre que les expressions (72) ou celles (65), § 24, sont telles que v s'évanouisse pour $y = 0$, $z = 0$, et u de même pour $x = 0$, $z = 0$. Cela revient à dire que *dans la section transversale extrême, où se trouve l'origine, les points appartenant à chacun des deux axes principaux sont astreints à ne se déplacer qu'en restant dans le plan passant par cet axe principal et par l'axe longitudinal.* Cette condition équivaut à annuler les constantes a_0, a', a'', comme on a fait, vers la fin du § 24, pour des cylindres pleins. On peut ensuite laisser subsister les constantes c, b', b'' et ajouter à la condition précédente celle que trois points quelconques situés sur ces axes principaux doivent rester dans la section primitive, de sorte que, pour ces points aussi, w s'évanouit. On détermine, par conséquent, les constantes c, b', b'' à l'aide des autres constantes; et, d'après les équations (65), § 24, page 150, qui donnent :

$$\Omega_{(x=0)} - y^2 + c - b''y = 0\,,$$

ou bien

$$_{(y=0)} - x^2 + c - b'x = 0\,; \qquad (*)$$

l'une ou l'autre de ces deux équations devant être satisfaite pour trois points des axes principaux.

(*) En faisant $w = 0$, $z = 0$, puis successivement $x = 0$ et $y = 0$ dans la troisième des équations (65), p. 150, la seule qui contienne Ω, et en y supprimant aussi le terme affecté du coefficient b qu'on a vu [§ 24, (70 a), p. 156] devoir être fait nul, on a

$$\Omega_{(x=0)} + c - b''y = 0\,; \quad \Omega_{(y=0)} + c - b'x = 0\,.$$

L'auteur ne dit pas suffisamment d'où viennent les termes $-y^2$ et $-x^2$ mis par lui, de plus, dans ces équations qu'il dit devoir servir à déterminer c, b'', b' en fonction des autres constantes (contenues dans Ω), après avoir mis pour y et x les coordonnées transversales des points de la base du prisme creux qu'on astreint à rester dans la section primitive. Ce serait une chose à éclaircir.

Voir au reste, ci-après, dans la Note que nous avons mise à la fin du § 35, une solution assez simple du problème des prismes creux.

Rien n'est changé par là à la discussion précédente, sinon que les constantes désignées par $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0$ et par $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0$ ont des valeurs différentes, et que la constante c entre dans l'expression de w; mais les tensions, et toutes les conséquences qui précèdent, demeurent absolument les mêmes.

§ 33. — Méthode auxiliaire générale, fondée sur l'emploi des coordonnées courbes, pour la détermination des fonctions B_0, B_1, B_2.

Je vais prendre comme exemple le cas où la section transversale est délimitée par deux ellipses homofocales, c'est-à-dire ayant le même centre et les deux mêmes foyers. Bien que ce cas particulier soit le plus simple parmi tous ceux pour lesquels la section est limitée par d'autres courbes que le cercle, il exige cependant quelques développements préparatoires, et il donne l'occasion de faire connaître une méthode auxiliaire qui peut quelquefois servir à la détermination des fonctions B_0, B_1, B_2. Je présente donc, préalablement, les considérations générales suivantes :

Je remarque d'abord que les premiers membres des équations du § 24 (70) $\frac{\partial B_{0,1,2}}{\partial x}\cos p + \frac{\partial B_{0,1,2}}{\partial y}\sin p = \ldots.$ qui expriment les conditions-limites ou aux contours des sections pour les fonctions B_0, B_1, B_2, sont susceptibles d'une interprétation simple. A partir d'un point quelconque de la périphérie de la section transversale, avançons, dans la direction de la normale, d'une très petite quantité ε, et cherchons le changement qui en résulte pour la fonction B_0 (ou pour l'une quelconque des deux autres, la fonction B_0 est ici prise pour exemple). Comparons la valeur de B_0 sur la périphérie avec la valeur qu'elle acquiert au point extrême du petit espace parcouru ε. La direction de cet espace ε fait, avec l'axe des x, l'angle p; et dans le trajet pour parcourir cet espace, x croît de $\varepsilon \cos p$, et y de $\varepsilon \sin p$. On aura donc la valeur de la fonction B_0 ou B_1 ou B_2, à l'extrémité de l'espace ε, en y remplaçant x par $x + \varepsilon \cos p$ et y par $y + \varepsilon \sin p$. Si on développe d'après le théorème de Taylor, et si on néglige les puissances de ε supérieures à la première, on a, pour la nouvelle valeur de la fonction :

$$B_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial B_0}{\partial y}\cos p + \frac{\partial B_0}{\partial y}\sin p\right).$$

L'accroissement de la fonction, divisé par l'espace parcouru, est une grandeur qui peut être désignée sous le nom de *quotient différentiel par rapport à la normale.* On peut l'exprimer par $\frac{\partial B_0}{\partial \nu}$, qui a pour valeur :

$$(92\,c) \qquad \frac{\partial B_0}{\partial \nu} = \frac{\partial B_0}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin p \;.$$

Telle est la signification simple des premiers membres de ces équations (70), § 24 ; ces équations peuvent donc se mettre sous la forme suivante :

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial \nu} &= x \sin p - y \cos p \,, \\ \frac{\partial B_1}{\partial \nu} &= \frac{\eta x^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) y^2}{2} \cos p + \left(\frac{E}{G} - \eta\right) xy \sin p \;, \\ \frac{\partial B_2}{\partial \nu} &= \frac{\eta y^2 + \left(\frac{E}{G} - 3\eta\right) x^2}{2} \sin p + \left(\frac{E}{G} - \eta\right) xy \cos p \;. \end{aligned} \right.$$

Supposons maintenant les points de la section transversale déterminés, non par des coordonnées rectilignes, mais par deux systèmes de courbes, dans son plan, tels qu'une courbe de chacun de ces deux systèmes passe par chacun des points du plan. Un point quelconque pourra évidemment être déterminé si on désigne la courbe de chacun des deux systèmes qui passe en ce point. Représentons ces systèmes de courbes par les équations :

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x,y) &= \alpha \,, \\ F(x,y) &= \beta \,; \end{aligned} \right.$$

de sorte que la première équation donne celles de toutes les courbes du premier système lorsqu'on y attribue à la constante α toutes les valeurs possibles, et que, de même, toutes les courbes du second système soient données par les diverses valeurs constantes attribuées à β dans la seconde équation. On peut considérer α et β comme de nouvelles variables par lesquelles seront déterminés tous les points du plan, et qui sont liées aux variables primitives x et y par les équations (94).

Supposons en outre que ces deux systèmes de courbes soient choisis de telle manière que les courbes n'appartenant pas au même système se coupent partout à angles droits. Partons d'un point x, y, d'une

courbe du premier système, et avançons-nous, sur cette courbe, d'une quantité infiniment petite. Si dx et dy représentent les accroissements des coordonnées, nous aurons :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dy=0\ ;$$

ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dy= \quad .$$

Si, partant du même point, on s'avance sur la courbe de l'autre système, et si l'on désigne par dx', dy' les accroissements des coordonnées, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial x}\,dx'+\frac{\partial \mathrm{F}(x,y)}{\partial y}\,dy'=0\ ;$$

ou ce qui revient au même :

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx'+\frac{\partial \beta}{\partial y}\,dy'=0\ .$$

Si les courbes se coupent partout à angle droit, on doit avoir, en chaque point :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dx'}{dy'};$$

ou bien, en prenant les valeurs de ces rapports dans les équations ci-dessus, et en écrivant l'équation qui en résulte, on a la suivante qui devra être satisfaite pour toutes les valeurs de x et de y :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}=0\ . \tag{95}$$

Enfin, on peut se représenter ces systèmes de courbes choisis de telle sorte qu'une courbe du premier système, celle pour laquelle $\alpha=0$, coïncide avec le contour de la section transversale du prisme solide. Si alors, à partir du contour, on s'avance dans la direction de la normale, on reste sur une courbe du second système ; α seul a donc varié, et non β ; et, ce que nous avons appelé le quotient différentiel par rapport à la normale, est identique au quotient différentiel par rapport à α, ou n'en diffère que par un facteur.

Cherchons d'abord sous quelle forme se présenteront les équations du § 24 servant à déterminer les fonctions B_0, B_1, B_2, et prenons pour

exemple la seconde de ces équations (69) toutes de même forme, page 154 :

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = 0 \,. \tag{95 a}$$

Si l'on considère B_0 (d'abord quelconque, et non encore supposée astreinte à satisfaire à cette équation différentielle) comme une fonction de α et de β, on obtient, pour ses quotients différentiels par rapport à x et à y, les expressions

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial x} &= \frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial B_0}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} \,, \\ \frac{\partial B_0}{\partial y} &= \frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial B_0}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} \,. \end{aligned} \right. \tag{96}$$

Si, après avoir multiplié ces équations par $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}$, on les additionne, et si, après les avoir multipliées ensuite par $\frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}$, on les additionne encore, on obtient, la fonction B_0 étant toujours quelconque, mais les fonctions α, β de x et y étant supposées satisfaire à la condition (95) d'orthogonalité des courbes qui sont représentées en égalant à des constantes les fonctions de x et y appelées α et β,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{A}\frac{\partial B_0}{\partial \alpha} \,, \\ \frac{\partial B_0}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial B_0}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{1}{B}\frac{\partial B_0}{\partial y} \,; \end{aligned} \right. \tag{97}$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{A} &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \,, \\ \frac{1}{B} &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 \,. \end{aligned} \right. \tag{98}$$

Que maintenant l'on compare les équations (97) avec les suivantes, qui résultent des règles connues de la différentiation et qui s'appliquent à toute fonction B_0 de x, y ainsi qu'à toutes relations de x, y avec d'autres variables α, β,

$$\frac{\partial B_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_0}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} \,,$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial \beta} = \frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial B_0}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} \,;$$

15

et que l'on égale les coefficients correspondants dans les deux systèmes d'équations, on a les relations suivantes, toujours indépendantes de la nature de la fonction B_0, mais qui supposent satisfaite la condition d'orthogonalité exprimée par (95) :

$$(99) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = A \frac{\partial \alpha}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = A \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} = B \frac{\partial \beta}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} = B \frac{\partial \beta}{\partial y}. \end{array} \right.$$

En élevant au carré ces quatre équations, et en ajoutant celles qui se trouvent sur une même ligne horizontale, on trouve, en tenant compte des (98), les nouvelles expressions suivantes pour A et B :

$$(100) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 = A, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 = B. \end{array} \right.$$

Or, au moyen des équations ou relations (99), l'équation d'orthogonalité (95) donne cette autre relation :

$$(101) \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0 ;$$

et d'un autre côté, en considérant B_0 comme une fonction de α et de β, (fonction toujours quelconque), les règles de la différentiation donnent :

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_0}{\partial \alpha^2}\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right\} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial \beta^2}\left\{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$+ 2\frac{\partial^2 B_0}{\partial \alpha \partial \beta}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right\} + \frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial B_0}{\partial \beta}\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right).$$

En examinant les facteurs binômes dans le second membre de cette équation, on voit, d'après (98), que le premier est égal à $\frac{1}{A}$, et le second à $\frac{1}{B}$. Le troisième est zéro d'après (95). Il reste seulement à déterminer les deux derniers. Si l'on observe que le premier membre de cette équation doit être égal à zéro, et que l'équation doit être satisfaite pour toute fonction arbitraire B_0, elle devra être vérifiée pour $B_0 = x$ et pour $B_0 = y$. En faisant successivement ces deux hypothèses,

on a les équations suivantes :

$$0=\frac{1}{A}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}+\frac{\partial x}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial x}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\right);$$

$$0=\frac{1}{A}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial y}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\right).$$

Si on multiplie la première de ces équations par $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, la seconde par $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$ et si on les additionne, ou si on multiplie la première par $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, la seconde par $\frac{\partial y}{\partial\beta}$ et si on les additionne de nouveau, on a, en tenant compte de (100) et de (101), les équations suivantes dont chacune ne contient plus que l'un des deux coefficients binômes cherchés :

$$0=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)+A\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right),$$

$$0=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)+B\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\right).$$

D'un autre côté encore, en différentiant par rapport à α et à β les équations (100) et (101) dont la seconde est une conséquence de la condition d'orthogonalité (95) des courbes, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\beta};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}\frac{\partial y}{\partial\beta}=-\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}=-\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\alpha};$$

et, en introduisant ces valeurs dans les deux équations précédentes $0=\frac{1}{A}(\ldots.)+\ldots.$, on trouve, pour les coefficients binômes cherchés,

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}=\frac{1}{2B}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\beta}\right).$$

On a donc, pour le premier membre de l'équation (95 a) en B_0 (sans qu'il soit besoin que B_0 la satisfasse, ou que ce premier membre soit égal à zéro), l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}=\frac{1}{A}\frac{\partial^2 B_0}{\partial \alpha^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B_0}{\partial \beta^2}+\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial B_0}{\partial \alpha}+\frac{1}{2B}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \beta}\right)\frac{\partial B_0}{\partial \beta};$$

ou, ce qui revient au même

$$(102)\qquad \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{AB}}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \beta}\right)\right\}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant qui résume les résultats de ces transformations, et qui trouve, dans un grand nombre de cas, une application avantageuse :

Si α, β sont deux fonctions de x, y, telles qu'en les égalant à des constantes, elles représentent des courbes qui se coupent toujours à angle droit, et si l'on fait, [*formule* (100)],

$$A=\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2;\qquad B=\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2;$$

on a alors, B_0 étant une fonction absolument quelconque de x et de y, la relation (102) *entre ses quotients différentiels par rapport à x, y et ses quotients différentiels par rapport à α, β.* En sorte qu'on peut remplacer une équation telle que

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}=0,$$

B_0 étant une quelconque des fonctions de x, y qui y satisfait, par la suivante, dans laquelle α, β sont introduites comme variables au lieu de x, y :

$$(103)\qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \beta}\right)=0.$$

Tout ce qui est nécessaire pour établir cette équation est donné par les formules précédentes dès que l'on regarde comme connues les expressions de α, β en fonction de x, y.

Le calcul peut encore être facilité par la considération de l'élément linéaire ds, mené suivant une direction quelconque dans le plan des courbes. Le carré de cet élément a pour expression, en x, y,

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

Si dans cette expression de ds^2 on introduit les valeurs de dx, dy en fonction de $d\alpha$, $d\beta$, savoir :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta,$$

on voit que le coefficient du produit $d\alpha d\beta$ s'évanouit à cause de l'équation (101), conséquence de la condition d'orthogonalité (95) ; et en écrivant A et B à la place de $\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2$ suivant les notations (100), on obtient

(104) $$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2.$$

Ainsi A, B *sont les coefficients de* $d\alpha^2$, $d\beta^2$ *dans l'expression du carré de l'élément linéaire.*

Dans ce qui précède, on a déjà fait la remarque que si, à partir du contour de la section transversale, on avance dans la direction de la normale, α change seul, tandis que β reste le même, ou que $d\beta$ s'évanouit. Le trajet désigné par ε au commencement du §, et dont on avance dans cette direction, a donc pour valeur, d'après (104),

$$ds = d\alpha \sqrt{A};$$

et par conséquent l'on a, d'après (92),

(105) $$\frac{\partial B_0}{\partial \nu} = \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial B_0}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B_0}{\partial y} \sin p.$$

Si l'on pose pour $\frac{\partial B_0}{\partial \alpha}$ l'expression qui lui est égale

$$\frac{\partial B_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_0}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

la comparaison de cette expression avec la précédente donne les valeurs de $\cos p$ et de $\sin p$ exprimées en fonction des nouvelles variables :

(106) $$\cos p = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \sin p = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial y}{\partial \alpha};$$

où A représente, d'après (100), $\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2$.

Ces équations, réunies à (105), suffisent complètement à exprimer les conditions limites pour la détermination des fonctions B_0, B_1, B_2, du § 24.

§ 34. — Application de la méthode auxiliaire du § 33 au cas d'un contour elliptique.

Lorsque le contour de la section transversale est une ellipse, il est très facile de trouver les systèmes de courbes se coupant partout à angle droit, et telles que ce contour de section transversale fasse partie de l'un de ces systèmes. On y arrive par la considération de sections coniques ayant leurs foyers communs. Menons, par un point donné quelconque, une ellipse et une hyperbole ayant, pour leurs foyers, ceux de l'ellipse qui est donnée comme contour de section. Les tangentes à ces deux courbes sont, comme on le sait, les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs menés des foyers aux points de contact. L'ellipse et l'hyperbole passant par le même point se coupent donc à angle droit. Si l'on construit toutes les ellipses et toutes les hyperboles ayant ces mêmes foyers, on aura deux systèmes de courbes qui satisferont à toutes les conditions requises ci-dessus.

Toutes les équations de ces sections coniques sont comprises dans la formule suivante

$$\frac{x^2}{m^2+t}+\frac{y^2}{n^2+t}-1=0. \tag{107}$$

Cette équation représente effectivement des sections coniques dont $\sqrt{m^2+t}$, $\sqrt{n^2+t}$, sont les demi-axes, et dans lesquelles la distance du foyer au centre a pour expression $\sqrt{m^2+n^2}$. Si dans cette équation (107) nous donnons à t toutes les valeurs possibles comprises entre $-n^2$ et $+\infty$ (en supposant d'avance $m^2>n^2$) nous aurons des ellipses. Nous aurons au contraire des hyperboles pour toutes les valeurs de t comprises entre $-n^2$ et $-m^2$; et toutes ces courbes auront mêmes foyers puisque la distance des foyers au centre commun est indépendante de t.

Considérons, dans cette équation (107), x et y comme données et constantes ; l'équation devient du second degré en t ; et, en la résolvant, nous aurons les valeurs de t définissant l'ellipse et l'hyperbole qui passent par le point (x, y). On peut voir facilement qu'il y a toujours une courbe de chaque système qui passe par un point donné.

Si par exemple on suppose t compris entre $-m^2$ et $-n^2$ et voisin de $-m^2$, le premier terme de l'équation (107) l'emporte sur les autres et donne son signe au premier membre, qui dans ce cas est positif. Si, au contraire, t est voisin de $-n^2$, c'est le second terme qui l'emporte, et comme il est alors négatif, le premier membre tout entier est aussi devenu négatif; il y a donc, entre ces deux valeurs de $-m^2$ et $-n^2$ une valeur de t pour laquelle le premier membre de (107) s'annule; c'est-à-dire qu'il s'y trouve une racine de cette équation en t. Il y a donc toujours une hyperbole qui passe par le point donné. Si, de la même manière, on suppose t compris entre $-n^2$ et $+\infty$, et voisin de $-n^2$, c'est encore le second terme qui l'emporte: mais alors il est positif, et il donne le signe + au premier membre de l'équation. Si, ensuite, t se rapproche de la valeur $+\infty$, les deux premiers termes de l'équation deviennent presque nuls, et c'est le troisième terme, négatif, qui l'emporte: le premier membre a donc changé de signe, et est passé en conséquence par zéro pour une valeur de t comprise entre $-n^2$ et $+\infty$: il y a donc dans cet intervalle une racine de l'équation et une ellipse correspondante, qui passe par le point donné.

Désignons 1° par α, la racine de l'équation (107) en t qui correspond à l'ellipse, c'est-à-dire la valeur de t comprise entre $-n^2$ et $+\infty$ qui y satisfait; 2° par β, celle qui correspond à l'hyperbole, c'est-à-dire la seconde racine, comprise entre $-n^2$ et $-m^2$. Réduisons à un même dénominateur tout le premier membre de l'équation (107). Le coefficient de t^2 dans le numérateur est égal à -1, et comme ce numérateur doit s'annuler pour $t=\alpha$ et $t=\beta$, il ne peut être que $-(t-\alpha)\ (t-\beta)$. On a par conséquent l'identité suivante, en ce qui concerne t :

$$\frac{x^2}{m^2+t}+\frac{y^2}{n^2+t}-1=-\frac{(t-\alpha)\ (t-\beta)}{(m^2+t)\ (n^2+t)}.$$

Si on multiplie cette équation par (m^2+t) en y remplaçant ensuite t par $-m^2$; et si on la multiplie par (n^2+t) pour y remplacer ensuite t par $-n^2$, on obtient les expressions suivantes de x^2, y^2, en fonction de α, β :

$$(108)\qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(m^2+\alpha)\ (m^2+\beta)}{m^2-n^2}, \\ y^2 &= \frac{(n^2+\alpha)\ (n^2+\beta)}{n^2-m^2}. \end{aligned} \right.$$

Prenant la racine carrée des deux membres et différentiant ces deux

équations, on trouve :

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{m^2 - n^2}} \left\{ \sqrt{\frac{m^2+\beta}{m^2+\alpha}}\, d\alpha + \sqrt{\frac{m^2+\alpha}{m^2+\beta}}\, d\beta \right\},$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{n^2 - m^2}} \left\{ \sqrt{\frac{n^2+\beta}{n^2+\alpha}}\, d\alpha + \sqrt{\frac{n^2+\alpha}{n^2+\beta}}\, d\beta \right\}.$$

En additionnant les carrés de ces deux expressions, on a le carré de l'élément linéaire

$$(108\,a) \qquad ds^2 = \frac{\alpha-\beta}{4} \left\{ \frac{d\alpha^2}{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)} - \frac{d\beta^2}{(m^2+\beta)(n^2+\beta)} \right\}.$$

Si l'on compare cette équation avec celle (104), $ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2$, on reconnaît que ce qui affecte $d\alpha^2$ et $d\beta^2$ fournit respectivement les valeurs de A, B, nécessaires pour l'établissement de l'équation différentielle transformée, (105) du § précédent. Ces valeurs sont, comme on voit :

$$A = \frac{\alpha-\beta}{4} \cdot \frac{1}{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)},$$

$$B = -\frac{\alpha-\beta}{4} \cdot \frac{1}{(m^2+\beta)(n^2+\beta)}.$$

L'équation différentielle (105) transformée de celle

$$(95\,a) \qquad \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = 0$$

est donc

$$(109) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{ \sqrt{-\frac{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}{(m^2+\beta)(n^2+\beta)}} \cdot \frac{\partial B_0}{\partial \alpha} \right\} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{ \sqrt{-\frac{(m^2+\beta)(n^2+\beta)}{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}}\, \frac{\partial B_0}{\partial \beta} \right\}.$$

Cette équation se simplifie beaucoup si, au lieu des variables α, β, on introduit les suivantes :

$$\alpha' = \int_{-n^2}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(m^2+\alpha)\,(n^2+\alpha)}},$$

$$\beta' = \int_{-m^2}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{-(m^2+\beta)\,(n^2+\beta)}};$$

car alors on a :

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} d\alpha' &= \frac{d\alpha}{\sqrt{(m^2+\alpha)\,(n^2+\alpha)}}, \\ d\beta' &= \frac{d\beta}{\sqrt{-(m^2+\beta)\,(n^2+\beta)}}; \end{aligned} \right.$$

et par conséquent aussi

$$(110\,a)\quad \begin{cases} \sqrt{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}\,\dfrac{\partial B_0}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial B_0}{\partial \alpha'}\,; \\ \sqrt{-(m^2+\beta)(n^2+\beta)}\,\dfrac{\partial B_0}{\partial \beta} = \dfrac{\partial B_0}{\partial \beta'}. \end{cases}$$

Et, enfin, l'équation différentielle transformée devient :

$$(111)\qquad \frac{\partial^2 B_0}{\partial \alpha'^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial \beta'^2} = 0\,,$$

ce qui est précisément la forme qu'avait primitivement l'équation en B_0 lorsque les variables étaient x et y (*).

§ 35. — Application à un cylindre creux dont la section transversale est limitée par deux ellipses homofocales.

Nous allons maintenant appliquer les formules qui précédent au cas où la section transversale du cylindre qu'on tord est limitée par deux ellipses ayant les mêmes foyers, et dont les équations sont :

$$\frac{x^2}{m^2+\alpha_1} + \frac{y^2}{n^2+\alpha_1} = 1\,,$$

$$\frac{x^2}{m^2+\alpha_0} + \frac{y^2}{n^2+\alpha_0} = 1\,;$$

de sorte que, pour tous les points du contour extérieur, la variable α prend la valeur constante α_1, et, pour tous les points du contour in-

(*) L'usage que fait Clebsch de ces coordonnées curvilignes pour le cylindre à base d'ellipse est, au § suivant, la détermination de la torsion d'un cylindre creux dont la base est comprise entre deux ellipses ayant le même centre et les mêmes foyers.

MM. Thompson et Tait, dans leur bel ouvrage *A Treatise of natural Philosophy*, 1867, ont montré que le même système de coordonnées, de Lamé, pouvait s'appliquer à la torsion de prismes ayant des bases de formes bien plus variées, telles que des secteurs de cercle de tout angle depuis zéro jusqu'à quatre angles droits, moins ce qu'il faut pour donner place à une petite fente faite suivant le rayon. J'ai, dans deux articles du *Compte rendu*, 2 et 9 décembre 1878 (p. 849 et 893) développé et discuté les simples indications de ces deux savants, et montré que ce qui était relatif aux bases en forme de secteurs pleins ou évidés pouvait se traiter simplement au moyen des coordonnées connues dites semi-polaires ou cylindriques, dont j'avais déjà, en 1857, indiqué quelques usages dans mon Mémoire sur la torsion.

Les résultats de l'application à onze secteurs se trouvent calculés dans les deux notes citées de décembre 1878, et ont été reproduits, ainsi que leur formule générale, en 1879, à la feuille scientifique rédigée à Leipzig par M. le professeur Wiedemann. Nous en avons mentionné, au n° 9 de la note de la fin du § 31, le résultat général.

térieur, elle prend la valeur constante α_0. Nous nous bornerons à la détermination de la fonction B_0 ; d'abord parce que les fonctions B_1, B_2 (§§ 24 à 30) n'ont, sur les formules finales, qu'une faible influence, et ensuite, parce que la méthode employée à la détermination de B_0 pourra être appliquée d'une manière tout à fait analogue pour les autres fonctions.

Cherchons d'abord les conditions aux limites. Que l'on se reporte à l'équation (95) $\frac{\partial B_0}{\partial \nu} = x \sin p - y \cos p$, et que l'on y introduise, pour $\frac{\partial B_0}{\partial \nu}$, cos p, sin p, leurs valeurs données par les équations (105) et (106); qu'ensuite on prenne, dans les équations (108), les valeurs de x et de y applicables au cas actuel; on mettra l'équation (95), qui exprime la condition limite, sous la forme

$$(112) \qquad \frac{\partial B_0}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-(m^2+\beta)(n^2+\beta)}}{\sqrt{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}}.$$

Cette équation doit être satisfaite pour $\alpha = \alpha_0$ et pour $\alpha = \alpha_1$, qui sont les valeurs de α relatives aux contours intérieur et extérieur des sections du cylindre creux. Comme, par l'introduction de ces valeurs, on ne limite en rien la valeur de β, puisque l'équation doit être satisfaite pour chaque point où une hyperbole quelconque β rencontre les ellipses α_0 et α_1, on voit que l'on a de fortes raisons de supposer que la fonction B_0 peut être mise sous la forme

$$(113) \qquad B_0 = K\sqrt{-(m^2+\beta)(n^2+\beta)},$$

où K est une fonction de α seulement. En effet, dans cette hypothèse, l'équation (112) se transforme en la suivante, dont les termes sont entièrement indépendants de β,

$$(114) \qquad \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}},$$

et qui, si l'on y fait successivement $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_0$, donne simplement des relations entre des constantes.

Il faut seulement examiner si la forme (113), prise pour B_0, satisfait à l'équation générale exprimant la condition que B_0 doit remplir en tous les points intérieurs de la section transversale, équation qui,

d'après (109), est exprimée en fonction des variables α et β, par

$$0=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\sqrt{-\frac{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}{(m^2+\beta)(n^2+\beta)}}\frac{\partial B_0}{\partial\alpha}\right\}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\sqrt{-\frac{(m^2+\beta)(n^2+\beta)}{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}}\frac{\partial B_0}{\partial\beta}\right\}.$$

Si on essaye d'introduire dans cette équation l'expression ou forme (113) pour la fonction B_0, on voit que cette forme présente effectivement une solution possible de l'équation, car, en même temps que β disparaît complètement, l'équation exprime directement K et définit la fonction de α, ainsi appelée, par

$$(114\,a)\quad 0=\sqrt{(m^2+\alpha)\ (n^2+\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\left(\sqrt{(m^2+\alpha)(n^2+\alpha)}\frac{dK}{d\alpha}\right)-K.$$

Cette équation se simplifie en remplaçant la variable α par la variable

$$\alpha'=\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{(m^2+\alpha)\ (n^2+\alpha)}}=2\log\frac{\sqrt{m^2+\alpha}+\sqrt{n^2+\alpha}}{\sqrt{m^2-n^2}},$$

déjà employée dans le paragraphe précédent. On a alors :

$$d\alpha'=\frac{d\alpha}{\sqrt{(m^2+\alpha)\ (n^2+\alpha)}};$$

et l'équation (114 a) passe à la forme très simple et très connue

$$\frac{d^2K}{d\alpha'^2}-K=0.$$

On sait que cette équation (et d'ailleurs on peut le vérifier facilement) est satisfaite en posant :

$$K=\mathrm{M}e^{\alpha'}+\mathrm{N}e^{-\alpha'}.$$

M et N désignant des constantes arbitraires.

Si maintenant on désigne par α'_1, α'_0 les valeurs de α' qui correspondent aux valeurs α_1, α_0 de α, on peut mettre l'équation de condition (114) sous la forme

$$\frac{dK}{d\alpha'}=\frac{1}{2};$$

et, en introduisant dans cette équation les valeurs de α' pour les deux courbes limites, on a

$$\mathrm{M}e^{\alpha'_1}-\mathrm{N}e^{-\alpha'_1}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{M}e^{\alpha'_0}-\mathrm{N}e^{-\alpha'_0}=\frac{1}{2};$$

ce qui donne le moyen de déterminer les constantes M et N; car on en tire facilement

$$M = \frac{1}{2} \frac{e^{-\alpha'_0} - e^{-\alpha'_1}}{e^{\alpha'_1 - \alpha'_0} - e^{\alpha'_0 - \alpha'_1}},$$

$$N = \frac{1}{2} \frac{e^{\alpha'_0} - e^{\alpha'_1}}{e^{\alpha'_1 - \alpha'_0} - e^{\alpha'_0 - \alpha'_1}}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de K, l'on obtient :

$$K = \frac{1}{2} \frac{\left(e^{(\alpha' - \alpha'_0)} + e^{-(\alpha' - \alpha'_0)}\right) - \left(e^{(\alpha' - \alpha'_1)} + e^{-(\alpha' - \alpha'_1)}\right)}{e^{(\alpha'_1 - \alpha'_0)} - e^{-(\alpha'_1 - \alpha'_0)}}$$

Si maintenant on remplace α', α'_1, α'_0 par leurs valeurs

$$\alpha' = 2 \log \frac{\sqrt{m^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}}{\sqrt{m^2 - n^2}},$$

$$\alpha'_1 = 2 \log \frac{\sqrt{m^2 + \alpha_1} + \sqrt{n^2 + \alpha_1}}{\sqrt{m^2 - n^2}},$$

$$\alpha'_0 = 2 \log \frac{\sqrt{m^2 + \alpha_0} + \sqrt{n^2 + \alpha_0}}{\sqrt{m^2 - n^2}};$$

ce qui donne

$$e^{\alpha' - \alpha'_0} = \left(\frac{\sqrt{m^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}}{\sqrt{m^2 + \alpha_0} + \sqrt{n^2 + \alpha_0}}\right)^2,$$

$$e^{\alpha' - \alpha'_1} = \left(\frac{\sqrt{m^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}}{\sqrt{m^2 + \alpha_1} + \sqrt{n^2 + \alpha_1}}\right)^2,$$

$$e^{\alpha'_1 - \alpha'_0} = \left(\frac{\sqrt{m^2 \quad \alpha_1} + \sqrt{n^2 + \alpha_1}}{\sqrt{m^2 + \alpha_0} + \sqrt{n^2 + \alpha_0}}\right)^2,$$

on a enfin, après quelques petites réductions,

$$(115)\quad K = \frac{1}{2} \frac{\left(\sqrt{m^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}\right)^4 - \left(\sqrt{m^2 + \alpha_1} + \sqrt{n^2 + \alpha_1}\right)^2 \left(\sqrt{m^2 + \alpha_0} + \sqrt{n^2 + \alpha_0}\right)^2}{\left(\sqrt{m^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}\right)^2 \left\{\left(\sqrt{m^2 + \alpha_1} + \sqrt{n^2 + \alpha_1}\right)^2 + \left(\sqrt{m^2 + \alpha_0} + \sqrt{n^2 + \alpha_0}\right)^2\right\}}.$$

Si donc on pose

$$B_0 = K \sqrt{-(m^2 + \beta)(n^2 + \beta)},$$

on aura satisfait à toutes les conditions du problème.

On pourrait, à cette valeur, ajouter une constante arbitraire; mais B_0, de même que Ω, n'entre que dans l'expression de w, où se trouve

déjà la constante arbitraire c. On peut donc, sans porter préjudice à la généralité de la solution, se dispenser d'ajouter une constante à l'expression de B_0.

Formons maintenant l'intégrale

$$J = \int \left(x \frac{\partial B_0}{\partial y} - y \frac{\partial B_0}{\partial x} \right) d\sigma,$$

de la connaissance de laquelle dépend la détermination de l'angle de torsion. Pour trouver la valeur de cette intégrale, après y avoir remplacé $d\sigma$ par le rectangle $dxdy$, intégrons la première partie sur une bande de largeur dx parallèle à l'axe des y, et dont les extrémités, ainsi que les valeurs correspondantes des fonctions, seront désignées par les indices 1, 0, lorsque la bande coupera seulement la périphérie extérieure. Lorsqu'elle coupera à la fois le contour extérieur et le contour intérieur, on désignera les points extrêmes de l'une des parties par $0'$, 0, ceux de l'autre par $1'$, 1, de sorte que les indices 1. 0 s'appliquent toujours au contour extérieur, et les indices $1'$, $0'$, au contour intérieur. Pour les bandes de la première espèce, l'intégrale du premier terme de J est alors :

$$\int \left\{ (xB_0)_1 - (xB_0)_0 \right\} dx;$$

cette intégrale s'étendant à toutes les bandes qui ne coupent que le contour extérieur. Au contraire, les bandes de l'autre espèce donnent pour l'intégrale de ce même terme :

$$\int \left\{ (xB_0)_1 - (xB_0)_1' + (xB_0)_0' - (xB_0)_0 \right\} dx.$$

Réunissons le premier et le quatrième terme de cette intégrale avec ceux de l'intégrale précédente, nous aurons :

$$\iint x \frac{\partial B_0}{\partial y} dxdy = \int \left\{ (xB_0)_1 - (xB_0)_0 \right\} dx - \int \left\{ (xB_0)_1' - (xB_0)_0' \right\} dx,$$

où la première intégrale du second membre s'étend maintenant à toutes les bandes parallèles à l'axe des y qui rencontrent l'ellipse extérieure, et où la seconde s'étend à toutes les bandes qui rencontrent l'ellipse intérieure.

Désignons par ds_1, ds_0 les éléments interceptés par une bande sur l'ellipse extérieure, et par p_1, p_0 les angles faits avec l'axe des x par les normales à ces éléments, dirigées vers l'extérieur; désignons de

même par ds'_1, ds'_0 les éléments correspondants de l'ellipse intérieure, et par p'_1, p'_0 les angles que font avec l'axe des x les normales à ces éléments dirigées vers l'intérieur; nous aurons alors, comme toujours,

$$dx = ds_1 \sin p_1 = - ds_0 \sin p_0,$$
$$dx' = ds'_1 \sin p'_1 = - ds'_0 \sin p'_0;$$

et par conséquent, si nous étendons les intégrales, non plus à toutes les bandes, mais à tous les éléments des arcs d'ellipse qu'elles interceptent, nous avons

$$\iint x \frac{\partial B_0}{\partial y} dx dy = \int x B_0 \sin p \, ds - \int x B_0 \sin p' \, ds',$$

où ds et ds' représentent respectivement les éléments d'arcs de l'ellipse extérieure et de l'ellipse intérieure, désignés par ds_1, ds_0, et par ds'_1, ds'_0.

On obtient, absolument de la même manière,

$$\iint y \frac{\partial B_0}{\partial x} dx dy = \int y B_0 \cos p \, ds - \int y B_0 \cos p' \, ds',$$

et par conséquent

$$J = \int B_0 (x \sin p - y \cos p) \, ds - \int B_0 (x \sin p' - y \cos p') \, ds'.$$

Reprenons maintenant les formules (104) et (106) du § 33.

Comme l'élément ds appartient à une ellipse pour laquelle α a une valeur constante, on a, pour la valeur de cet élément, d'après l'équation (104) dans laquelle on fait $d\alpha = 0$,

$$ds = d\beta \sqrt{B}.$$

Pour la première intégrale, il faut, dans cette expression, donner à α la valeur α_1, et, pour la seconde, il faut lui donner la valeur α_0. On a ainsi, pour la première partie de J :

$$\int B_0 (x \sin p - y \cos p) \, ds = \int B_0 \sqrt{\frac{A}{B}} \left(x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) d\beta,$$

α_1 étant mis à la place de α dans cette équation.

De la même manière, on amène la seconde partie à prendre cette même forme; seulement α doit être remplacé alors par α_0.

Les intégrales doivent s'étendre à toutes les valeurs possibles de β, c'est-à-dire à tous les éléments d'ellipse qui sont coupés par toutes

les hyperboles possibles. Il y a lieu de remarquer que toutes ces hyperboles coupent un même quadrant de l'ellipse. Si, par conséquent, en donnant à β toutes les valeurs qui lui conviennent et qui, d'après le § 34, sont comprises entre $-m^2$ et $-n^2$, l'on n'étend l'intégrale qu'à un quart d'ellipse, l'on doit multiplier par 4 sa valeur étendue aux limites $-m^2$, $-n^2$, pour que cette intégrale comprenne ce qui est relatif aux quatre quadrants de l'ellipse. Si donc on introduit, dans le second membre de l'équation précédente, la valeur de B_0 tirée de l'équation (108) et des suivantes, ainsi que les valeurs de x, y, A, B, on obtient enfin, pour la valeur de l'intégrale que nous avons appelée J :

$$\mathrm{J} = 2\left\{(K)_1 - (K)_0\right\}\int_{-m^2}^{-n^2}\sqrt{-(m^2+\beta)(n^2+\beta)}\;d\beta,$$

où $(K)_1$ et $(K)_0$ représentent les valeurs de K pour $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_0$. On a alors, d'après (115),

$$(K)_1 = -(K)_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{m^2+\alpha_1}+\sqrt{n^2+\alpha_1}\right)^2 - \left(\sqrt{m^2+\alpha_0}+\sqrt{n^2+\alpha_0}\right)^2}{\left(\sqrt{m^2+\alpha_1}+\sqrt{n^2+\alpha_1}\right)^2 + \left(\sqrt{m^2+\alpha_0}+\sqrt{n^2+\alpha_0}\right)^2}.$$

Si on pose d'un autre côté :

$$\beta = -m^2\cos^2\varphi - n^2\sin^2\varphi,$$

on a

$$\int_{-m^2}^{-n^2}\sqrt{-(m^2+\beta)(n^2+\beta)}\,d\beta = 2(m^2-n^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi(m^2-n^2)^2}{8};$$

de sorte qu'enfin :

$$\mathrm{J} = \frac{\pi(m^2-n^2)^2}{8}\cdot\frac{\left(\sqrt{m^2+\alpha_1}+\sqrt{n^2+\alpha_1}\right)^2 - \left(\sqrt{m^2+\alpha_0}+\sqrt{n^2+\alpha_0}\right)^2}{\left(\sqrt{m^2+\alpha_1}+\sqrt{n^2+\alpha_1}\right)^2 + \left(\sqrt{m^2+\alpha_0}+\sqrt{n^2+\alpha_0}\right)^2}.$$

On obtient facilement les moments d'inertie $\lambda^2\sigma$ et $\varkappa^2\sigma$ en les considérant comme les différences des moments d'inertie d'ellipses pleines. Comme on l'a vu plus haut, pour une ellipse pleine dont les axes sont m et n, les grandeurs λ, $\varkappa$ ont pour valeurs $\frac{m}{2}$, $\frac{n}{2}$, et par suite, on a, pour les moments d'inertie $\lambda^2\sigma = \pi\,\frac{m^3 n}{4}$; $\varkappa^2\sigma = \pi\,\frac{mn^3}{4}$.

Dans le cas actuel, les axes de l'ellipse intérieure sont $\sqrt{m^2+\alpha_1}$, $\sqrt{n^2+\alpha_1}$; ceux de l'ellipse intérieure, $\sqrt{m^2+\alpha_0}$, $\sqrt{n^2+\alpha_0}$; on a donc pour les différences des moments d'inertie de ces deux ellipses, c'est-

à-dire pour les moments d'inertie de la figure annulaire :

$$\lambda^2\sigma = \frac{\pi}{4}\left\{ \sqrt{(m^2+\alpha_1)^3}\,\sqrt{n^2+\alpha_1} - \sqrt{(m^2+\alpha_0)^3}\,\sqrt{n^2+\alpha_0} \right\}$$

$$\varkappa^2\sigma = \frac{\pi}{4}\left\{ \sqrt{m^2+\alpha_1}\,\sqrt{(n^2+\alpha_1)^3} - \sqrt{m^2+\alpha_0}\,\sqrt{(n^2+\alpha_0)^3} \right\}$$

Au moyen de toutes ces valeurs, on peut exprimer enfin l'angle de torsion ou de rotation, $\psi = b_0 l$, de la base libre en fonction du moment de rotation C'. On a en effet, par la formule (87) p. 200 donnant b_0

$$\psi = b_0 l = -\frac{C'l}{G\left\{(\varkappa^2+\lambda^2)\sigma - \int\left(x\frac{\partial B_0}{\partial y} - y\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)d\sigma\right\}}.$$

D'où, en y mettant les valeurs trouvées pour $\varkappa^2\sigma$, $\lambda^2\sigma$ et pour le $\int$ qui est le J calculé tout à l'heure,

$$\frac{\psi}{l} = b_0 = \frac{4C' \quad (^*)}{\pi G\left\{ m_1 n_1 (m_1^2 + n_1^2) - m_0 n_0 (m_0^2 + n_0^2) - \frac{(m^2-n^2)^2}{2}\,\frac{(m_1+n_1)^2 - (m_0+n_0)^2}{(m_1+n_1)^2 + (m_0+n_0)^2} \right\}},$$

où, pour abréger, on a désigné par m_1, n_1 les axes de l'ellipse extérieure, et par m_0, n_0, ceux de l'ellipse intérieure, c'est-à-dire que

$$m_1 = \sqrt{m^2+\alpha_1}\,, \qquad n_1 = \sqrt{n^2+\alpha_1}\,,$$
$$m_0 = \sqrt{m^2+\alpha_0}\,, \qquad n_0 = \sqrt{n^2+\alpha_0}\,. \quad (^{**})$$

(**) **NOTE FINALE DU § 35.**

Cette détermination par Clebsch, au moyen des coordonnées courbes imaginées vers 1856 par Lamé (Surfaces isothermes, tome V des Savants étrangers, ou tome II du *Journal de Liouville*, ou Leçons de 1859 sur les coordonnées curvilignes), de la torsion d'un cylindre creux dont les bases ont pour leurs deux contours, des ellipses ayant les deux mêmes foyers, est intéressante et remarquable. Mais la détermination de la torsion de cylindres creux elliptiques s'opère d'une manière bien plus simple et plus facile, en coordonnées ordinaires, si l'ellipse extérieure et l'ellipse intérieure, au lieu d'être *homofocales*, sont prises *semblables*, c'est-à-dire si entre les demi-axes m_1, n_1

(*) Si l'on fait $n_0 = 0$, ou nul le petit axe de l'ellipse intérieure, son grand axe m_0 subsiste, car la distance des deux foyers reste constante. Aussi, quoique la superficie de cette ellipse s'évanouisse, elle reste comme fente, et il n'est pas étonnant que la formule ne donne pas alors, à la torsion b_0, la valeur qu'elle aurait pour le cylindre *plein* dont la base serait l'ellipse extérieure.

de celle-là, et les demi-axes m_0 n_0 de celle-ci (supposés toujours avoir les mêmes directions) l'on a, au lieu de $m^2_1 - n^2_1 = m^2_0 - n^2_0$,

$$(a)\qquad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_0}{n_0}.$$

Qu'on se reporte, en effet, à l'équation (i) de la grande Note du § 51 :

$$(b)\qquad \theta(x d\mathrm{x} + y d\mathrm{y}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} d\mathrm{x} - \frac{\partial w}{\partial x} d\mathrm{y}\right) = 0.$$

exprimant la condition à laquelle doit satisfaire, aux contours des sections dont $x = \mathrm{x}$, $y = \mathrm{y}$ sont les coordonnées, l'expression en x et y du déplacement longitudinal w des points des sections du prisme tordu, expression astreinte déjà à satisfaire partout à

$$(c)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\ ;$$

l'on verra que, dans le cas particulier du contour elliptique :

$$(d)\qquad \frac{\mathrm{x}^2}{m_1^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{n_1^2} = 1,$$

les deux équations différentielles (b) et (c) seront satisfaites en prenant :

$$(e)\qquad w = \theta\,\frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + n_1^2}\,xy,$$

et en mettant, dans la seconde, pour $d\mathrm{y}$ sa valeur, fournie par l'équation (d)

$$(f)\qquad d\mathrm{y} = -\frac{m_1^2}{n_1^2}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\,d\mathrm{x}.$$

Or, elles seront tout aussi bien satisfaites si l'on substitue des valeurs (e), (f) de w et de $d\mathrm{y}$, avec m_0, n_0 au lieu de m_1, n_1 puisque les rapports $\frac{m^2_1}{n_1^2}$, $\frac{m_0^2}{n_0^2}$ sont égaux.

Donc, l'expression (e) de w satisfait à la fois aux conditions relatives aux deux contours extérieur et intérieur des sections de notre cylindre creux. En la mettant à la place de w dans l'expression (92 a) § 51, du moment de torsion M_z, et en intégrant pour l'étendue σ comprise entre ces deux contours, on a la même chose que si l'on prenait pour M_z la différence entre les valeurs qu'aurait ce moment pour deux cylindres pleins ayant pour bases respectivement le contour extérieur et le contour intérieur du cylindre creux dont on s'occupe, c'est-à-dire :

$$(g)\qquad \mathrm{M}_z = \pi G\theta\left(\frac{m_1^3 n_1^3}{m_1^2 + n_1^2} - \frac{m_0^3 n_0^3}{m_0^2 + n_0^2}\right).$$

expression qui revient à la différence de deux autres comme celle (92 *a*) de — C′, et qui est bien plus simple que ce qu'on tire pour — $C' = M_z$ de la formule de la fin du § 55 actuel.

Observons aussi que le choix, pour le contour intérieur, d'une ellipse homofocale, ne rend pas l'épaisseur du tuyau elliptique, ou cylindre creux, plus uniforme que le choix d'une ellipse semblable à celle du contour extérieur; car si l'on appelle $e = n_1 - n_0$, l'épaisseur dans la direction des petits axes et $\mathrm{e} = m_1 - m_0$, l'épaisseur dans celle des grands, on a le rapport

$$\frac{\mathrm{e}}{e} = \begin{cases} \dfrac{m_1}{n_1} & \text{lorsque les deux ellipses sont semblables ;} \\[2ex] \dfrac{2n_1 - e}{2m_1 - \mathrm{e}} & \text{lorsqu'elles sont homofocales.} \end{cases}$$

Les ellipses n'offrent qu'un cas particulier des contours que l'on peut donner intérieurement et extérieurement à des sections de cylindres creux de manière à avoir des résultats analogues à (*g*).

Tous les contours fermés réprésentés en x, y, par l'équation (*t*) du n° 8 ou (*z*) du n° 9 de la note du § 31, jouissent de la même propriété. Il suffit de donner, à la constante K du second membre de ces équations, deux valeurs différentes quelconques, en conservant le premier membre le même, pour avoir deux courbes limitant les sections d'un prisme creux, de telle sorte que, lorsque ce prisme sera tordu, les plans de ses sections prennent la forme courbe $w = \ldots\ldots$ donnée par l'équation (*u*) et l'équation (*y*) de la même note. Le moment de torsion M_z sera donc donné par l'expression (*v*) ou celle (*a*′) en prenant l'intégrale $\int d\sigma$ pour les éléments superficiels entre les deux contours, ce qui reviendra à calculer ce moment pour le prisme extérieur et pour le prisme intérieur, et à prendre la différence.

Vu la présence obligée, dans le premier membre de l'équation (*t*) ou (*z*), du terme du second degré $\theta\dfrac{x^2+y^2}{2} = \theta\dfrac{r^2}{2}$ qu'aucun choix des constantes c ne peut faire disparaître, deux courbes représentées par cette équation, avec deux valeurs différentes du second membre K ne pourront être des figures *semblables* qu'autant qu'il n'y aura, dans le premier membre que des termes du second degré. L'ellipse est donc la seule courbe susceptible de donner un contour extérieur et un contour intérieur *semblables*.

Si le contour extérieur est un rectangle ou un carré, le contour de l'évidement doit, pour remplir exactement la condition énoncée, être une courbe transcendante. J'en ai, au n° 117 du mémoire cité de 1855, donné l'équation qui est compliquée; mais en faisant observer qu'en général si l'épaisseur d'un prisme creux doit être faible, on peut, en adoptant un contour d'évidement qui rende cette épaisseur constante, prendre approximativement, pour le moment de torsion, la différence de ceux des deux prismes pleins dont les sections auraient les contours extérieur et intérieur ainsi choisis.

§ 36. — Recherche de l'ellipsoïde d'élasticité ou des tensions, aux divers points des prismes tordus. (*)

Nous avons maintenant à rechercher, d'une manière exacte, les tensions qui se produisent à l'intérieur des corps considérés dans les §§ qui précèdent. Pour cela, revenons aux développements du § 6, relatifs à l'ellipsoïde d'élasticité. Si, pour un point quelconque du corps, nous cherchons la direction et la grandeur des tensions principales, la grandeur de ces tensions nous sera donnée par la résolution de l'équation du troisième degré (7) du § 7, page 21, et les directions correspondantes seront déduites des formules (8), p. 22. Dans le cas qui nous occupe, ce problème se simplifie en ce que, pour chaque point, les tensions t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} s'évanouissent. L'équation du troisième degré qui doit donner, pour les valeurs de son inconnue T, les tensions principales, se réduit donc à

$$T^3 - t_{zz} T^2 - (t^2_{xz} + t^2_{yz}) T = 0 .$$

Cette équation contient le facteur T et, par conséquent, admet la racine $T = 0$ qui, conformément aux notations introduites dans les premiers paragraphes, peut être désignée par T'''. Il se présente donc ici le cas particulier traité au § 9, dans lequel, par l'évanouissement d'un axe, l'ellipsoïde d'élasticité se réduit à une ellipse. Au moyen des équations (8), on trouve le plan de cette ellipse, ou plutôt la direction de la normale à ce plan. Introduisons dans ces formules la valeur $T = T''' = 0$, et désignons par p''', q''', r''' les valeurs correspondantes, de p, q, r. Nous aurons tout d'abord, par la troisième équation (8), $m \cos^2 r''' = 0$; et comme $m = - t^2_{yz} - t^2_{zx}$ n'est pas nul, on en conclut :

$$\cos r''' = 0 ;$$

c'est-à-dire que la normale au plan de l'ellipse d'élasticité est perpendiculaire à l'axe des z, ou que ce plan est parallèle à l'axe du cylindre.

(*) Ainsi que nous l'avons dit aux premières lignes de la Note de la fin du § 15, cette considération de l'ellipsoïde *des tensions* n'est guère que curieuse : il faut, comme nous le montrerons à la Note de la fin du § 37, considérer plutôt *l'ellipsoïde* (quelquefois l'hyperboloïde) *des déformations*, ou simplement chercher la grandeur du plus grand demi-axe réel ou rayon vecteur de cette surface, c'est-à-dire *la plus grande des dilatations*, afin de lui imposer une limite fournie par l'expérience pour chaque matière (supposée isotrope), comme condition de sa résistance à la rupture prochaine ou éloignée, ou de sa non énervation même à la longue. (Voyez, à la même Note de ce § 37, une recherche de conditions analogues pour les solides non isotropes.)

Comme $\cos r''' = 0$, on a

$$\cos q''' = \sin p''' ;$$

et $(p''' - 90^\circ)$ désigne l'angle formé par le plan de l'ellipse avec le plan xz. Les autres équations (8) donnent ensuite :

$$m \cos^2 p''' = - \mathrm{t}_{yz}^2 ,$$
$$m \sin^2 p''' = - \mathrm{t}_{xz}^2 ,$$
$$m \sin p''' \cos p''' = \mathrm{t}_{xz}\,\mathrm{t}_{yz} ;$$

équations que l'on peut résumer en la suivante :

$$\operatorname{tang} p''' = - \frac{\mathrm{t}_{xz}}{\mathrm{t}_{yz}},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(p''' - 90^\circ) = \frac{\mathrm{t}_{yz}}{\mathrm{t}_{xz}} .$$

Cette dernière formule, qui détermine l'angle du plan de l'ellipse avec le plan xz, est susceptible d'une interprétation géométrique très simple. Si, à partir du point considéré, on mène les forces t_{zx}, t_{zy} dans leurs propres directions, c'est-à-dire parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y, la résultante $\sqrt{\mathrm{t}_{xz}^2 + \mathrm{t}_{yz}^2}$ des deux forces fait avec l'axe des x l'angle $(p''' - 90^\circ)$. Le plan de l'ellipse est donc déterminé par la direction de cette résultante et par l'axe du cylindre.

Les deux autres tensions principales T′, T″, sont les racines de l'équation du second degré

$$T^2 - \mathrm{t}_{zz} T - (\mathrm{t}_{xz}^2 + \mathrm{t}_{yz}^2) = 0 ;$$

de sorte que

$$(114\,a) \quad \left\{ \begin{aligned} T' &= \frac{\mathrm{t}_{zz}}{2} + \sqrt{\mathrm{t}_{xz}^2 + \mathrm{t}_{yz}^2 + \frac{\mathrm{t}_{zz}^2}{4}} , \\ T'' &= \frac{\mathrm{t}_{zz}}{2} - \sqrt{\mathrm{t}_{xz}^2 + \mathrm{t}_{yz}^2 + \frac{\mathrm{t}_{zz}^2}{4}} . \end{aligned} \right.$$

On voit d'abord que ces deux grandeurs sont toujours de signes contraires, parce que la valeur du radical est plus grande que la valeur absolue de $\frac{\mathrm{t}_{zz}}{2}$. C'est donc le signe du radical qui détermine le signe de la tension principale. Par conséquent, dans l'une des directions principales il se produit toujours une traction T′, et, dans l'autre, une pression T″. Si t_z est positif, c'est-à-dire si, au point considéré, il

existe une traction dans le sens longitudinal, la racine positive est la plus grande ; et, par suite, la plus grande tension principale est une traction. Si, au contraire, t_{zz} est négatif, c'est-à-dire si, au point considéré, il se produit une pression longitudinale, c'est la racine négative qui est la plus grande ; et la plus grande tension principale devient une pression. Dans le premier cas, le corps est exposé à se rompre par déchirement ou disjonction, au point considéré ; dans le second cas, par écrasement (*).

Déterminons maintenant les directions de T′ et de T″. Si l'inconnue T n'est pas nulle, les équations (8) donnent, en se rappelant que $t_{xx}=0$, $t_{yy}=0$, $t_{yx}=0$, et en ayant égard à l'équation trouvée $T^2 - t_{zz}T - (t_{zx}^2 + t_{yz}^2) = 0$, les formules suivantes :

$$m\cos^2 p = T^2 - Tt_{zz} - t_{yz}^2 = t_{zz}^2, \qquad m\cos q\cos r = t_{yz}T,$$
$$m\cos^2 q = T^2 - Tt_{zz} - t_{xz}^2 = t_{yz}^2, \qquad m\cos r\cos p = t_{xz}T,$$
$$m\cos^2 r = T^2; \qquad m\cos p\cos q = t_{xz}t_{yz}.$$

En additionnant les trois équations de gauche, et observant que la somme des carrés des cosinus est égale à l'unité on a :

$$m = t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + T^2;$$

et toutes les équations précédentes sont satisfaites si l'on pose :

$$\cos p = \frac{t_{xz}}{\sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + T^2}}, \quad \cos q = \frac{t_{yz}}{\sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + T^2}}, \quad \cos r = \frac{T}{\sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + T^2}}.$$

Ces équations déterminent la direction de T′ ou de T″ selon qu'on y introduit l'une ou l'autre de ces grandeurs à la place de T. Elles ont également une interprétation géométrique très simple.

Que, par le même point d'où l'on a déjà tiré, parallèlement aux x et aux y, des droites représentant en grandeur les forces t_{zx}, t_{zy}, l'on tire parallèlement aux z une troisième droite représentant, en grandeur, la tension T qui leur correspond, et que l'on compose ensemble ces trois forces ; la direction de leur résultante sera la direction de T. En effet, la grandeur de cette résultante sera

$$m = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + T^2};$$

et comme t_{zx}, t_{zy}, T sont ses projections sur les axes des x, des y, des z,

(*) Voyez à la grande Note de la fin du § 37, la modification essentielle que nous apportons à cette conclusion.

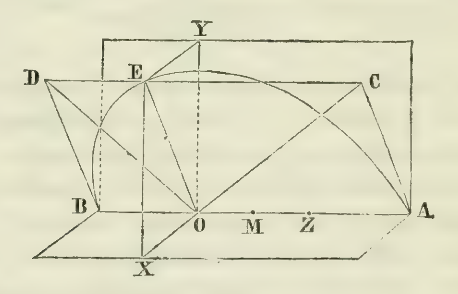
les cosinus des angles formés par sa direction avec ces axes ont pour valeurs

$$\frac{t_{zx}}{m}, \quad \frac{t_{yz}}{m}, \quad \frac{T}{m},$$

c'est-à-dire que, d'après les formules ci-dessus, la résultante forme, avec les axes, les angles p, q, r, et que sa direction coïncide précisément avec celle de la force T.

Les deux tensions T′, T″ déterminent en grandeur et en direction les demi-axes principaux de l'ellipse à laquelle se réduit l'ellipsoïde d'élasticité. Cette ellipse est donc complètement déterminée. On peut résumer, dans la construction géométrique suivante les formules données ci-dessus pour la détermination de cette ellipse.

Par le point considéré O, *on mène trois droites parallèles aux axes coordonnés des* x, *des* y, *des* z, *et l'on porte sur ces droites les longueurs* $OX = t_{xz}$, $OY = t_{yz}$, $OZ = t_{zz}$, *en sorte que ces lignes représentent en grandeur et en direction les tensions qui agissent, au point considéré, sur la section transversale du prisme. On construit ensuite la résultante* $OE = \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2}$ *de* OX *et de* OY ; *on mène le plan* EOZ, *et dans ce plan, on décrit un cercle passant par le point* E *et ayant son centre au milieu* M *de* OZ. *Ce cercle intercepte, sur la ligne* OZ, *des longueurs* OA, OB, *qui représentent les longueurs des tensions principales. Celle* OA *des deux longueurs qui se trouve dirigée dans el sens des* z *positifs est une traction, et l'autre,* OB, *une pression.*



Aux points A et B, *on mène des tangentes au cercle, c'est-à-dire des perpendiculaires à* OZ *dans le plan* EOZ ; *ces lignes* AC, BD, *rencontrent en* C *et en* D *une parallèle à* OZ *menée par le point* E. *Alors* OC *est la direction de la tension principale dont la grandeur est représentée par* OA, *et* OD *la direction de celle dont* OB *représente la grandeur. Si l'on porte, sur ces directions, les grandeurs des tensions principales, on aura la grandeur et la direction des axes principaux de l'ellipse à laquelle se réduit l'ellipsoïde d'élasticité.*

Un cas remarquable est celui où la composante t_{zz} s'évanouit, et où, par conséquent, il n'existe pas, au point considéré, de tension longitudinale. Les points O, Z, M se confondent alors en un seul ; l'ellipse se réduit à un cercle, et les tensions principales, pression et traction, sont égales. Comme on a :

$$t_{zz} = \mathrm{E} \left\{ (a + a_1 x + a_2 y) + z\,(b_1 x + b_2 y) \right\}, \qquad (^*)$$

tous les points dont nous nous occupons en ce moment, pour lesquels on a, en outre, $t_{zz} = 0$, se trouvent sur la surface du second ordre :

$$a + a_1 x + a_2 y + z\,(b_1 x + b_2 y) = 0.$$

Lorsque, dans cette équation, on fait z constant, elle devient l'équation d'un plan ; en d'autres termes, la surface qu'elle représente est coupée par chaque section transversale ($z =$ constante) suivant une ligne droite. Cette surface est donc un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices sont parallèles aux sections transversales, ou perpendiculaires à l'axe du cylindre.

Lorsqu'il ne se produit dans la tige qu'une torsion, t_{zz} est nul partout ; et, alors, ce ne sont pas seulement les points d'une surface déterminée, mais tous les points du corps, qui présentent cette particularité. Au contraire, dans le cas d'une extension simple, t_{zz} est constant, et il ne se trouve, dans le corps, aucun point de cette espèce.

§ 37. — Limites de la grandeur des forces extérieures qu'on fait agir sur les solides.

La plus grande tension, en chaque point des solides prismatiques, supposés sollicités comme on a dit, est, ainsi qu'on vient de voir au § 36, p. 244, représentée par

(115) la somme des valeurs absolues de $\dfrac{t_{zz}}{2}$ et de $\sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2 + \dfrac{t_{zz}^2}{4}}$.

Pour fixer les limites dans lesquelles doivent rester les forces exté-

---

(*) Cette expression est l'une des trois dernières des formules (65) du § 23, p. 150, en y faisant nulle, comme on a vu, la constante b (§ 24. p. 156). Elle est, comme on a vu aussi, une conséquence de l'expression (65 a) page 147, $\frac{\partial w}{\partial z} = (a + a_1 x + a_2 y) + z\,(b + b_1 x + b_2 y)$ de la dilatation longitudinale de toute fibre, résultant cinématiquement de la nullité de ses quatre quotients différentiels $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

rieures agissant sur une pièce solide, on n'a qu'à déterminer la plus grande valeur que puisse atteindre, à l'intérieur, la somme ainsi énoncée, et à faire en sorte que ce maximum ne dépasse, nulle part, une limite que l'on s'est imposée pour la tension de la matière de cette pièce, limite qu'on peut représenter par T. (*) En ce qui concerne le point où cette somme atteindra son maximum, on peut d'abord considérer que ce point ne peut être situé que dans une section transversale d'extrémité du prisme. En effet, t_{xz} et t_{yz}, ne renferment pas, en général, la coordonnée z, et t_{zz} seule la contient à la première puissance. Le point d'une fibre déterminée où cette somme atteindra son maximum sera donc le point où t_{zz} elle-même aura sa valeur la plus grande; et comme t_{zz} est de la forme $p+qz$, sa plus grande valeur coïncidera avec la plus grande ou avec la plus petite des valeurs de z; c'est-à-dire qu'elle se produira en un point d'une des deux sections transversales extrêmes. Quant à la position de ce point sur la surface de la section, elle dépend de la fonction Ω, c'est-à-dire de la forme généralement courbe que prend cette section transversale primitivement plane.

Il n'y a d'exception que dans le cas où b_1 et b_2 s'évanouissent, ce qui se produit toujours lorsque A et B sont nuls, c'est-à-dire lorsque la résultante des forces extérieures agit perpendiculairement à la surface d'extrémité libre. Dans ce cas, qui peut se présenter non seulement lorsqu'il n'y a qu'extension, mais, quelquefois encore, quand il y a torsion ou flexion produites par de simples couples, t_{zz} est indépendante de z. Chaque fibre est alors tendue uniformément dans toute sa longueur; on peut encore parler d'une fibre plus fortement tendue que les autres, mais non d'un point d'une fibre où la tension y serait plus forte qu'en tous les autres points. La limite au delà de laquelle la contexture élastique s'altérerait, est alors vraisemblablement la même pour tous les points de cette fibre où la tension se trouve être plus forte.

A cette circonstance que t_{zz} seule contient la coordonnée z, se joint celle-ci, que c'est seulement dans l'expression de t_{zz} que se trouve la longueur l de la tige. Cette longueur l n'entre dans l'expression de la composante longitudinale de la tension que lorsque celle-ci vient d'une flexion produite par des forces ne faisant pas couples. Ainsi, l se trouve

---

(*) Voir, à la grande Note de la fin du présent § 37, l'exposition et les applications d'une manière plus rationnelle de limiter les forces extérieures, ou de poser les conditions de résistance permanente des corps à leur action prolongée. (Elle consiste, comme on dira, dans le cas où le corps est isotrope, à limiter les proportions des ***dilatations***, plutôt que les intensités des ***tensions*** ou ***pressions***.)

engagé dans les formules (89) p. 201, relatives à la flexion, d'une manière telle que la section dangereuse est reconnue répondre à $z = 0$. Or, en général, la longueur l de la tige est très grande par rapport à ses dimensions transversales dont les autres tensions dépendent. Donc, t_{zz} l'emporte sur ces autres tensions, dans tous les cas qui correspondent à une flexion de cette nature. Si, de plus, le moment C', qui tend à tordre, n'est pas extraordinairement grand, et s'il y a une flexion quelconque produite par des couples de forces; si, par conséquent, les moments de rotation ne sont pas considérables par rapport aux forces qui agissent perpendiculairement à l'axe de la tige, t_{zz} sera toujours prédominante, comparée aux autres tensions, au moins dans les fibres de la section transversale dangereuse, où cette tension est la plus grande; et cette prédominance permettra de remplacer, avec une grande approximation, la tension principale T par cette tension t_{zz}. Il devient alors très facile de déterminer l'emplacement du point où la tension est la plus forte.

D'abord, les formules générales (65) p. 150, donnent, en y annulant b [comme on a dit formule (70 a) p. 156] et en exprimant [formules (86) p. 194] les autres coefficients, a, a_1, a_2, b_1, b_2, en fonction des trois sommes A, B, C de composantes des forces extérieures, ainsi que des deux sommes A', B' de moments tendant à fléchir autour de parallèles aux x et aux y,

$$(116) \qquad t_{zz} = \frac{\left(C - \frac{B'x}{\lambda^2} + \frac{A'y}{\varkappa^2}\right) + z\left(\frac{Ax}{\lambda^2} + \frac{By}{\varkappa^2}\right)}{\sigma}.$$

Je vais traiter seulement le cas spécial où les résultantes de forces A, B, C passent au centre de gravité de la surface extrême libre, sans y ajouter aucun couple; le cas général pourrait être traité tout à fait de la même manière. Dans cette hypothèse on a

$$B' = Al, \quad A' = -Bl, \quad \text{et} \quad t_{zz} = \frac{C - (l - z)\left(\frac{Ax}{\lambda^2} + \frac{By}{\varkappa^2}\right)}{\sigma}.$$

D'après ce qui précède, le point où s'exerce la plus forte tension se trouve dans la section $z = l$ ou dans la section $z = 0$. On voit aisément que, pour le cas où nous sommes, il se trouve dans celle $z = 0$; car dans la section $z = l$, on a en tous les points :

$$t_{zz} = \frac{C}{\sigma};$$

tandis que dans la section $z=0$, on a

$$t_{zz}=\frac{C-l\left(\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}\right)}{\sigma},$$

où le second terme du numérateur peut avoir des valeurs de même signe que le premier terme C; car si on se représente la section transversale divisée en deux par la droite

$$\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}=0,$$

le binôme $\left(\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}\right)$ est manifestement positif pour tous les points de la section situés d'un côté de cette ligne, et négatif pour ceux de l'autre côté. Du côté où cette expression aura un signe contraire à C, la valeur absolue de t_{zz} est plus grande que celle de $\frac{C}{\sigma}$, et par conséquent, la plus grande tension ne se trouve pas dans la section $z=l$. Pour trouver, dans la section $z=0$, le point où s'exerce la plus forte tension, il faut chercher d'abord les points pour lesquels l'expression $\left(\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}\right)$ est la plus grande et comparer entre elles les tensions dans ces points, ce qui conduit manifestement à la règle suivante :

Mener, dans la section transversale d'extrémité fixe, des tangentes parallèles à la ligne

$$\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}=0,$$

et comparer les tensions aux points de contact. Celui des points de contact où la tension sera plus forte qu'aux autres sera le point le plus tendu (ou le plus pressé) du corps considéré. La tension maximum en ce point donnera donc la tension maximum dans le même corps.

Ce problème devient, également, assez simple lorsqu'il ne se produit qu'une torsion. Il s'agit alors de chercher la *fibre* la plus tendue. Ce sera celle où s'exercera le maximum de

$$\sqrt{t_{xz}^2+t_{yz}^2};$$

expression où entrent seulement x et y. Prenons comme exemple le cas, traité ci-dessus, d'un cylindre elliptique tordu. D'après les formules (92), page 208, on a, m et n étant les demi-axes principaux de

sa base, σ l'aire de sa section, et C' le moment des forces qui font tordre,

$$\sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2} = \frac{2C'}{\sigma}\sqrt{\frac{x^2}{m^4} + \frac{y^2}{n^4}}.$$

Par la forme de cette expression, on reconnaît que la tension croît si on fait croître x et y dans un même rapport, c'est-à-dire si, en partant du centre, on se dirige en ligne droite vers la circonférence. La fibre la plus tendue se trouve donc nécessairement sur la périphérie. Or, d'après une propriété connue de l'ellipse, on peut, pour les points de sa circonférence, poser

$$x = m\cos\varphi, \qquad y = n\sin\varphi;$$

car en substituant dans l'équation $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ de cette circonférence, on a l'identité $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Il faut donc chercher le maximum de

$$\frac{x^2}{m^4} + \frac{y^2}{n^4} = \frac{\cos^2\varphi}{m^2} + \frac{\sin^2\varphi}{n^2}.$$

La différentiation, effectuée pour l'obtenir, donne

$$\cos\varphi \sin\varphi = 0.$$

La fibre cherchée ne peut donc se trouver qu'à l'extrémité du grand axe ($\sin\varphi = 0$) ou du petit axe ($\cos\varphi = 0$). Dans le premier cas, la valeur de l'expression ci-dessus est $\frac{1}{m^2}$, et dans le second $\frac{1}{n^2}$; par conséquent, comme on a supposé d'avance $m > n$, c'est dans ce second cas que l'expression atteint sa plus grande valeur. La fibre la plus tendue se trouve donc à l'extrémité du petit axe de l'ellipse (*), et la tension maximum a pour valeur, vu $\sigma = \pi mn$,

$$\frac{2C'm}{n^2\sigma} = \frac{2C'}{\pi n^3};$$

de sorte que la sécurité de la tige est assurée si cette grandeur ne dépasse pas la tension maximum que l'on s'est imposée à l'avance.

(*) Cette conclusion est juste lorsque la matière est isotrope, comme le suppose l'auteur, ou seulement lorsqu'elle a la même contexture dans tous les sens transversaux; car, ainsi que cela a été reconnu pour la première fois, au Mémoire sur la torsion, de 1853, cité ci-dessus, c'est bien aux extrémités du petit axe de l'ellipse qu'a lieu le *plus grand glissement*, et, par suite, dans une certaine direction oblique, la plus grande dilatation.

Dans la recherche de la tension maximum, qui vient d'être opérée, on n'a fait aucune distinction entre les tensions positives et les tensions négatives. En fait, d'après les principes que l'on a appliqués, et dans l'étendue des limites convenues, la même force produit le même déplacement, que cette force agisse comme traction ou comme pression. Tel n'est plus le cas lorsqu'on s'approche de la limite d'élasticité ou qu'on la dépasse. Mais comme, en général, dans la pratique, cette limite ne peut pas, à beaucoup près, être atteinte sans danger, la tension maximum imposée par les conditions de sécurité se trouvera toujours de beaucoup en deçà de la limite à partir de laquelle il se produit une différence notable dans les actions proportionnelles d'une force de traction et d'une force de pression. Comme mesure de la limite des tensions et pressions permises, on ne peut employer les chiffres qui correspondent à l'écrasement et à la rupture, car ces nombres s'appliquent évidemment à des tensions ou pressions fort au delà des limites à adopter; mais puisque ces tensions ou pressions ne doivent évidemment pas être atteintes, on a pris certaines fractions de celles qui, d'après l'expérience, produisent la rupture, et c'est par ces fractions que l'on a exprimé la limite des tensions permises. On a obtenu ainsi une série de nombres dont quelques-uns ne sont en connexion que d'une manière très vague, ou même sans aucune connexion, avec la réalité des choses : et l'on s'est arrêté à un nombre réel unique, dont l'emploi, dans les calculs de résistance, donnât l'assurance d'éviter ce qui peut compromettre la stabilité des constructions. Si l'on imagine, pour chaque espèce déterminée de matériaux, une certaine tension maximum, fixée conformément à l'expérience, et qui ne peut être dépassée sans danger, il arrive, à cause des étroites limites dans lesquelles doivent être maintenus les déplacements, que ce nombre peut être pris le même pour la pression et pour la traction. C'est cette hypothèse que nous avons faite précédemment et que nous conserverons dans la suite (*).

(*) **NOTE FINALE DU § 37.**

1. *Conditions de résistance permanente des solides à la rupture, à établir en limitant leurs dilatations, plutôt que leurs tensions intérieures.* — Le problème de la résistance des solides (origine principale, dit Lamé, de la théorie de leur élasticité) est de déterminer les plus grandes intensités des forces extérieures qu'on peut leur appliquer en divers endroits et suivant diverses directions, sans crainte qu'elles les rompent, soit immédiatement

ou prochainement, soit à la longue, en les énervant ou détruisant peu à peu leur cohésion. Il a donc été naturel, dans le principe, de chercher, pour résoudre ce problème, à imposer une limite aux plus grandes des *tensions interieures* que cette application de forces extérieures produit.

Et c'est ce que fait Clebsch, dans tout le présent § 37.

Mais, dès 1682, Mariotte (*Traité du mouvement des eaux*, 5e partie, 6e et 13e alinéa du second Discours) posait un principe plus vrai, à savoir « que les parties *étendues* ne rompent que parce que leur *extension* vient à dépasser une *certaine proportion* ; » et, en effet, les molécules ne se séparent tout à fait les unes des autres, ou ne passent à d'autres arrangements, que parce qu'en les écartant à un certain degré, on a beaucoup diminué l'intensité des attractions qui les tenaient unies; et c'est, même, en tant que les tensions étendent ou dilatent, qu'elles mettent la cohésion en péril.

De là une deuxième manière plus rationnelle de poser en équation le problème de la résistance à la rupture prochaine ou éloignée, et qui consiste à limiter la plus grande *des dilatations* qui ont lieu en divers points et en divers sens, au lieu de limiter les tensions intérieures.

Ces deux manières donnent les mêmes résultats et peuvent être employées indifféremment l'une ou l'autre dans les cas où les solides, de forme allongée, ne sont que fléchis en même temps que tirés ou pressés dans le sens de leur longueur, leurs faces latérales étant libres, de sorte que chaque *fibre* s'allonge ou s'accourcit comme un prisme isolé; et les plus grandes dilatations restent, partout, proportionnelles aux plus grandes tensions de mêmes directions.

Mais il n'en est plus de même, et les équations que fournissent ces deux manières d'opérer sont très différentes, quand il y a (comme on verra) des torsions, ou des glissements transversaux et longitudinaux; et même, déjà comme je l'ai montré en 1838 par des exemples (Cours lithographié de l'École des ponts et chaussées), lorsqu'il y a simplement des tractions dans plusieurs sens à la fois. Ainsi, que l'on imagine trois solides parallélépipèdes rectangles tirés sur leurs faces normalement, le premier sur toutes les six, le second sur quatre, opposées deux à deux, et le troisième sur deux seulement, aussi opposées, ces tractions étant uniformément distribuées, et toutes de même intensité par unité superficielle : l'application des trois formules d'isotropie de la fin du § 16, en y faisant successivement, $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz}$; $t_{xx} = t_{zz}$ avec $t_{yy} = 0$; et $t_{xx} = 0$, $t_{yy} = 0$, montrera facilement que, *pour une même plus grande tension*, la plus grande dilatation, celle du sens z, sera, dans le second solide, *une fois et demie*, et dans le troisième, *deux fois* ce qu'elle sera dans le premier des trois; en sorte que ceux-là seront une et demie et deux fois plus en danger de rompre, par l'effet naturel de l'écartement de leurs molécules, que celui-ci, bien que la force de tension intérieure la plus grande soit la même pour tous trois.

Aussi Poncelet, dans un Cours de 1839, où il a bien voulu citer le mien de 1837, a conseillé de préférer definitivement la seconde manière, celle qui impose, aux *dilatations* éprouvées, une *limite*, la même en tous sens dans

les corps isotropes, et *pouvant varier d'une direction à l'autre* dans ceux qui ne le sont pas.

Cherchons à établir en conséquence les équations de *cohésion permanente* des solides, ou de condition de leur résistance à la rupture, sous l'action *prolongée* de forces quelconques; et, pour cela, cherchons d'abord les expressions des dilatations, afin de les maintenir, en tous sens, dans de petites limites.

2. *Expression de la dilatation dans une direction quelconque r, en un point d'un solide, en fonction des dilatations et glissements qui ont lieu en ce point parallèlement à trois axes rectangulaires des x, y, z.* — Appelons

$$\partial_r$$

la proportion de cette dilatation d'une ligne r, et

$$c_x, \quad c_y, \quad c_z$$

les cosinus des angles que cette ligne fait avec les coordonnées rectangles x, y, z. Nous avons trouvé, au n° 19 de la Note du § 16 (où cette même quantité était appelée $\partial_{z\prime}$) :

$$(a) \qquad \partial_r = \partial_x c_x^2 + \partial_y c_y^2 + \partial_z c_z^2 + g_{yz} c_y c_z + g_{zx} c_z c_x + g_{xy} c_x c_y .$$

On démontre souvent cette expression d'une manière tout analytique, comme a fait Navier qui l'a donnée le premier, en supposant très petits les déplacements éprouvés par tous les points du corps. D'après la manière géométrique dont nous l'avons démontrée à la Note citée, en regardant $(1+\partial_r)$ comme la diagonale d'un parallélépipède rectangle devenu obliquangle, dont les côtés, primitivement égaux à c_x, c_y, c_z, sont devenus $c_x(1+\partial_x)$, $c_y(1+\partial_y)$, $c_z(1+\partial_z)$ et font maintenant les uns avec les autres des angles légèrement aigus qui ont g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} pour cosinus, l'on reconnaît que cette expression (a) subsiste quelle que soit la grandeur absolue de ces déplacements des points, pourvu que les six déformations élémentaires ∂, g, à l'endroit du corps solide que l'on considère, soient assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et produits deux à deux.

3. *Dilatations principales. — Équivalence d'un glissement à une dilatation et à une contraction dans des directions inclinées à la sienne.* — Cherchons la plus grande et la plus petite valeur de l'expression (a) de ∂_r en égalant à zéro sa différentielle complète par rapport aux trois cosinus, nous aurons :

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & (2\partial_x c_x + g_{xy} c_y + g_{zx} c_z)\, dc_x , \\ & + (g_{xy} c_x + 2\partial_y c_y + g_{yz} c_z)\, dc_y , \\ & + (g_{xz} c_x + g_{yz} c_y + 2\partial_z c_z)\, dc_z ; \end{aligned} \right.$$

Éliminant une des trois différentielles au moyen de $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$, qui donne $dc_z = \dfrac{-c_x dc_x - c_y dc_y}{c_z}$, et égalant à zéro ce qui affecte séparément chacune des deux autres, on a deux équations, qui reviennent à l'égalité de ces trois fractions :

$$(c)\quad \frac{2\partial_x c_x + g_{xy} c_y + g_{zx} c_z}{c_x} = \frac{g_{xy} c_x + 2\partial_y c_y + g_{yz} c_z}{c_y} = \frac{g_{zx} c_x + g_{zy} c_y + 2\partial_z c_z}{c_z}.$$

Or on composera évidemment une quatrième fraction de même valeur que ces trois-là, en prenant pour son numérateur la somme de leurs numérateurs, et pour son dénominateur la somme de leurs dénominateurs après les avoir multipliées haut et bas, la première par c_x, la seconde par c_y, la troisième par c_z. Or il en résulte 1 pour le dénominateur, et $2\,\partial_r$, d'après (a), pour le numérateur : ces trois fractions sont donc égales à $2\,\partial$, en appelant

$$\partial$$

le maximum cherché de ∂_r. Il en résulte :

$$(d)\quad \left\{ \begin{aligned} 2(\partial - \partial_x)c_x &= g_{xy}c_y + g_{zx}c_z\ , \\ 2(\partial - \partial_y)c_y &= g_{yz}c_z + g_{xy}c_x\ , \\ 2(\partial - \partial_z)c_z &= g_{zx}c_x + g_{yz}c_y\ . \end{aligned} \right.$$

On élimine les cosinus, de ces trois équations, en les multipliant toutes trois ensemble, et en remplaçant ensuite, dans les termes tels que $g^2_{yz}\, c_y\, c_z\, (g_{yz}\, c_y + g_{zx}\, c_z)$, où un glissement entre au carré, la parenthèse, qui n'est autre chose qu'un des seconds membres des (d), par le premier membre correspondant, ce qui rend tous les termes divisibles par $2\, c_x\, c_y\, c_z$. Il en résulte l'équation du troisième degré en ∂

$$(e)\quad 4(\partial-\partial_x)(\partial-\partial_y)(\partial-\partial_z) - g^2_{yz}(\partial-\partial_x) - g^2_{zx}(\partial-\partial_y) - g^2_{xy}(\partial-\partial_z) - g_{yz}g_{zx}g_{xy} = 0,$$

équation dont on aurait pu aussi obtenir le premier membre en remarquant que, pour que les trois équations du premier degré (d) en c_x, c_y, c_z soient compatibles entre elles, il faut, si l'on tire à la manière ordinaire les valeurs de leurs inconnues (valeurs indéterminées puisque ces équations ne donnent que leurs rapports), que le dénominateur commun soit nul, les trois numérateurs l'étant ; en sorte que le déterminant formé avec les neuf coefficients doit être égal à zéro.

Si les trois dilatations sont nulles, ainsi qu'un glissement, ou si

$$\partial_x = 0\ ,\qquad \partial_y = 0\ ,\qquad \partial_z = 0\ ,\qquad g_{xy} = 0\ ,$$

et si l'on fait

$$(f)\qquad \sqrt{g^2_{zx} + g^2_{zy}} = g\ ;$$

c'est-à-dire si l'on appelle g le *glissement principal* ou *résultant* de g_{zx}, g_{zy}, le plus grand de ceux qui ont lieu sur une face ou section perpendiculaire aux z, les trois racines de celte équation (e) sont :

$$(g) \qquad \partial = 0\ , \quad \partial = \frac{g}{2}\ , \quad \partial = -\frac{g}{2}\ ;$$

et alors, les équations (d) combinées avec

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1\ ,$$

donnent, pour déterminer les directions de la plus grande et de la plus petite valeur $\frac{g}{2}$, $-\frac{g}{2}$ de ∂,

$$c_z^2 = \frac{1}{2}\ , \quad c_x^2 = \frac{g_{zx}^2}{2g^2}\ , \quad c_y^2 = \frac{g_{zy}^2}{2g^2}\ ,$$

On voit que les projections, sur le plan xy des deux glissements, des directions de ces deux dilatations principales, dont l'une est négative, sont la direction même du glissement résultant g, et son prolongement, avec lesquels elles forment un angle demi-droit.

Ainsi un glissement g équivaut à une dilatation et à une contraction moitié moindres, $\frac{g}{2}$, dans des directions à 45 degrés sur la sienne.

On le démontre, au reste, géométriquement et élémentairement, en remarquant que si l'on a un carré dont les côtés sont $= 1$, et si, l'un d'eux restant immobile, le côté opposé glisse devant lui d'une très petite quantité g dans sa direction propre, l'une de ses diagonales $= \sqrt{2}$ s'allongera, et l'autre s'accourcira, de $\frac{g}{2}\sqrt{2}$.

Les équations (d), (e), purement géométriques ou cinématiques, sont vraies pour des corps de contexture quelconque, et nous pourrions en tirer ici d'autres conséquences générales. Mais en tant que susceptibles de fournir les conditions de résistance, ces équations ne peuvent servir que pour les corps isotropes, où il suffit d'imposer aux plus grandes dilatations une limite, la même en tous sens. Établissons-en donc, de suite, d'analogues, dont sous ce rapport celles-ci n'offrent qu'un cas particulier, ou considérons, de la manière la plus générale, un corps *hétérotrope* dont la contexture, et le danger de rompre, varient d'une direction à l'autre autour de chacun de ses points, bien que sa matière soit supposée homogène, ou d'égale nature dans toutes ses parties.

4. *Établissement d'une équation du troisième degré propre à fournir, pour les corps non isotropes, les plus grandes valeurs du rapport entre les dilatations dans diverses directions pour chaque point, et les limites à leur imposer, rela-*

tives à ces directions. — Dans ces corps, il ne s'agit pas de rendre la plus grande dilatation égale ou inférieure à une limite déterminée et constante, car la limite des dilatations non dangereuses varie avec leur direction. Ainsi, pour les bois, il faut un moindre écartement moléculaire dans le sens transversal que dans le sens longitudinal pour déterminer la désagrégation des parties. Il faut donc imposer la condition que dans aucune direction r, la dilatation ∂_r n'excède la limite relative *à cette direction*, limite que nous appellerons

$$\delta_r .$$

Comme on ne peut guère déterminer par expérience ces limites que pour quelques directions principales, nous leur attribuerons une loi de distribution continue et symétrique autour de la plus grande et de la plus petite d'entre elles, supposées de directions perpendiculaires l'une à l'autre. En prenant ces directions pour deux des axes rectangulaires des x, y, z, et en appelant δ_x, δ_y, δ_z les limites à imposer aux dilatations dans les directions de ces axes, nous prendrons ainsi

$$(h) \qquad \delta_r = \delta_x c_x^2 + \delta_y c_y^2 + \delta_z c_z^2 ;$$

ou nous supposerons, aux limites δ des dilatations, une distribution ellipsoïdale comme est celle des dilatations ∂_r elles-mêmes, ce qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité, d'après l'expression (a) de celles-ci, expression qui se réduit à un trinôme semblable à (h) quand les axes ont les directions des trois dilatations principales.

La condition de la stabilité de la cohésion sera qu'en aucun point le maximum du rapport de ∂_r à δ_r, pour les diverses directions autour de ce point n'excède l'unité. Cherchons donc, pour un point quelconque, ce maximum, afin d'astreindre ensuite, à la condition énoncée, la plus grande des valeurs qu'il aura aux divers points du corps. Pour que $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ soit un maximum, en un point particulier quelconque, il faut qu'on y ait :

$$(i) \qquad d\frac{\partial_r}{\delta_r} = 0 \quad \text{ou} \quad d\partial_r - \frac{\partial_r}{\delta_r} d\delta_r = 0 .$$

Mettant dans cette équation, pour $d\partial_r$ et $d\delta_r$ les valeurs que donne la différentiation de (a) et de (e) par rapport aux trois cosinus c qui déterminent la direction r, en regardant les ∂_x, ∂_y... g_{xy} comme constants puisqu'il s'agit d'un seul point du corps dont ils mesurent les petites déformations, et écrivant ensuite simplement, au lieu de ∂_r et δ_r

$$\partial \quad \text{et} \quad \delta$$

supposées désigner les valeurs de ∂_r, δ_r relatives à la direction inconnue r,

où la condition (i) de maximum est satisfaite, on aura une équation

$$(j)\quad \left\{\begin{aligned} & A dc_x + B dc_y + C dc_z = 0, \\ \text{où l'on a}\quad & A = 2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_x - \partial_x\right)c_x - (g_{xy}c_y + g_{zx}c_z), \\ & B = 2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_y - \partial_y\right)c_y - (g_{yz}c_z + g_{xy}c_x), \\ & C = 2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_z - \partial_z\right)c_z - (g_{zx}c_x + g_{zy}c_y). \end{aligned}\right.$$

Éliminant de cette équation (j) l'un des trois dc, comme nous avons fait pour celle (b) du cas d'isotropie, et égalant ensuite à zéro ce qui multiplie séparément les deux autres, on a

$$\frac{A}{c_x} = \frac{B}{c_y} = \frac{C}{c_z},$$

d'où

$$\frac{Ac_x}{c_x^2} = \frac{Bc_y}{c_y^2} = \frac{Cc_z}{c_z^2} = \frac{Ac_x + Bc_y + Cc_z}{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

Or le dénominateur de la quatrième des fractions ainsi écrites, composée avec les sommes respectives des termes des trois autres, est $= 1$. Son numérateur, d'après la composition (a), (h), de ∂_r, δ_r, revient à $2\frac{\partial}{\delta}\delta_r - 2\partial_r$ qui est $= 0$ lorsque $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ a sa valeur maximum $\frac{\partial}{\delta}$. On a donc

$$(k)\qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

ou trois équations, dont on élimine immédiatement les trois cosinus en opérant comme nous avons fait pour les trois (d).

Il en résulte l'équation du troisième degré suivante en $\frac{\partial}{\delta}$:

$$(l)\qquad \begin{aligned} & 4\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_x - \partial_x\right)\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_y - \partial_y\right)\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_z - \partial_z\right) - \\ & - g_{yz}^2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_x - \partial_x\right) - g_{zx}^2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_y - \partial_y\right) - g_{xy}^2\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_z - \partial_z\right) - g_{yz}g_{zx}g_{xy} = 0, \end{aligned}$$

qu'on aurait pu poser aussi comme condition de compatibilité des trois équations du premier degré (k) en c_x, c_y, c_z à seconds membres nuls, ainsi qu'il a été dit pour celles (d).

On donne à l'équation (l) une autre forme, en remarquant d'abord que, dans le cas où les dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z, dans le sens des axes, sont nulles,

ainsi que deux des glissements g_{yx}, g_{xz}, elle se réduit à

$$(l_1) \qquad \frac{\partial}{\delta} = \frac{g_{yz}}{2\sqrt{\delta_y \delta_z}}\,;$$

d'où l'on voit que, comme δ_x est la limite supérieure de la dilatation ∂_x, $2\sqrt{\delta_y\,\delta_z}$ est la limite supérieure du glissement g_{yz} qui, *lorsqu'il est seul*, ne peut la dépasser sans mettre la cohésion en péril. Nous disons lorsqu'il est *seul*, c'est-à-dire lorsqu'il est, au point (x, y, z), la seule des six déformations élémentaires orthogonales ∂, g qui ait lieu dans les directions rectangulaires x, y, z; directions qui sont supposées, d'après l'expression (h) adoptée pour δ_r, celles des limites *principales* δ des dilatations, et dont deux, avons-nous dit, sont celles de la plus grande et de la plus petite d'entre elles. Et en effet, s'il y avait, en même temps que g_{yz}, par exemple une forte contraction $-\partial_z$, produisant avec g_{yz} une dilatation positive résultante ∂_r, au-dessous du δ_r de même direction, g_{yz} pourrait dépasser $2\sqrt{\delta_y\,\delta_z}$; la restriction que nous avons énoncée était donc, pour la rigueur, nécessaire.

Cette limite (l_1), ainsi que celles de même genre à imposer à g_{zx}, g_{xy} s'ils étaient *seuls* aussi, aurait pu être déduite d'expériences directes de rupture par glissement ou cisaillement, de même que les limites δ_x, δ_y, δ_z des dilatations sont supposées des résultats (prudemment réduits aussi dans une certaine proportion) d'expériences de rupture par dilatation. Si nous représentons de la manière suivante ces trois nouvelles limites :

$$(m) \qquad 2\sqrt{\delta_y \delta_z} = \gamma_{yz}, \quad 2\sqrt{\delta_z \delta_x} = \gamma_{zx}, \quad 2\sqrt{\delta_x \delta_y} = \gamma_{xy},$$

l'équation (l) divisée par $\delta_x\ \delta_y\ \delta_z$ fournit celle-ci :

$$(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}\right) - \\ -\frac{g^2_{yz}}{\gamma^2_{yz}}\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right) - \frac{g^2_{zx}}{\gamma^2_{zx}}\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) - \frac{g^2_{xy}}{\gamma^2_{xy}}\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}\right) - 2\frac{g_{yz}}{\gamma_{yz}}\frac{g_{zx}}{\gamma_{zx}}\frac{g_{xy}}{\gamma_{xy}} = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation (n) (donnée en 1854 aux n°s 24 et 121 du mémoire sur la torsion) me paraît embrasser le cas le plus général de contexture des solides, et être encore susceptible d'emploi si, par suite des expériences de glissement, ou des inductions tirées de la considération d'édifices ou de machines dont les pièces sont exposées aux efforts qui en produisent, les constructeurs se déterminent à adopter pour les limites γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}, qui y entrent, des valeurs un peu différentes de celles $2\sqrt{\delta_y\,\delta_z}$, $2\sqrt{\delta_z\,\delta_x}$, $2\sqrt{\delta_x\,\delta_y}$ que donnent les relations (m); relations dont on pourra, du reste, se servir

toujours pour déterminer quelques-unes des six constantes δ, γ au moyen des autres, si toutes n'ont pas été l'objet d'expériences spéciales.

5. *Réalité des trois racines de cette équation, et relations entre les directions qui leur correspondent.* — On trouve démontré, dans tous les traités de géométrie analytique, et aussi dans ceux de mécanique, à propos de la recherche des trois axes d'une surface du second degré, et de celle des moments d'inertie principaux, que les équations de la forme (l) et (n), composées avec un *déterminant symétrique*, ont leurs trois racines réelles. (Voyez *Exerc. de math.* de Cauchy, t. III, 1828, p. 8). On s'en rend compte aussi en opérant comme nous allons faire, ainsi qu'a fait Clebsch au § 6 relatif aux tensions, ce qui, en même temps, pourra éclairer la question des inclinaisons mutuelles des trois dilatations ∂ dont les quotients, par les δ de même direction, satisfont à (l) ou à (n).

Mettons pour c_x, c_y, c_z et pour $\frac{\partial}{\delta}$, dans les équations (k) ($A=0$, $B=0$, $C=0$), c'_x, c'_y, c'_z et $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)'$, en désignant ainsi l'une des trois valeurs de $\frac{\partial}{\delta}$ et les cosinus des angles que fait avec les x, y, z la direction correspondante de ∂ ; ajoutons ensuite ces équations après les avoir multipliées respectivement par c''_x, c''_y, c''_z supposés être les c relatifs, de même, à une seconde racine $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)''$ de l'équation du troisième degré. Nous aurons :

$$2\left(\frac{\partial}{\delta}\right)'(\delta_x c'_x c''_x + \delta_y c'_y c''_y + \delta_z c'_z c''_z) = 2\partial_x c'_x c''_x + 2\partial_y c'_y c''_y + 2\partial_z c'_z c''_z +$$
$$+ g_{yz}(c'_y c''_z + c'_z c''_y) + g_{zx}(c'_z c''_x + c'_x c''_z) + g_{xy}(c'_x c''_y + c'_y c''_x).$$

Le second membre ne change pas quand on permute les accents $'$ et $''$; il doit donc en être de même du premier. Or, son trinôme entre parenthèses ne change pas non plus, tandis que, hors de la parenthèse, $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)'$ se change en $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)''$. Si donc ces deux racines de l'équation du 3ᵉ degré ne sont pas égales, on doit avoir le trinôme nul, ou

$$(o) \qquad \delta_x c'_x c''_x + \delta_y c'_y c''_y + \delta_z c'_z c''_z = 0.$$

Or si l'équation (l) avait une racine imaginaire $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)' = a + b\sqrt{-1}$, elle aurait aussi sa conjuguée $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)'' = a - b\sqrt{-1}$. En mettant ces racines pour $\frac{\partial}{\delta}$ dans les équations (k), $A=0$, $B=0$, $C=0$, on tirerait, à l'aide de $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$, pour c''_x, c''_y, c''_z des valeurs imaginaires respectivement

conjuguées de celles de c'_x, c'_y, c'_z. Donc $c'_x c''_x$, $c'_y c''_y$, $c'_z c''_z$ seraient trois quantités positives de la forme $\alpha^2 + \beta^2$; et comme les trois limites choisies δ_x, δ_y, δ_z sont essentiellement positives, le premier membre de (o) serait une quantité positive, ce qui ne peut être. L'équation (l) ou (n) ne saurait donc avoir de racines imaginaires binômes.

On voit aussi par la condition (o) et par deux autres semblables où entreraient les trois cosinus c'''_x, c'''_y, c'''_z, relatifs à une troisième racine $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)'''$, que lorsqu'on a

$$\delta_x = \delta_y = \delta_z ,$$

ou lorsque la limite à imposer aux dilatations est la même en tous sens, les directions des trois dilatations ∂, satisfaisant à l'équation du 3ᵉ degré, seront orthogonales entre elles.

Ce seront en effet les directions des *dilatations principales*, ou des axes de l'*ellipsoïde des déformations* du § 15, qui existe et peut même être tiré de (a), (d), et (e), quelle que soit la contexture.

Mais quand δ_x, δ_y, δ_z devront être pris sensiblement différents, leur élimination entre trois équations comme (i) pourra bien fournir, entre les neuf cosinus c', c'', c''' une relation; elle ne rendra pas, pour cela, nécessairement orthogonales les trois directions que donnent ces cosinus; en sorte que la surface ayant pour rayons vecteurs les quotients $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ des deux expressions (1), (3) portés dans les directions r, pourra être d'une forme telle que trois rayons la coupant normalement seront plus ou moins obliques les uns sur les autres.

6. *Résolution de cette équation* (n). *Condition la plus générale de permanence de la cohésion.* — Puisque l'équation (n) a ses trois racines réelles, elle est résoluble, non par radicaux, mais trigonométriquement. Qu'on la développe et qu'on lui donne la forme

$$(p) \qquad \left(\frac{\partial}{\delta}\right)^3 + 3a\left(\frac{\partial}{\delta}\right)^2 + 3b\left(\frac{\partial}{\delta}\right) + c = 0 ,$$

qui revient à

$$\left(\frac{\partial}{\delta} + a\right)^3 - 3(a^2 - b)\left(\frac{\partial}{\delta} + a\right) = 3ab - 2a^3 - c ;$$

ses trois racines, vu la formule générale connue $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ du cosinus du triple d'un angle quelconque α, sont données par

$$(q) \qquad \frac{\partial}{\delta} = -a + 2(a^2 - b)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \text{ou } 2\pi \\ \text{ou } 4\pi \end{pmatrix} + \text{arc cos}\, \frac{3ab - 2a^3 - c}{2(a^2 - b)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Si l'on prend, parmi ces trois racines, la plus grande de celles qui sont positives, si l'on cherche ensuite le point *dangereux* où le rapport $\frac{\partial}{\delta}$ ainsi déterminé a une valeur plus grande qu'en tout autre point, enfin si, en appelant $\left(\frac{\partial}{\delta}\right)_m$ ce maximum maximorum, l'on pose

$$(r) \qquad 1 = \text{ou} > \left(\frac{\partial}{\delta}\right)_m,$$

on aura établi la condition la plus générale de *résistance permanente* à la rupture ou de *stabilité de la cohésion* du Corps solide non isotrope dont on s'occupe.

Il pourrait sembler qu'on peut se dispenser de résoudre l'équation du 3[e] degré en $\frac{\partial}{\delta}$, ainsi que de tâtonner pour chercher le point dangereux, en remplaçant dans cette équation, $\frac{\partial}{\delta}$ par l'unité, et en la différentiant ensuite par rapport à chacune des variables x, y, z, puis en éliminant celles-ci entre les quatre équations ainsi obtenues. Mais ce moyen sera, on peut dire, toujours illusoire. On verra, en l'essayant, qu'il faut renoncer à chercher tout à fait analytiquement, d'abord, la position, sur chaque section, du point de maximum de $\frac{\partial}{\delta}$, qui sera généralement sur son contour, et ensuite la section *dangereuse* où est le point de *maximum maximorum* de $\frac{\partial}{\delta}$; car cette section sera le plus souvent en un endroit où il y a discontinuité; tel qu'une extrémité du prisme, ou bien un des endroits où des forces isolées se trouvent appliquées.

Mais, *une fois connue* la situation du point dangereux, on pourra très bien, presque toujours, poser la condition de juste résistance en faisant $\frac{\partial}{\delta} = 1$ dans l'équation (n), en ne la résolvant que par rapport *aux dimensions cherchées du prisme*, ou par rapport *à la charge qu'il doit supporter*, etc., et non par rapport à $\frac{\partial}{\delta}$ qui y est engagé au troisième degré. Nous en donnerons des exemples aux numéros 14 et 15.

6 *bis*. — *Cas où l'on peut regarder les limites des dilatations non dangereuses comme égales dans les trois sens.* — Alors

$$\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta.$$

L'équation (n), ou plutôt celle (l) dont elle provient, se réduit à celle (e) dont la plus grande racine positive n'est autre chose que la plus grande des dilatations ∂ qui ont lieu dans les divers sens autour de chaque point.

L'équation de cohésion permanente ou de non-rupture sera alors simplement

$$\delta = \text{ou} > \max.\partial\,.$$

On la posera en égalant, à la limite constante δ des dilatations non dangereuses de la matière du corps, la plus grande des valeurs, aux divers points, de ce maximum de ∂ relatif à chaque point.

Observons que cette égalité $\delta_x = \delta_y = \delta_z$ pourra être supposée avoir lieu sensiblement dans beaucoup de cas de corps ayant un certain degré de non-isotropie. En effet, de même que si l'on compare plusieurs matières isotropes, les plus raides, ou celles dont le coefficient d'élasticité E est le plus élevé, sont généralement aussi celles qui exigent la plus grande force de traction pour être rompues; de même aussi, le sens de plus facile dilatation, dans une même matière hétérotrope, pourra être généralement aussi celui de plus facile rupture; en sorte qu'il n'est pas impossible que, pour cette matière, il faille à peu près une même proportion d'écartement moléculaire ou de dilatation δ, pour mettre en péril la cohésion, dans toutes les directions r autour de chaque point. Alors, l'équation (n) ou plutôt (l) se réduit à celle (e). (Voir un exemple au n° 17).

7. *Comparaison, pour un cas particulier fréquent, des conditions de non-rupture posées des deux manières dont on a parlé au n° 1 de la présente note.* — Ce cas fréquent est celui des prismes d'une certaine longueur, sollicités seulement à leurs extrémités, et libres sur leur surface latérale (ce qui a été supposé constamment aux §§ 23 à 36) et de contexture sensiblement égale dans les divers sens transversaux.

Alors, comme il a été vu, l'on a, η étant la fraction numérique définie au § 2 :

$$(s)\qquad \partial_x = \partial_y = \eta\partial_z\,;$$

et si nous supposons (n° précédent) qu'on puisse prendre approximativement

$$\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta\,,$$

l'équation du troisième degré (l) devient

$$(t)\qquad (\partial - \partial_x)\left[(\partial - \partial_x)(\partial - \partial_z) - \frac{g_{zx}^2 + g_{zy}^2}{4}\right] = 0\,,$$

ce qui donne les trois racines

$$(u)\qquad \begin{cases} \partial = \partial_x\,, \\ \partial = \frac{1}{2}(\partial_z + \partial_x) - \frac{1}{2}\sqrt{(\partial_z - \partial_x)^2 + g_{zx}^2 + g_{zy}^2}\,, \\ \partial = \frac{1}{2}(\partial_z + \partial_x) + \frac{1}{2}\sqrt{(\partial_z - \partial_x)^2 + g_{zx}^2 + g_{zy}^2}\,. \end{cases}$$

Il faut égaler à la limite δ la plus grande de celles de ces trois racines qui sont positives.

Ce sera évidemment la troisième, si ∂_z est positive ou est une dilatation proprement dite du corps ou de la fibre dont le point (x, y, z) fait partie.

En mettant à la place de ∂_x sa valeur (s) en ∂_z, on a, pour l'équation de cohésion permanente :

$$(v) \qquad \delta = \text{ou} > \frac{1-\eta}{2}\partial_z + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\partial_z\right)^2 + \frac{g_{zx}^2 + g_{zy}^2}{4}}. \qquad (^*)$$

On donne le plus souvent, ce qui est sans inconvénient et commode (voyez plus loin) à la limite δ des dilatations, la désignation

$$(x) \qquad \delta = \frac{R_0}{E};$$

parce que Navier désigne par R le *coefficient de Rupture immédiate* par extension, ou de *cohésion instantanée*, d'un prisme dont les faces latérales sont libres (c'est-à-dire la traction, pour l'unité superficielle de ses bases, qui a été reconnue capable de le rompre), et parce qu'on appelle *coefficient de Rupture éloignée* ou de *cohésion permanente* et on désigne par

$$R_0$$

une traction, bien moindre que R (soit $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ de R) à laquelle l'observation des constructions durables les plus hardies fait juger qu'il est prudent de se tenir pour être assuré d'une stabilité en quelque sorte indéfinie; en sorte qu'en divisant R_0 par le coefficient d'élasticité E d'extension du § 2, l'on a bien la dilatation-limite.

L'équation de cohésion (v) prendra ainsi, en la multipliant par E, cette forme

$$(y) \qquad R_0 = \text{ou} > \frac{1-\eta}{2}E\partial_z + (1+\eta)\sqrt{\left(\frac{E\partial_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2(1+\eta)}\right)^2 (g_{xz}^2 + g_{yz}^2)},$$

dont l'emploi ne viole nullement le principe rationnel de résistance établi au n° 1, et qui, débarrassée ainsi de δ, pourra l'être, plus loin, aussi de E.

Dans cette équation, $E\partial_z$ représente la traction longitudinale t_{zz} du prisme ou de la fibre dont les côtés n'éprouvent pas d'action transversale; et comme

(*) Cette équation a été donnée et démontrée d'une manière directe et simple, pour la supposition $\eta = \frac{1}{4}$, en 1838, dans un cours lithographié déjà cité; et Poncelet l'a reproduite l'année suivante, en en rendant la démonstration tout à fait élémentaire, dans le Cours de Mécanique physique et industrielle qui venait d'être créé à la Faculté de Paris. (Voyez notes du n° 154, page 219, et du n° 156, p. 374, de l'édition de 1684 des *Leçons* de Navier.)

on a (§ 3), vu l'isotropie supposée, pour le coefficient d'élasticité G de glissement :

$$G = \frac{E}{2(1+\eta)},$$

le second terme sous le radical est la même chose que

$$(Gg_{zx})^2 + (Gg_{zy})^2,$$

ou la somme des carrés des tensions tangentielles transversales. Cette équation (y) revient donc à

$$(z) \qquad R_0 = \text{ou} > (1-\eta)\frac{t_{zz}}{2} + (1+\eta)\sqrt{\frac{t_{zz}^2}{4} + t_{zy}^2 + t_{zx}^2}\,.$$

Si nous comparons l'expression qui se trouve dans le second membre avec celle (115)

$$\frac{t_{zz}}{2} + \sqrt{\frac{t_{zz}^2}{4} + t_{zy}^2 + t_{zx}^2}\,.$$

que Clebsch donne comme limite des tensions, au commencement du présent § 37, on voit qu'elles diffèrent l'une de l'autre par les deux facteurs

$$1-\eta \quad \text{et} \quad 1+\eta\,,$$

dont la présence dans l'équation de cohésion sous la forme (z) mesure la différence entre les résultats de la manière rationnelle de la poser, de Mariotte et de Poncelet, que nous venons d'employer, et les résultats de celle à laquelle Clebsch s'est tenu, faute de connaître l'autre (nº 1 ci-dessus).

Si les glissements sont nuls, ou si seulement leurs carrés sont négligeables devant le carré de $\frac{1+\eta}{2}\partial_z$, ce qui peut être presque toujours supposé lorsqu'il n'y a que flexion et extension ou compression, les deux manières donnent également pour condition de cohésion permanente

$$R_0 = \text{ou} > t_{zz}\,;$$

ce qui fait qu'alors l'une et l'autre manière peuvent (nº 1) être indifféremment employées : on conçoit ainsi que Galilée, Leibnitz, Parent, et même Coulomb, aient posé leurs équations de résistance en limitant les tensions et non les dilatations.

Il en est autrement quand il y a des glissements sensibles. Par exemple, s'il n'y a que torsion, ou si $\partial_z = 0$, $t_{zz} = 0$, la condition (115) de Clebsch donnerait $R_0 = \text{ou} > \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2}$, et imposerait, conséquemment, par unité superficielle, la même limite aux tensions tangentielles s'exerçant dans le plan des sections, qu'aux tensions longitudinales des prismes dont les faces

latérales sont libres. Et c'est ce que Clebsch proposait dans un § 92 final sur la torsion, qu'il m'a autorisé à supprimer.

Mais l'équation rationnelle (x) donne

$$(a') \qquad \frac{R_0}{1+\eta} = \text{ou} > \sqrt{t_{xz}^2 + t_{yz}^2},$$

ou impose aux actions tangentielles une limite plus étroite. On voit qu'il y a une raison de prudence à se servir de cette équation (z) de préférence à celle de Clebsch.

8. *Rapport que doivent avoir entre elles*, dans un prisme isotrope, *sollicité seulement à ses extrémités, les coefficients* R_0 *et* T_0 *de cohésion et d'adhésion permanentes, ou les limites des tensions longitudinales, normales à ses sections, et des tensions transversales, tangentielles aux mêmes sections, pour produire la plus grande dilatation.* — La limite que ne doivent pas dépasser les tensions tangentielles transversales, lorsqu'elles sont seules en jeu, peut être fournie par des expériences de cisaillement, ou bien de rupture par torsion, comme celle des tensions normales longitudinales, lorsqu'elles sont seules, l'est par des expériences de rupture par traction. Ce coefficient de cohésion ou d'*adhésion* immédiate des couches est appelé T lorsque l'effort a été jusqu'à rompre immédiatement; et on nomme

$$T_0$$

fraction de T, celui d'*adhésion permanente*, ou l'effort auquel on peut soumettre la matière, sans lui donner une déformation persistante dangereuse ou susceptible d'augmenter par la continuation de l'effort, et d'amener graduellement l'énervation et la désagrégation de la matière.

L'équation de résistance permanente sera ainsi, quand il n'y a que des glissements transversaux :

$$(b') \qquad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = \text{ou} > Gg \\ \text{ou} \quad T_0 = \text{ou} > \sqrt{t_{zx}^2 + t_{zy}^2}. \end{array} \right.$$

Comparons cette équation à celle (z) qui lorsque $t_{zz} = 0$, ou qu'il n'y a que des glissements, se réduit à $R_0 = \text{ou} > (1+\eta)\sqrt{t_{zx}^2 + t_{zy}^2}$; nous avons pour le rapport des deux limites des tensions que nous appelons ici l'*adhésion* et la *cohésion* (quoique celle-là ne soit qu'une des faces de celle-ci),

$$(c') \qquad \frac{T_0}{R_0} = \frac{1}{1+\eta}.$$

On y arrive également en considérant que comme la tension tangentielle limite T_0 produit un glissement $g = \frac{T_0}{G}$, elle produit, par cela seul, ainsi

qu'on l'a vu à la fin du n° 3, une dilatation $\frac{g}{2}=\frac{1}{2}\frac{T_0}{G}$ dans la direction où elle atteint son maximum; cette dilatation étant la plus forte que la matière puisse supporter, elle doit avoir [n° 7; expression (x)], la valeur $\delta=\frac{R_0}{E}$. Donc $\frac{R_0}{E}=\frac{1}{2}\frac{T_0}{G}$, ou

$$(d') \qquad \frac{T_0}{R_0}=2\frac{G}{E},$$

qui est la même chose que (c'), vu le rapport

$$\frac{G}{E}=\frac{1}{2(1+\eta)},$$

trouvé au § 3 entre les coefficients d'élasticité de glissement et d'extension.

En sorte que si $\eta=\frac{1}{4}$ (Note finale du § 16, n° 14), on a $T_0=\frac{4}{5}R_0$, comme Navier l'a trouvé en 1833 (n° 66 de ses *Leçons*) en s'appuyant sur les conséquences que Cauchy et Poisson avaient tirées, en 1829, de la théorie fondée par lui en 1821. On voit que Navier, sans l'avoir explicitement énoncé, a été d'avis, comme Poncelet, de limiter les dilatations (n° 1) plutôt que les tensions intérieures.

Et les expériences de M. Gouin (*Leçons* du Général Morin *sur la résistance des matériaux*, 1853, p. 37) ont prouvé que ce rapport entre les forces T et R subsistait jusqu'à rupture, car il a trouvé qu'il fallait, par centimètre carré, un effort de 3200 kilogrammes pour rompre, par *cisaillement*, des tringles qui rompaient par extension sous une charge de 4000 kilogrammes.

9. *Corps d'inégales élasticités et cohésions en divers sens. — Cas où leur équation de cohésion peut être posée d'une manière simple.* — Ces cas sont ceux des prismes ou cylindres sollicités seulement, comme aux §§ 22 à 38, à leurs extrémités, leurs faces latérales étant libres, et dont nous supposerons que la matière, en chaque point, a trois plans orthogonaux de symétrie de contexture, l'un perpendiculaire, et les deux autres parallèles aux arêtes. Nous prendrons ces plans pour ceux de xy, xz et yz.

Nous supposerons un prisme successivement sollicité :

A l'extension ou à la compression longitudinale seule ;

A la flexion, avec ou sans extension ou compression de l'axe ;

Au glissement transversal, ou à la torsion seule ;

A tous ces genres de déformation à la fois.

10. *Extension longitudinale seule.* — Alors, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} étant nuls, l'équation du 3e degré (n) se résout en

$$(e') \qquad \frac{\partial}{\delta}=\frac{\partial_x}{\delta_x}, \text{ ou } \frac{\partial_y}{\delta_y}, \text{ ou } \frac{\partial_z}{\delta_z}.$$

La seule de ces trois valeurs qui soit positive est la dernière puisque ∂_x et ∂_y sont des contractions transversales déterminées (§ 2) par la dilatation longitudinale ∂_z. En l'égalant à 1 au plus, on a :

$$\partial_z = \text{ou} < \delta_z .$$

Mettant (n° 7), $\frac{R_0}{E}$ pour δ_z, on a pour condition de cohésion permanente, comme pour les corps isotropes

$$(f') \qquad E\partial_z = \text{ou} < R_0 ,$$

ou simplement, P étant la force de traction à laquelle la pièce est soumise par unité de sa section

$$(f'_1) \qquad P = \text{ou} < R_0 ,$$

ce qu'on savait déjà.

11. *Compression longitudinale seule. Résistance à l'écrasement.* — Ainsi que l'a observé Poncelet, la compression, ou le rapprochement des molécules, n'est point une cause de désagrégation ; et un corps, même granuleux, s'il était également comprimé dans tous les sens, conserverait sa contexture intacte. Aussi ce Savant explique l'*écrasement*, ou la rupture que produit une compression longitudinale des prismes qui ne sont pas assez longs pour fléchir, *par les dilatations transversales* dont elle est accompagnée et que révèlent les formules de l'élasticité (§ 2).

C'est pour cela que nous avons, pour condition générale de conservation ou de la cohésion d'un corps, imposé (n° 6) une limite *aux seules valeurs positives* des dilatations ∂ de son intérieur. Ici, puisqu'il y a compression longitudinale, ∂_z est négatif, et les dilatations transversales ∂_x, ∂_y sont positives. Soient, ∂'_z, quantité supposée positive, désignant la proportion de la *contraction* longitudinale produite par la force de compression,

$$(g') \qquad \frac{\partial_x}{\partial_z} = -\eta , \quad \frac{\partial_y}{\partial_z} = -\eta' , \quad \eta > \eta' , \quad \text{et} \quad \partial_z = -\partial'_z .$$

On aura pour la plus grande des valeurs positives de $\frac{\partial}{\delta}$ prises parmi les trois (e') du numéro précédent (10) encore ici applicables

$$\text{max. de } \frac{\partial}{\delta} = -\frac{\partial_y}{\delta_y} = \frac{\eta\partial'_z}{\delta_y} .$$

Comme cette plus grande valeur de $\frac{\partial}{\delta}$ doit être au plus égale à 1, l'équation

de cohésion permanente, pour le prisme comprimé, est

$$(h') \qquad \delta_y = \text{ou} > \eta \partial'_z \,.$$

Si l'on appelle, comme au n° 15 de la note finale du § 16,

$$E_y, \quad \text{et de même} \quad R_y,$$

1° le *coefficient d'élasticité* qu'on aurait en soumettant à l'extension un petit prisme extrait de l'autre prisme dans son sens transversal y, et 2° le *coefficient de cohésion* de ce même petit prisme, analogue à ce qu'est R_0 pour le prisme entier ou pour ses fibres longitudinales; R_y étant ainsi une force telle qu'on ait pour la limite à imposer aux dilatations dans le sens transversal y

$$(i') \qquad \delta_y = \frac{R_y}{E_y},$$

l'équation de cohésion (h') pourra être écrite

$$(j') \qquad R_y = \text{ou} > E_y \eta \partial'_z \,.$$

Plus ordinairement, comme on appelle R' la force qui *écrase* immédiatement, l'on fait entrer dans les calculs une force moindre, appelée

$$R'_0 \,,$$

qui est la limite à imposer, par unité superficielle des bases, aux forces comprimant le prisme dont les faces latérales sont libres. Elle doit donc être telle qu'on ait, E_z étant le coefficient d'élasticité désigné, aussi, simplement par E, de l'extension ou de la contraction longitudinale :

$$(j') \qquad R'_0 = E_z \partial'_z = E \partial'_z \,;$$

∂'_z ayant la même valeur limite que dans l'équation de résistance justement suffisante (j') $R = E_y \, \eta \partial'_z$. Divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{R'_0}{R_y} = \frac{E}{\eta E_y}, \text{ ou}$$

$$(k') \qquad \frac{R'_0}{R_0} = \frac{1}{\eta} \frac{E}{E_y} \cdot \frac{R_y}{R_0} = \frac{1}{\eta} \frac{\delta_y}{\delta_z} \,.$$

C'est le rapport des deux limites obligées de la force de compression et de la force d'extension. Il se réduit, lorsque le corps est isotrope, ou seulement, lorsque les limites δ_z, δ_y d'extensions non dangereuses dans le sens longitu-

dinal z et dans le sens transversal y sont égales, à

$$(l') \qquad \frac{R'_0}{R_0} = \frac{1}{\eta}.$$

La limite R'_0 des forces de compression longitudinale dans les corps isotropes est ainsi, théoriquement, plus grande que celle R_0 des forces de traction, dans le rapport de 1 à la fraction η.

Elle est par conséquent quadruple de celle-ci si $\eta = \frac{1}{4}$ (Note du § 16, n° 14).

L'expérience a confirmé, autant qu'on pouvait l'attendre, cette théorie de Poncelet, enseignée depuis longtemps à l'École de l'artillerie et du génie, car

1° Les petits prismes de pierre dure, lors de leur écrasement, se séparent d'abord en aiguilles verticales, ce qui prouve bien une extension dans le sens transversal.

2° Lors de l'écrasement des bois par compression dans le sens de leurs fibres, celles-ci se séparent d'abord, et ensuite ploient sans résistance.

3° Les petits cylindres de fonte douce ou malléable, écrasés, se gercent sur les bords, de manière à former une rosette, ce qui prouve qu'il y a eu, tout autour, rupture par dilatation transversale vers la circonférence.

4° Dans beaucoup d'expériences de rupture de pièces de fonte par flexion, il s'est détaché latéralement une sorte de coin du côté devenu concave ou comprimé.

5° La puissante machine de M. Blanchard, de Boston, à courber les pièces de bois, contenues de manière à ne pouvoir se dilater du côté convexe ni se boursoufler latéralement du côté concave, comprime violemment ce dernier côté sans le désorganiser aucunement.

6° Le rapport des coefficients R' et R de rupture immédiate par écrasement et par traction, ou des forces capables de produire, pour une base $= 1$, ces deux sortes d'effet, a été trouvé le plus souvent, pour la fonte, entre 4 : 1 et 6 : 1 ; et il devait, en effet, excéder $\frac{1}{\eta}$ qui est 4 pour les corps isotropes. Car lorsqu'on opère la compression d'un prisme court, entre deux plans durs où ses bases s'appliquent, celles-ci sont empêchées de se dilater, en sorte que le renflement latéral n'acquiert toute sa grandeur que vers le milieu de la hauteur du prisme.

Aussi, avant qu'on eût à peu près généralement renoncé à employer, dans les édifices, la fonte à autre chose qu'à supporter des compressions (vu les accidents que l'on a eu à déplorer dans le temps où l'on soumettait fréquemment à des flexions une matière aussi fragile et de qualité aussi variable), on donnait à la section des poutres en fonte la forme d'un double T dont la semelle inférieure, que la charge transversale devait faire étendre, avait une superficie d'environ cinq fois celle de la semelle supérieure dont la même charge provoquait la compression.

Mais, pour les matières telles que les bois, et même certains fers laminés ou étirés, dont la contexture est différente, dans le sens transversal, de ce qu'elle est dans le sens longitudinal, on conçoit que le rapport des limites de forces de compression et d'extension R_0 et R'_0 pourra être différent du rapport η entre leurs contractions ou extensions transversales et les extensions ou contractions longitudinales qui les engendrent lorsque les fibres latérales sont libres. Car une fois séparées les unes des autres, les fibres des bois ploient sous l'action d'une force comprimante, et cessent de résister, comme nous avons dit.

Aussi, le parti que prend ici Clebsch d'adopter généralement la même limite pour les forces qui compriment, et pour les forces qui étendent, peut bien favoriser l'intelligence des formules de la suite de son livre; mais, dans la pratique, malgré les raisons qu'il croit pouvoir tirer de la faiblesse des déplacements, il convient d'attribuer à ces forces des limites très différentes, dont le rapport peut varier d'une matière à l'autre.

Il est évident, au reste, que les deux limites R_0 et R'_0 devront être surtout tirées d'expériences ou d'observations directes. La seconde R'_0 pour les pierres, qui, dans les édifices, n'ont guère à résister qu'à des compressions, se déduit, comme on sait, quant à la *comparaison* des diverses pierres entre elles, d'expériences d'écrasement, en regardant les R'_0 comme dans un rapport constant avec les R' que fournissent ces expériences; rapport qu'on prend généralement d'un dixième en France, d'après l'exemple des colonnes légères d'une ancienne église d'Angers, mais que des ingénieurs anglais portent à un sixième.

12. *Torsion et glissements transversaux.* — Ce n'est guère que dans la torsion que les éléments des prismes se déforment par le seul glissement, sans dilatation dans le sens z de leurs arêtes, ni dans les divers sens qui leur sont perpendiculaires. Faisons, dans l'équation du 3ᵉ degré (n)

$$\partial_x = 0, \qquad \partial_y = 0, \qquad \partial_z = 0,$$

avec

$$g_{xy} = 0,$$

qui exprime qu'aucune dilatation transversale n'a lieu même dans les directions intermédiaires entre celles x et y; cette équation se réduit, en supprimant une racine $\frac{\partial}{\delta} = 0$ ne donnant qu'un minimum, et la racine négative $-\sqrt{\ldots\ldots}$, à

$$(n') \qquad \frac{\partial}{\delta} = \sqrt{\frac{g_{zx}^2}{\gamma_{zx}^2} + \frac{g_{zy}^2}{\gamma_{zy}^2}}.$$

On peut, pour simplifier, remplacer es indices doubles zx, zy, par x, y. On élimine les limites γ des glissements en faisant, G_x et G_y étant les coefficients

d'élasticité tangentielle de la matière dans les sens x, y,

$$\gamma_x = \frac{T_x}{G_x}, \qquad \gamma_y = \frac{T_y}{G_y}.$$

en sorte que T_x, T_y sont, pour les mêmes sens x, y, des coefficients de *cohésion tangentielle* ou d'*adhésion*, analogues au T_0 (nº 8) du cas d'isotropie.

On a ainsi :

$$(o') \qquad \frac{\partial}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{G_x g_x}{T_x}\right)^2 + \left(\frac{G_y g_y}{T_y}\right)^2}.$$

Comme les produits $G_x g_x$, $G_y g_y$ peuvent être déterminés au moyen des composantes ou des moments des forces agissant sur le prisme, on calculera, pour divers points de chaque section, cette valeur (o') de $\frac{\partial}{\delta}$ (déjà la plus grande qu'il y ait en chaque point pour les diverses directions qui s'y croisent.) Lorsque le point dangereux, celui pour lequel (o') est le plus considérable ou *maximum maximorum* aura été trouvé, l'équation $\frac{\partial}{\delta} =$ ou < 1 de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée sera

$$(p') \qquad 1 = \text{ou} > \left(\frac{G_x g_x}{T_x}\right)^2 + \left(\frac{G_y g_y}{T_y}\right)^2;$$

les $G_x g_x$, $G_y g_y$ ayant leurs valeurs relatives à ce point.

Lorsque la matière du prisme, supposée homogène, a en outre, en chaque point, un axe de symétrie de contexture, ou lorsqu'elle est isotrope transversalement, tout en pouvant avoir une contexture ou une élasticité très différente longitudinalement, on a, G et T_0 étant relatifs aux sens transversaux, et g étant le glissement principal,

$$G_x = G_y = G\ ; \qquad T_x = T_y = T_0\ ; \qquad g_x^2 + g_y^2 = g^2,$$

et les équations (o'), (p') sont, analogiquement au cas d'isotropie (nº 7)

$$(q') \qquad \frac{\partial}{\delta} = \frac{Gg}{T_0}, \quad 1 = \text{ou} > \frac{Gg}{T_0}.$$

Le point dangereux, pour les prismes jouissant sensiblement de cette isotropie transversale, comme sont ceux auxquels s'appliquent les §§ 23 à 37, est donc simplement le point *du plus grand glissement principal* g. On a donné, au § 31 relatif à la torsion, et surtout à sa note finale, l'emplacement de ce point qui est, 1º pour une section circulaire, en tout endroit de la circonférence, 2º pour les sections à contour convexe, ainsi que pour un grand nombre d'autres, aux endroits du contour les plus rapprochés du

centre de gravité, et, 3° pour quelques-unes, telles que les sections en double spatule comme celles des rails de chemins de fer, en certains points de la partie concave du contour.

Ces considérations sont également applicables si le prisme, au lieu d'être tordu, n'est soumis qu'à un *effort tranchant* qui fait glisser transversalement ses sections les unes devant les autres, comme il arrive aux rivets, aux goupilles, etc. Mais l'effet ainsi produit est presque toujours accompagné d'extensions, compressions ou flexions, et doit être calculé par les formules (y'), (z'), (a'') ci-après, des cas complexes.

13. *Flexion.* — La flexion *égale*, ou en arc de cercle, déterminée par des forces faisant couples autour d'axes transversaux, et auxquelles peut se joindre une force de traction ou de compression longitudinale, ne consiste qu'en des dilatations et contractions des fibres des prismes qui y sont soumis. La flexion *inégale*, qu'opèrent des forces ne faisant pas couples, est toujours accompagnée de glissements, dus à ce que la composante transversale totale de ces forces fait effort tranchant.

Lorsque l'influence de ces glissements, pour rendre oblique aux fibres la *direction dangereuse* ou du plus grand rapport $\frac{\partial}{\delta}$, est négligeable comme il arrive le plus généralement, la flexion inégale se réduit, comme l'autre, à des dilatations et contractions longitudinales diverses ∂_z des fibres, ayant pour conséquences (§ 2) leurs contractions ou dilatations transversales $\pm \eta \partial_z$ comme si elles étaient isolées.

Aussi, après qu'on a déterminé, sur le contour de chaque section, les points de plus grande dilatation ou contraction longitudinale, et la section *dangereuse* où elles ont leurs plus grandes valeurs, l'équation de cohésion se pose comme au n° 10 en égalant la plus grande dilatation longitudinale à $\frac{R_0}{E}$, ou, comme au n° 11, la plus grande contraction longitudinale à $\frac{R'_0}{E}$, si l'on reconnaît qu'il en résulte une valeur plus grande du rapport $\frac{\partial}{\delta}$; ce qui pourra avoir lieu lorsqu'une force de compression longitudinale considérable accompagnera les forces transversales faisant fléchir.

On n'aura même pas besoin, dans la flexion, de faire une distinction entre ces deux coefficients R_0 et R'_0 si, comme on fait assez généralement, au lieu de tirer leurs valeurs d'expériences séparées de *traction* et de *compression*, l'on tire d'expériences de *flexion* un *coefficient unique*, ces expériences étant faites sur chaque matière, et en appliquant à leurs résultats des formules où il n'entre qu'un seul coefficient.

14. *Cas complexes où il y a, à la fois, traction ou compression, flexion, glissement et torsion d'un prisme sollicité aux extrémités et dont les faces latérales sont libres.*

Comme on a toujours alors, on peut le dire, quels que soient les rapports des élasticités ainsi que des cohésions en tous sens

$$g_{xy} = 0 ,$$

les deux derniers termes des équations (l) ou (n) du troisième degré en $\frac{\partial}{\delta}$ s'annulent comme au n° 7 ; et si la contexture est égale dans les deux sens transversaux x, y, en sorte que :

$$\partial_x = \partial_y = -\eta\partial_z , \quad \delta_x = \delta_y ,$$

l'équation se décompose comme celle (s'') du même n° 7, en une du premier degré et une du second, qui donnent ces trois racines

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{\partial_x}{\delta_x} = -\frac{\eta\partial_z}{\delta_x} ,$$

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_z}{\delta_z} + \frac{\partial_x}{\delta_x}\right) \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial_z}{\delta_z} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)^2 + \frac{g_{zx}^2 + g_{zy}^2}{\delta_x\delta_z}} ;$$

en sorte que si l'on prend la troisième de ces racines comme la plus grande, et si la rupture a plus de tendance à se faire dans le sens longitudinal z que dans les sens transversaux, on a, en faisant cette racine $\frac{\partial}{\delta}$ égale à 1, ce qui est sa valeur-limite, et en multipliant par δ_z, l'équation suivante, de cohésion permanente :

$$(r') \quad \delta_z = \text{ou} > \frac{1}{2}\left(1 - \eta\frac{\delta_z}{\delta_x}\right)\partial_z + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \eta\frac{\delta_z}{\delta_x}\right)^2 + \frac{\delta_z}{\delta_x}\left(g_{zx}^2 + g_{zy}^2\right)} ,$$

dont celle (v) du n° 7 (ou de 1838) est un cas particulier.

Mais on peut en établir une de même forme, plus générale encore. Il suffit, en effet, pour la réduction de l'équation (l) ou (n) au second degré, qu'on puisse prendre

$$\frac{\partial_x}{\delta_x} = \frac{\partial_y}{\delta_y} \text{ sans qu'on ait } \partial_x = \partial_y , \quad \delta_x = \delta_y .$$

Et l'on peut même étendre cette équation du second degré très approximativement à des cas où la contexture est un peu autre suivant les y que suivant les x en remplaçant, dans l'équation du troisième degré (n), les deux rapports $\frac{\partial_x}{\delta_x}$, $\frac{\partial_y}{\delta_y}$, supposés n'être pas très différents, par leur moyenne :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} + \frac{\partial_y}{\delta_y}\right).$$

L'équation, en effet, se décomposera encore et pourra s'écrire :

$$(s')\quad \left[\frac{\partial}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\right]\left\{\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_z}{\delta_z}\right)\left[\frac{\partial}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\right]-\left(\frac{g_{zx}^2}{\gamma_{zx}^2}+\frac{g_{zy}^2}{\gamma_{zy}^2}\right)\right\}=0.$$

Elle donnera les trois solutions :

$$(t')\qquad \frac{\partial}{\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right).$$

$$\begin{matrix}(u')\\(v')\end{matrix}\left\{\frac{\partial}{\delta}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial_z}{\delta_z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\right]\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{\partial_z}{\delta_z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\right]^2+\frac{g_x^2}{\gamma_x^2}+\frac{g_y^2}{\gamma_y^2}}.\right.$$

La seconde, (u'), celle où le radical a le signe —, est à rejeter, car si elle est positive, sa valeur est toujours moindre que celle de la troisième où il a le signe $+$. La première (t') n'est positive et à choisir que lorsqu'il y a une forte contraction longitudinale engendrant des dilatations transversales dangereuses ou faisant craindre l'écrasement. Dans tout autre cas, c'est la troisième qu'il faut prendre, et nous allons la considérer uniquement.

On a, η et η' étant des fractions dont la valeur est $\frac{1}{4}$ quand il y a isotropie complète :

$$\partial_x=-\eta\partial_z,\qquad \partial_y=-\eta'\partial_z.$$

Faisons

$$(x')\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x}+\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)=-\eta_1\frac{\partial_z}{\delta_z},\quad \text{où l'on a}\quad \eta_1=\frac{1}{2}\left(\eta\frac{\delta_z}{\delta_x}+\eta'\frac{\delta_z}{\delta_y}\right),$$

et, comme aux numéros précédents :

$$\delta_z=\frac{R_0}{E},\qquad \gamma_x=\frac{T_x}{G_x},\qquad \gamma_y=\frac{T_y}{G_y};$$

nous aurons l'équation générale :

$$(y')\qquad \frac{\partial}{\delta}=\frac{1-\eta_1}{2}\frac{E\partial_z}{R_0}+\sqrt{\left(\frac{1+\eta_1}{2}\frac{E\partial_z}{R_0}\right)^2+\left(\frac{G_xg_x}{T_x}\right)^2+\left(\frac{G_yg_y}{T_y}\right)^2}.$$

On peut y mettre, pour la valeur de $E\partial_z$ relative à chaque point (x, y, z), l'expression suivante, comme on a vu, d'après les équations (63 *a*), p. 147, et (86), p. 149 et 194 et à la Note du § 29 relative à ces équations (86), p. 196, (et comme on verra aussi à la fin du § 63),

$$(z')\qquad E\partial_z=\frac{1}{\sigma}\left(P_z+\frac{M_y}{\kappa'^2}x+\frac{M_x}{\kappa^2}y\right);$$

P_z étant la traction longitudinale du prisme, σ l'aire de la section dont l'abscisse est z, M_y et M_x les sommes des moments des forces extérieures autour des axes d'inertie de la même section supposés parallèles aux y et aux x, et $\lambda^2\sigma$, $\varkappa^2\sigma$ étant les moments d'inertie de son aire autour des mêmes axes.

Comme la théorie exposée aux §§ précédents donne le moyen d'exprimer aussi $G_x\,g_x$, $G_y\,g_y$ en fonction des forces qui agissent sur le prisme et de ses dimensions, et aussi des coordonnées z, x, y de ses points, l'équation (y') servira à trouver la section dangereuse et le point dangereux où $\frac{\partial}{\delta}$ est le plus grand. Une fois ce point déterminé, l'équation de cohésion permanente sera celle (s'), débarrassée de ce premier facteur qui ne donne que (t') rarement applicable, et, ensuite, spécifiée pour $\frac{\partial}{\delta} = 1$; c'est-à-dire l'équation suivante (a''), où nous mettons $=$ ou $>$ au lieu de $=$ seul, parce que η_1 étant toujours plus petit que 1, le premier membre augmente lorsqu'on y met soit pour ∂_z, soit pour les g, des valeurs au-dessous de celles qui satisfont exactement à (s') et qu'ils ne doivent jamais dépasser :

$$(a'') \qquad \left(1-\frac{E\partial_z}{R_0}\right)\left(1+\eta_1\frac{E\partial_z}{R_0}\right)-\left(\frac{G_x g_x}{T_x}\right)^2-\left(\frac{G_y g_y}{T_x}\right)^2 = \text{ou} > 0\ .$$

Les équations (y'), (z',) (a'') (données en 1854 au Mémoire sur la torsion, et ensuite, en 1864, aux notes de la 3e édition de Navier) me paraissent contenir ce qui a été donné de plus général sur les conditions de résistance permanente des prismes sollicités aux extrémités. Vu la substitution faite, aux rapports $\frac{\partial_x}{\delta_x}$, $\frac{\partial_y}{\delta_y}$, de leur moyenne, elles ne sont des conséquences *tout à fait exactes* de notre équation du 3e degré (n), que dans le cas d'égale contexture transversale où il n'est pas besoin d'une pareille substitution, car ces rapports sont alors égaux. Alors on a

$$(b'') \qquad \eta = \eta' \ , \qquad \eta_1 = \eta\,\frac{\delta_z}{\delta_x} = \eta\,\frac{R_z}{E_z}\,\frac{E_x}{R_x}\ .$$

Mais rien n'empêche d'en étendre l'emploi au cas où la contexture, qui peut être très différente dans le sens longitudinal et dans les sens transversaux, offrirait aussi dans ces derniers sens quelque légère différence ; car, au même titre qu'on a pu adopter, pour représenter la loi inconnue de variation des limites de dilatation en divers sens, la relation (h) $\delta_r = \delta_x c_x^2 + \delta_y c_y^2 + \delta_z c_z^2$, qui a conduit à l'équation générale du troisième degré (n) en $\frac{\partial}{\delta}$, applicable à des corps de toute forme, l'on peut,

pour le cas restreint des corps allongés, qui nous occupe, adopter l'équation du second degré (s'), exprimant une loi non moins plausible, et satisfaisant non moins bien à la continuité des variations des quantités.

15. *Applications.* — Nous ne pouvons que renvoyer au Mémoire de 1854 sur la torsion (*Sav. étr.*, t. XIV) ainsi qu'aux longues notes des nos 154 et 156 de l'édition de 1864 des *Leçons* de Navier, pour les nombreuses applications que nous avons faites des équations (y'), (a''), et les formules pratiques que nous en avons déduites.

Rapportons-en toutefois ici quelques-unes.

a.) *Cylindre à base circulaire, sollicité à la fois à la flexion, à la torsion et à l'extension.* — La flexion étant supposée déterminée par une force transversale, la section dangereuse sera celle pour laquelle cette force a le plus grand bras de levier. Soient M son moment autour d'un rayon de cette section, M′ le moment des forces autour de l'axe, P la force de traction longitudinale, r le rayon inconnu que devra avoir le cylindre pour résister à ces divers efforts. Le point dangereux est tout connu ; il sera sur la circonférence de la section la plus exposée. Faisant, dans l'expression (z')

$$P_z = P\ ,\quad M_y = M\ ,\quad M_x = 0\ ,\quad \sigma = \pi r^2\ ,\quad \lambda^2\sigma = \frac{\pi r^4}{4}\ ,\quad x = r\ ,$$

on a

$$E\partial_z = \frac{P}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3}\,.$$

On a aussi

$$\sqrt{\left(\frac{G_x g_x}{T_x}\right)^2 + \left(\frac{G_y g_y}{T_y}\right)^2} = \frac{Gg}{T_0}\ ,\quad \text{et le maximum de}\quad Gg = \frac{M'}{\frac{1}{2}\pi r^4}\,r\,.$$

Substituant dans (a'') on a

$$\left(1 - \frac{P}{\pi r^2 R_0} - \frac{4M}{\pi r^3 R_0}\right)\left[1 + \eta\left(\frac{P}{\pi r^2 R_0} + \frac{4M}{\pi r^3 R_0}\right)\right] - \left(\frac{2M'}{\pi r^3 T_0}\right)^2 = 0\ ,$$

ou

$$(c'')\qquad (R_0\pi r^3 - Pr - 4M)\,(R_0\pi r^3 + \eta P r + 4\eta M) - 4M'^2\left(\frac{R_0}{T_0}\right)^2 = 0\ ,$$

équation du second degré en P, ou M, ou M′, si c'est eux dont on cherche les limites supérieures, r étant supposé donné ; et elle est du sixième degré en r si c'est ce rayon dont on cherche la limite inférieure, quand les forces et les moments sont donnés. On peut, dans ce dernier cas, la résoudre numériquement, *sans la développer*, en employant, par approximations successives, la vieille et si naturelle méthode de double fausse position (El Khataïm des Indiens), que Cardan appelait avec justice la *Règle d'or*, et qui est aussi sûre que prompte, puisque chaque opération offre une vérification des

opérations précédentes, en sorte qu'elle est, sous tous les rapports, bien préférable à la méthode dite de Newton, conservée dans les programmes d'études, et y figurant même encore seule.

On peut donner à cette équation une autre forme :

Soient r', r'', r''', les valeurs qu'il faudrait respectivement donner au rayon r si le cylindre était seulement sollicité à s'étendre, à fléchir, à tordre. Comme on trouverait :

$$1 = \frac{1}{R_0}\frac{P}{\pi r'^2}, \qquad 1 = \frac{1}{R_0}\frac{4M}{\pi r''^3}, \qquad 1 = \frac{1}{T_0}\frac{2M'}{\pi r'''^3},$$

on a, en éliminant P, M, M' dans l'équation (c'')

$$(d'') \qquad (r^3 - r'^2 r - r''^3)(r^3 + \eta r'^2 r + \eta r''^3) - r'''^6 = 0 .$$

d'où l'on tirera la valeur à donner au rayon r du cylindre pour qu'il résiste d'une manière permanente à tous ces efforts réunis.

Ordinairement, l'effet de la tension longitudinale est relativement faible. Si donc l'on efface les termes en P ou si l'on fait $r'^2 = 0$, l'équation se résout algébriquement et donne

$$(e'') \qquad r^3 = \frac{1-\eta}{2} r''^3 + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} r''^3\right)^2 + (r'''^3)^2} .$$

Un calcul prouve que pour des valeurs très variées du rapport de r'''^3 à r''^3, le rapport de r^3 soit à l'un, soit à l'autre, est presque le même, soit qu'on fasse $\eta = \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{5}$. On pourrait donc, quand la matière n'offre pas une très grande différence d'extensibilité dans le sens longitudinal et dans les sens transversaux, faire, dans toutes les formules ci-dessus

$$\eta = \eta_1 = \frac{1}{4},$$

ce qui donnerait ici :

$$r^3 = \frac{3}{8} r''^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r''^2\right)^2 + (r'''^3)^2} .$$

b.) Prismes sollicités de même. — Pour une autre section que le cercle, le calcul est sensiblement plus compliqué. Le point dangereux sera généralement sur le contour, mais ni à l'endroit où il serait avec la traction et la flexion seules, ni à celui où il se trouverait placé si la torsion était seule : il faudra, pour le déterminer, se servir des formules déduites des considérations des §§ précédents, surtout du § 31 et de sa note, qui peuvent donner les glissements composants g_x, g_y en tous les points du contour, et chercher celui où $\frac{\partial}{g}$, donné par la formule (y') avec (z') pour $E\partial_z$, a la plus

grande de ses valeurs; ce à quoi on pourra employer une méthode de fausse position applicable à la recherche des maxima et minima, qu'on trouve exposée au § 54 de la note du n° 156 de l'édition de 1864 de Navier, p. 318. L'équation de cohésion, propre à fournir, par résolution algébrique ou numérique, ou les dimensions à attribuer aux sections, ou les limites à imposer aux forces appliquées aux extrémités, sera l'équation (a'') en y mettant pour $E\partial_z$, ainsi que pour $G_x g_x$, $G_y g_y$, leurs valeurs relatives au point ainsi trouvé.

c.) Pièce courte sollicitée en même temps à la flexion et au cisaillement. — Dans toute pièce fléchie *inégalement* (n° 15), les glissements transversaux courbent en *doucine* les sections primitivement planes et normales aux fibres; en effet ces sections doivent prendre, sur la fibre centrale, une certaine inclinaison qui s'annule quand on passe aux fibres du bord, car on démontre que les surfaces courbes affectées par les sections doivent rester normales aux faces latérales de la pièce. De cette manière, le plus grand glissement a lieu au point de chaque section où précisément la dilatation due à la flexion est nulle, savoir au centre de cette section; et, par contre, le glissement est nul précisément aux endroits du contour où la flexion dilate le plus les fibres. De cette considération et d'un calcul détaillé qui a été fait sur plusieurs exemples, il résulte qu'il convient d'estimer séparément les dimensions qu'il faudrait donner aux sections si elles avaient à résister à la flexion seule, puis au glissement seul, pris à son maximum qui est au centre des sections; et à prendre finalement le plus fort des deux résultats de ces estimations. C'est ce qu'on fera, par exemple, pour calculer les dimensions, vers leurs extrémités, des pièces qui, sur le reste de leur longueur, ont la forme *d'égale résistance* à la flexion.

17. Mais certaines sections sont astreintes à rester planes. Telles sont celles d'encastrement solide, et celles qui, se trouvant au milieu de pièces fléchies, n'ont pas plus de raison de s'incliner et de se courber d'un côté que de l'autre. Pour ces sections toutes particulières, quand il y en a, on peut regarder le glissement g comme à peu près le même en tous leurs points, et Gg comme égal au quotient, par l'aire σ de la section, de *l'effort tranchant*, soit P, qui produit ce glissement de la section. Mettant dans les équations (y') et (a'') cette valeur $\frac{P}{\sigma}$ de $G_x g_x$ et annulant $G_y g_y$, on aura ce qu'il faudra pour calculer les valeurs de $\frac{\partial}{\partial}$ et pour l'équation de cohésion.

Soit, par exemple, une pièce horizontale, encastrée par un bout, sollicitée à l'autre par un poids; appelons :

a, la longueur de la pièce supposée cylindrique ou prismatique,

P, le poids qui la sollicite ainsi à fléchir et qui fait aussi effort tranchant sur toutes ses sections,

σ, sa section, I son moment d'inertie autour de la ligne horizontale tra-

versée par les fibres invariables, et qui est supposée un des axes principaux,

v', la demi-hauteur de cette section si elle est symétriquement partagée par cette horizontale, ou, plus généralement, la distance entre le plan horizontal des fibres invariables et la fibre la plus tendue,

∂, la dilatation de cette fibre,

g, le glissement qui a lieu sur sa base, ou l'inclinaison que prend l'arête ou la fibre sur cette base,

η, le rapport entre la contraction transversale de la même fibre, dans le sens v', à cette même dilatation,

$M = Pa$, le moment de flexion sur la même section d'encastrement,

∂_m, la plus grande dilatation, qui aura lieu dans un sens oblique, en vertu de la dilatation longitudinale ∂ et du glissement g,

E, le coefficient d'élasticité d'extension,

G, celui d'élasticité de glissement,

ρ, le rayon de courbure de l'axe de la pièce, à l'encastrement.

Il résulte des nombreuses expériences de MM. Wertheim et Chevandier, sur des bois de toute essence (*Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois*, du 5 octobre 1846, imprimé en 1847 aux *Ann. de ch. et ph;* tableau n° XVI, colonnes 8, 9, 10, 11 pour l'élasticité, et 12, 13, 14 pour la cohésion) que le coefficient d'élasticité, E_z dans le sens longitudinal ou des fibres est, suivant les essences et les échantillons, 5 fois, 20 fois plus grand que le coefficient d'élasticité E_x ou E_y dans les sens transversaux, et que les *cohésions instantanées*, c'est-à-dire les charges R, capables de faire rompre, suivent des rapports analogues; d'où résulterait, si l'on admet que les *cohésions permanentes* R_0 ont entre elles les mêmes rapports que celles-ci, que les limites $\frac{R_0}{E} = \delta$, (n° 7) à imposer aux dilatations, peuvent être regardées comme à peu près les mêmes dans les divers sens, ou, du moins, que l'on ne commettra pas d'erreurs très sensibles en les supposant égales dans les calculs pratiques.

Faisons donc, dans l'équation (v'), $\delta = \delta_x = \delta_y = \delta_z$, $\gamma_x = \gamma_y = 2\sqrt{\delta_z \delta_x} = 2\sqrt{\delta_z \delta_y} = 2\delta$; supposons, de plus, l'isotropie transversale, ou $\partial_x = \partial_y = -\eta\partial_z = -\eta\partial$; cette équation deviendra pareille à la troisième (t) du n° 7, sans qu'il faille pour cela donner à η et à $\frac{E}{G}$ les valeurs $\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{2}$ du cas d'isotropie complète, que le n° suivant 8 leur attribue. En effet nous ne supposons nullement ici, à beaucoup près, que la contexture de la matière soit la même dans le sens longitudinal et dans le sens transversal. Cette équation sera donc

$$(g'') \qquad \partial_m = \partial\left[\frac{1-\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2\partial}\right)^2}\right].$$

Or on a, par la théorie de la flexion,

$$(h'') \qquad \partial = \frac{v'}{\rho}, \qquad \frac{EI}{\rho} = M = Pa, \qquad \text{d'où} \qquad \partial = \frac{Pav'}{EI};$$

et, comme on suppose que la section d'encastrement reste plane, on a

$$\frac{P}{G\sigma} = g, \quad \frac{g}{2\partial} = \frac{P}{G\sigma} \cdot \frac{EI}{2Pav'} = \frac{E}{2G} \cdot \frac{I}{a\sigma v'}.$$

Donc

$$(i'') \qquad \partial_m = \frac{Pav'}{EI} \left\{ \frac{1-\eta}{2} + \frac{1+\eta}{2} \sqrt{1 + \left[\frac{E}{2(1+\eta)G}\right]^2 \left(\frac{2I}{\sigma a v'}\right)^2} \right\}.$$

Lorsque la contexture est la même dans le sens longitudinal que dans les sens transversaux, on peut prendre $\eta = \frac{1}{4}, \frac{E}{G} = \frac{5}{2}, \frac{E}{2(1+\eta)G} = 1$.

Mais cette isotropie complète est rare; elle n'existe pas pour les métaux laminés, et les bois sont encore plus loin de l'offrir.

Il résulte des calculs fondés sur quelques données expérimentales citées à la Note de la fin du § 16, et, pour suppléer à leur petit nombre, des suppositions plausibles fondées sur des considérations théoriques que nous avons développées à la même Note, qu'on peut prendre :

(j'')

Pour $\frac{E_z}{E_x} =$	1	1,5	2	5	10	15	20	40	80
$\eta =$	0,25	0,30	0,34	0,48	0,60	0,65	0,70	0,80	0,85
$\frac{E}{G} =$	2,5	3,0	3,8	6,6	11	15	18	36	66
D'où									
$\left[\frac{E}{2(1+\eta)G}\right]^2 =$	1	1,331	2,011	4,973	11,816	20,657	28,026	100	318,27
$\frac{1}{1+\eta}\left(\frac{E}{12G}\right)^2 =$	0,035	0,048	0,075	0,204	0,525	0,947	1,323	5	16,35

L'avant-dernière ligne donne les valeurs numériques à attribuer au premier facteur du second terme sous le radical de (i'').

Lorsque la section de la pièce sera un rectangle de largeur b et de hauteur c, on aura

$$I = \frac{bc^3}{12}, \quad \sigma = bc, \quad v' = \frac{c}{2}.$$

Le deuxième facteur du second terme sous le radical sera ainsi,

$$(k'') \qquad \frac{2I}{\sigma a v'} = \frac{c}{3a};$$

et l'on aura

$$(l'') \qquad \partial = \frac{Par'}{EI} = \frac{6Pa}{Ebc^2}.$$

La condition de résistance est que $E\partial_m$ égale tout au plus R_0 du n° 7. On aura donc, pour l'équation de cohésion

$$(m'') \qquad R_0 = \text{ou} > \frac{6Pa}{bc^2}\left\{\frac{1-\eta}{2} + \frac{1+\eta}{2}\sqrt{1 + \left[\frac{E}{2(1+\eta)G}\right]^2\left(\frac{c}{3a}\right)^2}\right\}.$$

Comme $\frac{c}{3a}$ est généralement petit, ce ne sera guère que pour les grandes valeurs de $\frac{E_z}{E_x}$ ou de $\frac{E}{G}$ que le second terme sous le radical, mesurant l'influence du glissement, sera notable, et que la quantité entre accolades différera sensiblement de l'unité.

Au reste si, ce qui arrivera le plus souvent, le second terme sous le radical n'excède pas $\frac{1}{3}$, on peut développer le radical, ce qui donne

$$(n'') \qquad R_0 = \text{ou} > \frac{6Pa}{bc^2}\left\{1 + \frac{1}{1+\eta}\left(\frac{E}{12G}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}.$$

Les valeurs du coefficient de $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ dans le second terme entre accolades sont données par la dernière ligne du tableau ci-dessus.

d.) On trouvera, dans les deux mêmes ouvrages cités (Mémoire sur la torsion, et édition de 1864 annotée des *Leçons* de Navier) les conditions de résistance permanente, établies de même,

d'un rivet posé à chaud, et qui, dans la construction en tôle où il est employé, se trouve sollicité à la fois à l'extension et au cisaillement ;

d'un rais de roue, pièce toujours comprimée longitudinalement, et sollicitée à son milieu à la rupture par glissement transversal (problème proposé par Poncelet) ;

d'un arbre de couche sollicité à la fois à la flexion et à la torsion, par deux engrenages ou deux courroies agissant sur lui en deux sens opposés, etc.

§ 38. — Comparaison de cette théorie analytique des déformations et des résistances des pièces solides avec la théorie ordinaire. — Bases d'applications ultérieures.

Les idées sur lesquelles on base la théorie ordinaire, telle qu'elle est appliquée dans la pratique, sont essentiellement différentes de celles qui nous ont dirigé dans les recherches ci-dessus. Si donc les résultats sont, pour une grande partie, en remarquable concordance, on doit en conclure que ces deux théories ne s'écartent pas essentiellement du possible, et qu'elles ramènent, d'une manière approximative et heureuse, tout problème à un autre plus simple qui peut, à la vérité, en différer légèrement, mais sans que la substitution de l'un à l'autre implique contradiction.

Cela s'applique spécialement au problème de la *flexion*. Dans la théorie ordinaire, on part de cette hypothèse fondamentale qu'il est permis de considérer toutes les sections transversales originairement planes comme restant planes après la déformation, et, de plus, de regarder ces sections planes comme restant normales aux fibres courbées. On a vu, par ce qui précède, que ces deux hypothèses sont loin de se vérifier dans la réalité. En outre, si l'on examine la chose de plus près, on voit immédiatement que ces mêmes hypothèses entraîneraient nécessairement la disparition des tensions latérales t_{xz}, t_{yz}, ce qui est tout à fait incompatible avec l'existence d'une force agissant à l'extrémité de la tige, parallèlement à la dernière section transversale. Mais, de plus, la théorie ordinaire porte d'avance en elle-même l'empreinte de l'imperfection, car lorsque l'on veut exprimer l'équilibre d'une portion de tige comprise entre une section transversale quelconque et la section transversale d'extrémité libre, on obtient, par cette théorie, une équation qui en constitue la base essentielle et qui exprime que la partie considérée du corps ne puisse pas tourner autour du centre de gravité de cette section transversale quelconque. Mais on sait que, même en supposant qu'il y ait symétrie par rapport au plan de flexion, il faut toujours trois équations pour définir l'équilibre d'un corps ou d'une portion de corps sous l'action de forces extérieures; on négligeait donc, jusqu'à présent, deux de ces équations.

Pour remédier, dans une certaine mesure, à cette imperfection, on abandonna l'hypothèse primitive, savoir : que dans une flexion produite par une force agissant dans la section transversale libre et parallèle-

ment à cette section, la ligne des centres de gravité des diverses sections n'éprouve ni extension ni compression. On admit qu'il ne se produisait aucune tension longitudinale entre la ligne des centres de gravité et une ligne dite *neutre* réunissant les uns aux autres tous les points où il ne se produisait aucune tension, car les tensions autres que celles qui s'exercent longitudinalement sont laissées de côté par cette théorie. Par l'introduction de cette ligne, on arrivait à établir une seconde condition d'équilibre (*); et il en manquait encore une. Mais la théorie ci-dessus, qui est rigoureuse, démontre l'impossibilité d'admettre que la ligne neutre, ou de tension longitudinale nulle, soit différente de la ligne des centres de gravité des sections. On a vu, lorsque la force appliquée transversalement à la tige est parallèle à un des deux axes principaux de la section transversale, que les points d'égale tension longitudinale se trouvent sur des cylindres hyperboliques ayant pour asymptotes des plans qui renferment les points où aucune tension longitudinale ne s'exerce. Ces plans sont la surface d'extrémité libre, et le plan qui est mené par la ligne des centres de gravité et le second axe principal. Ainsi, la ligne neutre, ou mieux, la surface neutre coïncide avec le plan mené par la ligne des centres de gravité, perpendiculairement au plan de flexion. (**)

(*) Clebsch fait sans doute allusion à quelques tentatives faites en Allemagne et inconnues en France, tentatives dont il va aussitôt signaler l'irrationalité en même temps temps que l'inutilité.

(**) Les hyperboles, coupes des cylindres dont l'auteur parle ici, sont celles de la page 164 et non celles de la page 161 ci-dessus.

Leur considération me paraît inutile à invoquer pour prouver que la *surface neutre* coïncide avec le plan zy, mené par la ligne z des centres de gravité des sections et par la perpendiculaire y au plan xz de flexion, car déjà l'auteur a prouvé, p. 163, *que les fibres situées, avant la flexion, dans ce plan yz ne subissent ni extension ni compression.*

C'est ce qui résulte également de la théorie dite ordinaire, ou fondée sur la supposition que les sections restent planes (ce qui, comme l'observe l'auteur, peut être approximativement admis lorsqu'il n'est question que de flexion sans torsion, et que les prismes ont une longueur très grande par rapport à leurs dimensions transversales). En effet, les portions égales de fibres contenues entre deux sections voisines primitivement parallèles ont pris, lorsque les plans de ces sections sont devenus légèrement obliques l'un à l'autre, des allongements et des accourcissements toujours proportionnels à leurs distances de celles qui n'en ont éprouvé aucun; et comme, suivant une remarque que Parent a faite avant Coulomb et Navier, l'équilibre de translation longitudinale exige qu'on ait zéro pour la somme algébrique des tensions et pressions qui leur sont proportionnelles, il faut bien qu'on ait zéro aussi pour la somme algébrique des produits des éléments superficiels de la section par leurs distances à la ligne coupée par les fibres qui ne sont ni comprimées ni étendues, ce qui exige bien que cette ligne passe par le centre de gravité de la section.

Sans recourir à la supposition bizarre à laquelle nous avons remarqué tout à l'heure que Clebsch fait allusion en la désapprouvant, on peut très bien compléter l'ancienne théorie en ce qui regarde le nombre des équations d'équilibre qui doit être de six au lieu de deux seulement. C'est ce que j'ai fait (avant mes recherches plus particulières de 1853-1855 que l'auteur cite) dans un Mémoire dont deux extraits (contenant tout sauf la suite des calculs) ont été insérés aux *Comptes rendus* des 30 octobre et 6 novembre 1843 (t. XVII, p. 942 et

Il est très remarquable que les équations fondamentales qui résultent de la considération des moments de rotation se retrouvent dans la théorie rigoureuse. Je veux parler des équations (64), p. 149, qui, après la substitution pour a_1, a_2, b_1, b_2 de leurs valeurs (86), p. 194, en fonction des sommes A, B de composantes, et des sommes A′, B′ de moments des forces extérieures, prennent les formes suivantes :

$$E\lambda^2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = B' - Az\,,$$

$$E\varkappa^2\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -A' - Bz\,.$$

Les seconds membres ne représentent rien autre chose que les moments de rotation des forces données par rapport aux axes principaux de la section transversale qui se trouve à la distance z de l'extrémité fixée. Pour le mettre en évidence, imaginons que nous appliquions, à l'origine des coordonnées, des forces égales à toutes les composantes X et Y des forces données, et en même temps des forces égales

1020). J'y supposais que les sections s'inclinent un peu sur l'axe de la pièce, au lieu de lui rester exactement normales, et qu'elles se gauchissent en paraboloïde hyperbolique, comme dans le prisme rectangle tordu d'après la solution de Cauchy, ce que j'ai reconnu, depuis, n'être tout à fait exact que pour le cylindre elliptique. Cela permettait, outre l'équation d'équilibre de forces longitudinales, d'en poser deux de forces transversales ou efforts tranchants, et de poser aussi, pour la première fois, trois équations de moments dont deux de flexion autour *des axes principaux* des sections, ce qu'a fait aussi Clebsch, comme on voit dans ce livre de 1852, et ce qu'ont fait également, depuis, M. Kirchhoff (1859), MM. Thomson et Tait (*Natural philosophy*, 1867), et M. Resal (*Traité de mécanique générale*, 1874). Ce même mémoire de 1843 embrassait, comme on peut voir, les pièces à double courbure, et prenait en considération un élément que Poisson a omis (*Traité de mécanique*, 2e édition 1833, nos 317 et 318), ce qui m'a permis d'aborder la solution de plusieurs problèmes, tels que la flexion qu'on fait subir à un anneau en *courbant son plan*, etc. On peut voir deux notes que j'ai insérées sur le même sujet aux *Comptes rendus*, 1er et 15 juillet 1844, t. XIX, p. 40 et 181, ainsi qu'une Note de Binet et une de Wantzell des 17 et 24 juin 1844, XVIII, 1116 et 1197 ; et aussi les nos xx et xxj de l'*Historique* mis en tête de l'édition de Navier citée de 1864 ; et encore, une note du 22 juin 1863 sur les flexions et torsions que peuvent éprouver les tiges courbes, sans qu'il y ait aucun changement dans la première ni dans la seconde courbure de leur axe ou fibre moyenne (*Comptes rendus*, 22 juin 1863, t. LVI, p. 1150).

Une chose restait à faire, à savoir de modifier les équations (18), (19), (20) du 6 octobre 1843 (dont l'une a été reproduite sous une autre forme à la fin du no 4 de la note du 1er juillet 1844, p. 45), de manière à les rendre applicables à la détermination des petits déplacements des points de l'axe d'une tige à double courbure ayant *d'autres sections transversales* quelconques *que des ellipses*, et où la petite influence des glissements transversaux dus aux efforts tranchants fût évaluée avec plus d'exactitude ou d'approximation que nous ne le faisions dans ces deux années-là, qui ont précédé celles de nos principales recherches.

C'est ce qui a été fait le 27 janvier 1879 (*Compte rendu*, p. 144-147) au no 3 d'une *Note sur une formule du moment de torsion*, où nous citons, en le modifiant, ce qu'ont présenté en 1859 et en 1878 M. Bresse et M. Resal sur le même sujet.

et de direction opposée. Les composantes X ont pour somme A, les composantes Y ont pour somme B, et ces forces, appliquées à l'origine, ont pour moments par rapport aux axes menés parallèlement à x et à y par le centre de gravité de la section transversale dont l'abscisse est z, les produits $-Az$ et $+Bz$. Les forces dans la direction opposée constituent, avec les forces données, des couples dont les moments par rapport aux axes x et y sont B′ et A′. Donc $B'-Az$ représente le moment de rotation des forces extérieures autour de l'axe parallèle aux x, et $A'+Bz$ leur moment de rotation autour de l'axe parallèle aux y. Ce dernier moment se trouve dans l'équation précédente avec un signe contraire; mais il est facile de voir que les deux moments qui forment les deux termes du second membre de cette équation deviennent positifs si au lieu de les compter dans le sens fixé précédemment, on les compte de manière à regarder comme positif un moment tel que la rotation correspondante ait pour effet d'amener l'axe longitudinal de la tige vers l'un des deux autres axes positifs.

Désignons par M_y, M_x les moments ainsi comptés, les équations ci-dessus deviennent :

$$(117)\quad \left\{\begin{aligned} E\lambda^2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -M_y, \\ E\varkappa^2\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= M_x. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ désignent les inverses des rayons de courbure des projections de la fibre courbe sur les deux plans de flexion. En effet, les valeurs exactes de ces inverses sont, comme on sait :

$$\frac{\frac{d^2x'}{dz'^2}}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{dx'}{dz'}\right)^2}\right)^3}, \qquad \frac{\frac{d^2y'}{dz'^2}}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dz'}\right)^2}\right)^3};$$

où l'on a

$$x' = x + u, \qquad y' = y + v, \qquad z' = z + w.$$

Mais, vu que x et y sont constants le long d'une même fibre, on peut poser, si l'on considère z comme la variable indépendante :

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1+\frac{\partial w}{\partial z}}, \qquad \frac{dy'}{dz'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{1+\frac{\partial w}{\partial z}};$$

ou, en négligeant $\frac{\partial w}{\partial z}$ devant l'unité,

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \frac{dy'}{dz'} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

d'où, aussi :

$$\frac{d^2x'}{dz'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dz'^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Ces dernières valeurs sont bien celles des inverses des rayons de courbure, lorsque, dans les formules rigoureuses, on néglige devant l'unité les carrés des petites grandeurs $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$.

Les équations (117) sont démontrées seulement pour le cas où des forces constantes agissent sur l'extrémité libre. Ce sera une tâche ultérieure de la théorie rigoureuse de donner des équations analogues pour des cas plus généraux. Jusqu'à présent, on n'y a pas réussi, et on devra, en attendant, continuer à se servir de ces équations lorsque des forces agissent à l'intérieur du corps, ou lorsque des forces isolées sont appliquées en des points différents. Il ne faut pas se dissimuler que ce procédé manque de rigueur ; mais dans un des paragraphes suivants, on montrera que lorsque les sections transversales sont très petites, il est cependant admissible.

Remarquons, encore, que dans l'établissement des équations (117) que nous venons d'écrire, et qui sont, disons-nous, la reproduction du (63 *d*) § 28, combinées avec (86), § 29, il est expressément supposé que le système des axes coordonnés coïncide avec les axes principaux de la section fixe contenant l'origine. Dans la théorie ordinaire, on se sert des mêmes équations (ou de la même équation), mais pour un système quelconque d'axes rectangulaires passant par le centre de gravité, et on détermine ce système de manière que l'un des moments de rotation M_x, M_y, par rapport à l'un des axes, s'évanouisse, de sorte qu'il ne reste qu'une seule équation. Voyons comment ce procédé se trouve en contradiction avec les équations (117) elles-mêmes, et comment, par conséquent, il est inadmissible (*).

(*) Cette faute a été commise par Navier (*Leçons*, nos 85 et 117). Elle a été signalée par M. Persy qui, dans son cours de 1834 à l'école de Metz, a très bien remarqué que l'équation unique de moments, posée autour de la ligne des fibres invariables, ne suffisait, pour assurer l'équilibre entre les forces intérieures et les tensions à travers une section, qu'autant que cette ligne est un de ses deux axes principaux d'inertie, ce qui exige que le couple qui fait fléchir soit parallèle à l'autre axe principal. J'ai fait voir, dans mon Mémoire cité d'octobre et novembre 1843, et ensuite au n° 42 de celui de 1853 sur la torsion, etc., que lorsque

Représentons-nous M_y et M_x comme les moments de deux couples tendant à produire des rotations autour des axes y et x. D'après les principes connus de la composition des couples, on peut les remplacer par un seul; pour cela, on porte chaque moment sur l'axe autour duquel il est pris (il faut observer que M_x, ordinairement négatif, doit être porté sur le côté négatif de l'axe des x) et on compose ces deux moments comme si c'étaient des forces : la résultante donne en grandeur et en direction le moment et l'axe du couple résultant. Soit $\mathfrak{M}$ ce moment et θ l'angle que fait son axe avec l'axe des y, on a :

$$M_y = \mathfrak{M} \cos \theta ; \qquad M_x = \mathfrak{M} \sin \theta.$$

Désignons par *plan de flexion* un plan mené par l'axe longitudinal, de telle sorte que la projection d'une fibre rectiligne quelconque sur un plan mené par l'axe longitudinal dans une direction perpendiculaire à celui-là, reste rectiligne. S'il n'y a que le moment M_x autour de l'axe x, le plan yz est le plan de flexion; si, au contraire, il n'y a que le moment M_y autour de l'axe y, c'est le plan xz qui devient le plan de flexion. D'après la théorie ordinaire, il faudrait que le plan de flexion fût toujours parallèle au plan du couple résultant. C'est ce qui se produit effectivement dans deux cas très simples : d'abord lorsque $\lambda = \varkappa$. Le plan de flexion existe encore dans ces conditions (c'est-à-dire les fibres courbées se trouvent encore contenues dans des plans) lorsque le rapport $\frac{M_y}{M_x}$ est indépendant de z et par suite lorsque l'angle θ est constant, comme cela a lieu, par exemple, lorsque les

---

cette condition n'est pas remplie, on obtient facilement et sans erreur ce qu'on cherche, c'est-à-dire, d'abord, la direction inconnue de la ligne des fibres invariables et celle du *plan de flexion* (différant du plan *de sollicitation à fléchir*), qui est perpendiculaire à cette ligne, en posant *deux équations* de moments ou d'équilibre de rotation autour des deux axes principaux d'inertie de la section, car 1° en les divisant l'une par l'autre, on trouve que le rapport entre la tangente de l'angle inconnu fait par le plan de flexion avec l'un de ces deux axes tranversaux et la tangente de l'angle *connu* que le plan du couple sollicitant fait avec le même axe, est égal au rapport des moments d'inertie de la section autour de l'autre axe et autour de celui-ci; et 2° en ajoutant les carrés des deux mêmes équations divisées par les moments d'inertie qui y entrent, on obtient immédiatement la flexion effective, sorte de résultante des flexions partielles autour des deux axes principaux. Et l'on se rend très bien compte, d'une manière élémentaire, de cette flexion *oblique* ou *deviée* que doit éprouver en général toute tige ayant une section dont les moments d'inertie autour de droites qu'on y trace par son centre de gravité ne sont pas tous égaux, en considérant qu'un pareil prisme (on peut se figurer, par exemple, qu'il se réduit à une feuille de métal) a un plan *de plus facile flexion* et un plan *de plus difficile flexion*, et que, s'il est sollicité par un couple dans une direction intermédiaire, le plan de flexion effective se rapprochera nécessairement du plan de plus facile flexion, en sorte qu'il ne coïncidera pas avec le plan du couple sollicitant à fléchir.

forces A, B agissent au centre de gravité de la surface d'extrémité. On a alors

$$(117\,a)\quad \begin{cases} M_y = A(l-z), & M_x = B(l-z), \\ \operatorname{tang}\theta = \dfrac{B}{A}, & \mathfrak{M} = R(l-z)\,. \end{cases}$$

où $R=\sqrt{A^2+B^2}$ est la force résultante. L'angle du moment résultant $\mathfrak{M}$ avec l'axe des y est le même que l'angle fait avec l'axe des x par la force résultante de celles B, A.

Examinons avec plus de détail ce cas particulier. Supposons qu'il existe un plan de flexion faisant un angle α avec le plan yz; rapportons les déplacements u, v, d'un point quelconque, non plus aux axes x et y, mais aux droites x', y', qui sont les intersections du plan xy avec le plan de flexion et avec le plan mené perpendiculairement à ce plan de flexion par l'axe longitudinal z. Les déplacements d'un point suivant ces directions sont alors :

$$u' = u\cos\alpha + v\sin\alpha\,,$$
$$v' = -u\sin\alpha + v\cos\alpha\,;$$

et, des équations

$$E\lambda^2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R\cos\theta\,(l-z)\,,$$

$$E\varkappa^2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial z^1} = R\sin\theta\,(l-z)\,,$$

il résulte

$$(118)\quad \begin{cases} E\sigma\dfrac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = R\left(\dfrac{\cos\theta\cos\alpha}{\lambda^2} + \dfrac{\sin\theta\sin\alpha}{\varkappa^2}\right)(l-z)\,, \\ E\sigma\dfrac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = R\left(-\dfrac{\cos\theta\sin\alpha}{\lambda^2} + \dfrac{\sin\theta\cos\alpha}{\varkappa^2}\right)(l-z)\,. \end{cases}$$

D'après la définition, les projections des fibres sur le plan OY'Z, perpendiculaire au plan de flexion, doivent être des droites; c'est-à-dire que l'inverse du rayon de courbure de ces projections $\dfrac{\partial^2 v'}{\partial z^2}$ doit s'évanouir, ce qui donne

$$(119)\quad \frac{\cos\theta\sin\alpha}{\lambda^2} = \frac{\sin\theta\cos\alpha}{\varkappa^2}.$$

Imaginons maintenant que l'on construise une ellipse dont les demi-axes aient pour directions celles des axes principaux d'inertie, et pour

longueurs λ et $\varkappa$, et que, sur cette ellipse, on cherche le point x, y où la normale est parallèle au plan de flexion. On aura

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\varkappa^2}=1, \qquad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{x}{\lambda^2}}{\frac{y}{\varkappa^2}}=-\operatorname{tang}\alpha.$$

ou, à cause de l'équation (119),

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{y}{x};$$

c'est-à-dire que le rayon vecteur du point cherché est dans la direction de la résultante.

La normale au plan de flexion est donc parallèle à la tangente menée à l'ellipse à l'extrémité du rayon vecteur dirigé suivant la résultante, c'est-à-dire que la direction de cette normale est conjuguée à celle de la résultante. On a, par suite, ce théorème :

Si, à partir du centre de gravité de la section, on porte, sur chacun de ses axes principaux d'inertie, une longueur égale au rayon de gyration autour de l'autre axe, et si, sur ces longueurs, prises comme demi-axes, on construit une ellipse, la force résultante, et la normale au plan de flexion correspondant, forment, dans cette ellipse, deux directions conjuguées.

On reconnaît qu'il y a réciprocité entre la direction de la résultante et celle de la normale au plan de flexion, c'est-à-dire qu'on peut les changer l'une dans l'autre. Mais ces directions ne peuvent devenir rectangulaires, et par conséquent la force résultante ne peut être située dans le plan de flexion, à moins qu'elle ne coïncide avec la direction de l'un des deux axes principaux.

De (119) on déduit :

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\cos\theta}{\lambda^2}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\lambda^4}+\frac{\sin^2\theta}{\varkappa^4}}}, \qquad \sin\alpha=\frac{\frac{\sin\theta}{\varkappa^2}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\lambda^4}+\frac{\sin^2\theta}{\varkappa^4}}};$$

et, par conséquent, la première équation (118) devient:

$$(120) \qquad E\sigma\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}=R(l-z)\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\lambda^4}+\frac{\sin^2\theta}{\varkappa^4}}$$

Cette équation donne la forme de la projection de la fibre sur le

plan de flexion (*). On voit qu'ici le facteur $\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\lambda^4}+\frac{\sin^2\theta}{\varkappa^4}}$ remplace la réciproque du carré d'un rayon de giration qui se trouve dans une formule de la théorie ordinaire, exacte seulement lorsqu'on a $\lambda=\varkappa$ ou lorsque $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ est zéro.

Tout ce qu'on vient de dire montre la nécessité *de partager chaque flexion en deux autres dont chacune est produite par les composantes de forces parallèles à un axe principal.*

La recherche de la fibre la plus tendue est en liaison rigoureuse avec ce qui précède. On a vu que cette fibre est celle pour laquelle la tension longitudinale t_{zz} a la plus grande valeur, et que les tensions transversales tangentielles t_{zx}, t_{zy} n'ont pas à être prises en considération (**). L'expression (65) de t_{zz} du § 23 :

$$t_{zz}=\mathrm{E}(a+a_1x+a_2y)+\mathrm{E}z(b_1x+b_2y)$$

se met sous la forme suivante, dès qu'on emploie les notations usitées précédemment :

$$(121)\qquad t_{zz}=\frac{\mathrm{C}}{\sigma}-\frac{x\mathrm{M}_y}{\lambda^2\sigma}-\frac{y\mathrm{M}_x}{\varkappa^2\sigma};$$

de sorte que la plus grande valeur que puisse avoir cette expression détermine la fibre la plus fortement tendue. Si on pose de nouveau

$$\mathrm{M}_y=\mathrm{A}(l-z),\qquad \mathrm{M}_x=\mathrm{B}(l-z),$$

on a vu au § précédent que la section transversale dangereuse était la section fixée ($z=0$), et que la fibre de tension maximum se détermi-

(*) Il est facile de voir que ces considérations sur le véritable plan de flexion des primes élastiques et sur son inclinaison par rapport au plan du couple qui sollicite à fléchir, auraient pu être présentées d'une manière plus simple, sans parler ni des valeurs en u, v, des deux courbures, ni des bras de levier $l-z$ des forces, ni des équations (63 *d*) et (65) du § 24. L'emploi, du reste intéressant, de l'ellipse d'inertie, n'était point nécessaire. Sans renvoyer au *Compte rendu* du 30 octobre 1843, p. 945, ni au Mémoire de 1853 sur la torsion (*Savants étrangers*, t. XIV, n° 42), on peut citer la note du n° 83, p. 53 des *Leçons* de Navier, où ce sujet est présenté d'une manière élémentaire.

(**) Ces tensions t_{zx}, t_{zy} n'ont, en effet, sur l'intensité de la plus grande *tension principale*, qu'une influence négligeable, parce qu'elles sont, aux points dangereux, très petites en comparaison de t_{zz}, lorsque la longueur de la tige est grande en comparaison de ses dimensions transversales.

Il en est autrement pour les tiges très courtes, surtout lorsque, comme dans les bois tendres (note finale du § 16 vers la fin) le rapport $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}$ entre les coefficients d'élasticité d'extension et de glissement est considérable. Je renvoie, pour ce sujet, à la fin de la Note finale du § 37, et aussi aux notes sur Navier ainsi qu'au Mémoire sur la torsion, qui y sont cités.

nait en menant, à la section principale, une tangente parallèle à la droite

$$\frac{Ax}{\lambda^2}+\frac{By}{\varkappa^2}=0.$$

Comme maintenant on a posé aussi

$$A=R\cos\theta, \qquad B=R\sin\theta,$$

cette équation devient

$$\frac{x\cos\theta}{\lambda^2}+\frac{y\sin\theta}{\varkappa^2}=0\,;$$

ou, en ayant égard à l'équation (119),

$$\frac{x}{y}=-\operatorname{tang}\alpha.$$

Cette droite n'est donc autre chose que la normale au plan de flexion.

Je rappelle encore que, dans la théorie ordinaire, on admet que la tangente à la ligne des centres de gravité, au point de cette ligne qui se trouve dans la section transversale *fixée*, reste parallèle à l'axe longitudinal primitif. Cela n'est pas rigoureusement exact, car les équations (72), § 25, p. 157, donnent

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0\,;$$

quantités qui ne sont autre chose que les projections sur les plans zx et zy d'un petit angle que fait, après les déplacements, l'axe de la tige avec la normale à la section fixe (*). Mais on peut remarquer qu'en les négligeant on ne commet pas une erreur importante; car ces deux quantités indépendantes de la longueur de la tige sont de l'ordre des dimensions transversales, et par conséquent les déplacements qu'elles régissent sont très petits par rapport aux autres. C'est une considération dont on a déjà fait un grand nombre d'applications.

La théorie ordinaire, même prise comme approximation, n'offre pas un accord aussi satisfaisant avec la théorie rigoureuse, en ce qui regarde la *torsion*.

Cela devait être. Dans la torsion, tous les déplacements des points sont de l'ordre des dimensions transversales des tiges, et il est d'une

(*) Cette observation avait été faite au Mémoire cité de 1843.

importance majeure de déterminer aussi exactement que possible ceux qui se produisent dans l'étendue d'une même section. La formule dite *ordinaire*, pour le moment de torsion, donne pour ce moment le coefficient d'élasticité de glissement (§ 3) $G = \frac{E}{2(1+\eta)}$ multiplié par le rapport $\frac{\psi}{l}$ de l'angle de torsion ψ à la longueur l, et par le moment d'inertie $\int (x^2+y^2)\, d\sigma$ de la section transversale autour de son centre ou autour de l'axe longitudinal; cette formule est juste pour une section circulaire, ainsi qu'on l'a vu. Mais, si la section transversale s'écarte notablement de cette forme, il faut effectuer la détermination de la fonction B_0 des coordonnées transversales x, y, et calculer la torsion au moyen de la théorie rigoureuse.

A cette occasion, je ne puis passer sous silence la manière singulière dont quelques auteurs ont présenté la théorie de la torsion, et qui en changerait étrangement le principe. Je veux parler de la considération des tensions longitudinales que la torsion peut faire éprouver aux fibres, et de l'établissement, dans certains traités, d'une formule fondée sur l'hypothèse que la résistance à la torsion vient uniquement des résistances que ces fibres opposent à leur allongement en prenant la forme d'hélices. En examinant de près cette hypothèse, on voit que les tensions longitudinales ainsi considérées sont des quantités d'un ordre supérieur de petitesse; l'expérience prouve en effet que l'on n'a besoin d'exercer aucune force de traction pour conserver à un prisme tordu sa longueur primitive (*).

Ce n'est pas le seul exemple où, faute de s'être fait une idée juste

---

(*) Navier (article V, ligne 5 du n° 156 de ses *Leçons*), et Morin, semblent avoir eu un moment cette idée fausse, mais ils n'en ont tiré aucune conséquence inexacte.

Depuis longtemps Thomas Young (*A course of lectures on natural philosophy*, 1807, vol. I, lecture XIII, p. 139) avait remarqué que si la résistance à la torsion résidait dans l'action des fibres étendues vers la surface latérale et (pour l'équilibre longitudinal) contractées vers l'intérieur, cette résistance serait *comme le cube* de la quantité très petite $\theta = \frac{\psi}{l}$ qui mesure la torsion par unité de longueur; et c'est ce qui résulte d'un calcul que j'ai fait au § 2 de la note du n° 156 (page 240) de l'édition de 1864 de Navier. Young en concluait que cette résistance devait tenir à l'*adhésion latérale* ou tangentielle qui s'oppose à ce qu'il nomme la *détrusion*, et qui est ce que nous appelons le glissement des sections les unes devant les autres; force dont le moment est proportionnel à la *première puissance* de la torsion θ ou $\frac{\psi}{l}$ et devant laquelle, par conséquent, l'autre est tout à fait négligeable toutes les fois que la torsion est petite. Je montre au reste, à la même note, comme explication, que les glissements parallèles aux sections équivalent aux dilatations et contractions des files de molécules formant des hélices inclinées de 45 degrés, ce qui doit donner effectivement des moments de résistance incomparablement plus forts que ceux des résistances des files longitudinales.

sur les ordres relatifs de grandeurs des quantités très petites rencontrées dans les calculs, l'on se trouve conduit aux erreurs les plus dangereuses. Quelques-uns des auteurs, dont nous parlons, vont même plus loin : ils ne se contentent pas de cette considération simple, et, dans le fait, assez naturelle, des résistances des fibres à leur allongement ; mais, par un singulier tour de passe-passe, et par des divisions impossibles, ils tirent même de cette tension longitudinale infiniment petite une composante d'un ordre de petitesse moindre, et la formule de la torsion se trouve toute faite. L'autre composante de tension, celle qui dépend du coefficient G, est laissée de côté, négligée sans examen, et l'on ne s'étonne pas le moins du monde de trouver, dans la formule de torsion, au lieu de ce coefficient spécial G dont la valeur, dans les corps isotropes, est $\frac{E}{2(1+\eta)}$ comme on a vu au § 5, la moitié du module d'élasticité E. On prend l'habitude d'attribuer ces différences plutôt à une imperfection de la théorie qu'à une irrégularité dans son emploi. Serait-ce, par hasard, parce que cette confusion se produit malheureusement trop souvent, que la théorie est si dépréciée dans certains milieux?

Depuis plusieurs années, j'ai l'habitude, dans mes cours, de ramener, d'une manière élémentaire, la théorie de la torsion à ses vrais principes ainsi que je le ferai voir plus loin. Le véritable fondement de la théorie de la torsion réside en ceci, que les diverses sections transversales d'une fibre sont déplacées parallèlement l'une à l'autre dès qu'il se développe une force élastique dont la grandeur se détermine d'après le § 5, où il a été traité des actions tangentielles et des déplacements par glissement. Bien qu'on ne réussisse pas toujours à pousser la théorie rigoureuse assez loin pour qu'elle donne des résultats simples et frappants, elle nous dirige cependant vers les vrais principes des phénomènes, et ce service n'est pas un des moins importants entre ceux qu'elle peut rendre.

CHAPITRE III

PLAQUES D'ÉPAISSEUR QUELCONQUE

§ 39. — De l'équilibre des plaques qui ne sont soumises à des forces extérieures que sur leurs faces latérales cylindriques.

La voie que nous avons suivie dans les études précédentes consiste à imaginer certains états d'équilibre et à chercher les problèmes qui peuvent naturellement conduire à ces états. Aux §§ 22 et suivants, nous avions un corps dont la dimension longitudinale était prépondérante, et dans lequel nous admettions, comme caractère général des états d'équilibre considérés, l'absence de toute force de pression latérale (*). Nous pouvons maintenant, par des considérations analogues, imaginer des corps cylindriques dont les dimensions transversales soient prédominantes, et prendre comme caractère général des états d'équilibre que nous étudierons, l'*absence de toute force de tension dans une direction perpendiculaire à leurs bases* (**).

(*) La même analyse aurait pu être étendue, presque sans modification, au cas où la surface supporterait une pression normale uniforme, comme celle de l'atmosphère ou de tout autre fluide supposé en repos et où toutes les faces planes intérieures, parallèles aux arêtes, supporteraient normalement, et par unité superficielle, la même pression.

(**) Les solutions, données aux §§ 23 à 37, excepté le § 28, du problème de la détermination des états d'équilibre des prismes où les faces tant latérales qu'intérieures parallèles aux arêtes ne supportent aucune tension transversale, ($t_{xx} = 0$, $t_{yy} = 0$, $t_{xy} = 0$ partout) sont rigoureuses, *quel que soit le rapport de la longueur aux deux autres dimensions;* ces prismes peuvent être réduits à de simples tourteaux ou plaques sans que les formules de ces §§ cessent de fournir exactement les déplacements u, v, w de leurs points, pourvu que les forces qui étendent, contractent, fléchissent ou tordent, soient appliquées, comme nous avons dit, *seulement sur leurs bases*, et distribuées en leurs divers points de la manière régie par les expressions trouvées de t_{zz}, t_{zx}, t_{zy}; forces qui peuvent avoir, au reste, une résultante et un moment résultant donnés quelconques.

Seulement, l'emploi de ces solutions pour la pratique, ou, comme dit l'auteur au § 28, pour des *problèmes réels* où les forces agissant vers les extrémités et ayant cette résultante et ce moment sont *appliquées d'une autre manière et distribuées autrement*, ne peut donner des résultats suffisamment approximatifs que lorsque la dimension longitudinale du prisme ou du cylindre est *prépondérante* comme il l'exprime ici; car ce n'est alors qu'à de certaines distances, généralement inférieures aux dimensions transversales, mais du même ordre de

Imaginons une plaque cylindrique ou prismatique, dont l'épaisseur ne soit pas très petite, soumise exclusivement à des forces qui agissent sur sa face latérale contournante. Prenons encore pour axe des z son axe de figure, perpendiculaire à ses bases, et plaçons l'origine au milieu de son épaisseur, de manière que le plan xy la divise en deux moitiés égales. Toute normale aux deux faces ou bases de la plaque est l'axe des z lui-même ou une de ses parallèles, de sorte que, dans les formules qui s'étendent à ces parties de la surface, on a, p et q étant comme aux §§ précédents, les angles de la normale à un élément de surface avec les x et les y,

$$\cos p = 0, \qquad \cos q = 0;$$

et comme aucune force extérieure ne doit agir sur ces deux faces, les conditions de limite, pour leurs points, deviennent

$$(121\,a) \qquad t_{xz} = 0, \qquad t_{yz} = 0, \qquad t_{zz} = 0.$$

Ces équations ne s'appliquent tout d'abord qu'aux valeurs de z correspondant aux bases ou faces extrêmes de la plaque ; mais j'examinerai seulement *les états d'équilibre dans lesquels elles sont satisfaites en tous les points du corps*. On voit qu'alors les forces agissant sur les faces latérales cylindriques ne peuvent avoir aucune composante parallèle à l'axe des z, c'est-à-dire aucune composante normale aux bases, parce que, s'il en existait une, les tensions t_{xz}, t_{yz} que nous supposons nulles partout, ne le seraient point, au moins sur les bords de la plaque.

---

grandeur, que tout se règle, dans le prisme ou cylindre, conformément aux formules trouvées pour les déplacements et les tensions.

Tout l'artifice, ou toute l'idée de la position et de la solution du problème multiple auquel Clebsch veut bien donner mon nom, est là.

De même, les solutions que l'auteur va donner aux §§ 39 à 46 pour des *plaques* où, au contraire, on suppose qu'il ne s'exerce aucune force sur les bases ni sur les sections qui leur sont parallèles ($t_{zz} = 0$, $t_{zx} = 0$, $t_{zy} = 0$ partout) seront rigoureuses, *même pour des prismes très longs* ; et ce qu'il trouvera pour les divers déplacements u, v, w sera exact, sous la condition que les forces extérieures seront appliquées seulement sur la surface latérale et distribuées comme l'indiqueront les formules trouvées pour t_{xx}, t_{yy}, t_{xy}. Mais si l'on veut, pour le besoin de quelque problème pratique, les appliquer quand les forces agissant vers les bords sont autrement appliquées et distribuées, l'approximation ne suffira que quand les prismes se réduiront réellement à des plaques, ou quand les dimensions transversales, comme dit Clebsch, prédomineront.

C'est un double point qui se trouvera éclairci à la 2e partie où il sera question de corps dont une ou deux dimensions sont très petites.

Ajoutons toutefois que déjà, au numéro 6 et à tous ceux de 8 à 22 de notre Note de la fin du § 45, se trouveront des solutions exactes dans lesquelles les tensions tangentielles intérieures t_{zx}, t_{zy} ne seront pas nulles.

Ces conditions ou données (121a) réduisent les trois équations générales (24), § 12, de l'équilibre d'élasticité d'un corps solide dans l'intérieur duquel aucune force extérieure n'est supposée exercer une action sensible (ce qui en annule les derniers termes X, Y, Z), aux deux suivantes :

$$(121\,b) \qquad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0,$$

Mettant, pour les composantes de tensions t_{xx}..... t_{xy}, dans (121a) et (121b) leurs expressions qui sont, la matière de la plaque étant supposée avoir une égale contexture dans les divers sens transversaux ou parallèles aux xy (*),

$$(121\,c)\quad \left\{ \begin{array}{ll} t_{xx} = (2f+f')\dfrac{\partial u}{\partial x} + f'\dfrac{\partial v}{\partial y} + d'\dfrac{\partial w}{\partial z}, & t_{yz} = d\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ t_{yy} = f'\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2f+f')\dfrac{\partial v}{\partial y} + d'\dfrac{\partial w}{\partial z}, & t_{zx} = d\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ t_{zz} = d'\dfrac{\partial u}{\partial x} + d'\dfrac{\partial v}{\partial y} + c\,\dfrac{\partial w}{\partial z}, & t_{xy} = f\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right); \\ \text{avec} \quad a = b = 2f + f'. & \end{array} \right.$$

Cette substitution des (121c) dans les (121a) nous donnera les re-

---

(*) Ces expressions sont celles (h) d'*isotropie seulement transversale* empruntées au numéro 13, p. 77 de la Note finale du § 16, avec les valeurs (28) $\frac{\partial u}{\partial x}$,..... $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ des six déformations élémentaires ∂_x.... g_{xy} données au § 13, p. 49.

Nous ne pouvons en effet ici nous contenter, comme aux §§ 22 [form. (61)], 23, [form. (63)] et autres jusqu'à 38, relatifs aux tiges, de considérer le module $E = E_z$ d'extension longitudinale, celui $G = d = e$, de glissement dans les sens transversaux, et le rapport η des contractions latérales aux extensions longitudinales qu'elles accompagnent. Il faudra, pour les plaques, en introduire d'autres relatifs à des sens différents, ainsi qu'on a dit à la Note du n° 16 et qu'on verra par les équations (132 a) et suivantes, afin d'embrasser, comme aux §§ cités le cas habituel d'une contexture autre dans le sens longitudinal que dans les sens transversaux.

Mais pour arriver à ces formules et équations (132 a), qui ne différeront de celles de Clebsch que par quelques accents, il nous est nécessaire d'invoquer les formules de la note citée du § 16 et de modifier un peu la rédaction de Clebsch. Nous le ferons en suivant presque pas à pas sa marche, sans plus de complication dans les calculs. On verra même, si l'on compare ce qui suit avec son texte, que nous n'avons pas besoin de faire arbitrairement, comme il l'a fait avant son équation (128), nulle une certaine constante C affectant primitivement z^5 dans sa première expression w, et dont il n'a pas reconnu de prime abord la nullité obligée, parce qu'il ne paraît pas avoir aperçu la nécessité, que nous démontrons, de $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = 0$.

lations

(122) $$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$

(123) $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

et la même substitution dans les (121 *b*) nous fournira les équations d'équilibre

(124) $$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{f}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mathrm{d}'\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0,\\ &\mathrm{f}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mathrm{d}'\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=0.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des deux premières (122) de ces cinq égalités, on peut éliminer u et v des trois autres, différentiées par rapport à z.

Or je dis qu'il en résultera

(125) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0.$$

En effet, cette élimination de u et de v change les (123) et (124) en

(126) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\ &(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\mathrm{d}'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0,\\ &(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\mathrm{d}'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Mettant dans les deux dernières de ces équations, à la place du binôme différentiel entre parenthèses, sa valeur $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ donnée par la première, on a, en divisant par la quantité constante $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\left(2\mathrm{f}+\mathrm{f}'-\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{c}}\right)$, précisément les deux premières (125).

Quant à la troisième (125), elle résulte de ce que, si l'on ajoute ensemble les deux (124) différentiées respectivement par rapport à x et à y, et si l'on remplace ensuite le binôme $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ par sa valeur (123) $-\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{\partial w}{\partial z}$, on a, en divisant tout par la constante $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\left(2\mathrm{f}+\mathrm{f}'-\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{c}}\right)$,

(126 *bis*) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

c'est-à-dire la nullité du premier membre, différentié par rapport à z, de la première des trois égalités (126). Donc son second membre, différentié de même, est nul aussi, ce qui fournit la troisième des égalités annoncées (125) (*).

Nous pouvons donc, C étant une constante à déterminer ultérieurement, poser

$$(126\,a)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\mathrm{C}$$

On en tire, par intégration, F et f étant deux fonctions arbitraires de x, y, et le terme $-\mathrm{C}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{x^2+y^2}{4}$ étant distrait de la seconde dans la seule vue d'obtenir ensuite pour sa détermination une équation d'une forme plus simple :

$$(126\,b)\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\mathrm{C}z - F;$$

$$(126\,c)\qquad w = -\frac{\mathrm{C}z^2}{2} - zF + f - \mathrm{C}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{x^2+y^2}{4}.$$

En substituant dans l'équation (126 *bis*) la valeur (126*b*) de $\frac{\partial w}{\partial z}$, on voit que la fonction inconnue F doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(127)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Et, en substituant les valeurs (126*b* et *c*) de $\frac{\partial w}{\partial z}$ et de w dans la première (126), on voit que l'autre fonction f doit satisfaire à

$$(128)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Les deux équations (122) $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ donnent ensuite par substitution de (126*c*) et intégration, φ et ψ étant de nouvelles fonctions arbitraires de x, y, à déterminer ultérieurement :

$$(129)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{z^2}{2}\frac{\partial F}{\partial x} - z\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{C}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{x}{2}\right) + \varphi, \\ v &= \frac{z^2}{2}\frac{\partial F}{\partial y} - z\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \mathrm{C}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\frac{y}{2}\right) + \psi. \end{aligned}\right.$$

(*) Ces trois égalités (125), bases de l'analyse qui suit, relative aux plaques d'épaisseur quelconque, ou aux prismes sollicités seulement sur leurs faces latérales, nous paraissent exiger, pour être la conséquence de (121 *a*) $\mathrm{t}_{xz} = 0$, $\mathrm{t}_{yz} = 0$, $\mathrm{t}_{zz} = 0$, l'égalité de contexture dans les sens transversaux. Je n'ai pu les obtenir en regardant la contexture régie seulement par les équations (*g*) de simple symétrie de contexture en trois sens de la Note du § 16.

Les expressions (126c), (129), obtenues ainsi pour u, v, w, satisfont identiquement aux deux conditions (122). Quant à la condition (125), si on les y introduit aussi, l'on a une condition de plus, portant sur les deux fonctions nouvelles φ et ψ; condition qui, eu égard aux (127), (128), est exprimée par la première des (129b) que nous allons poser; et, en introduisant également ces expressions (125), (126c), (129) dans les équations d'équilibre (124), où on aura mis pour $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ sa valeur (125), l'on obtient, en ayant égard à ce que les dérivées soit en x, soit en y des premiers membres binômes des équations (127), (128), sont nulles, et en se servant, ce qui abrège, de ce coefficient ou module d'élasticité d'extension a_1, propre aux éléments des plaques (parallèles à leurs faces), qui a été indiqué d'avance au n° 16 *bis* de la Note de la fin du § 16, et que nous emploierons surtout aux grandes Notes des §§ 45 et 73, c'est-à-dire en faisant :

$$(129\,a)\qquad \mathrm{a}-\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{c}}=2\mathrm{f}+\mathrm{f}'-\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{c}}=\mathrm{a}_1\,,$$

on obtient, disons-nous, les trois équations suivantes :

$$(129\,b)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}F\,,\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\left(\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}-1\right)\frac{\partial F}{\partial x}=0\,,\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}\left(\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}-1\right)\frac{\partial F}{\partial y}=0\,.\end{aligned}\right.$$

Si l'on différentie la seconde de ces équations par rapport à x, la troisième par rapport à y, et si on les ajoute, en tenant compte de la première, on retrouve l'équation (127) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$, propre à déterminer F. Cette équation (127) est donc contenue dans les trois que nous venons d'écrire; on peut, par conséquent, se servir de la première des (129b) pour éliminer F des deux autres, qui deviennent, alors,

$$(129\,c)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left(\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}-1\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}=0\,,\\&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\left(\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{f}}-1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on détermine par ces deux équations et par celle (128), en f, les trois fonctions de x, y, appelées f, φ, ψ, on aura satisfait à toutes les conditions du problème.

Nous pouvons donc exprimer les déplacements qui se produisent

dans les états d'équilibre considérés, par les formules suivantes en φ, ψ, f, qui ne sont autre chose que celles (129) et (126c) où l'on substitue à F sa valeur en φ, ψ tirée de la première (129b) :

$$(130)\quad\left\{\begin{aligned} u &= \frac{d'}{c}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)+\varphi-z\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{c}{d'}\frac{Cx}{2}\right),\\ v &= \frac{d'}{c}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\psi-z\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{c}{d'}\frac{Cy}{2}\right),\\ w &= -\frac{Cz^2}{2}-\frac{d'}{c}z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+f-\frac{c}{d'}C\frac{x^2+y^2}{4}. \end{aligned}\right.$$

Mettons ces expressions (130) en φ, ψ, f et C à la place de u, v, w dans les deux premières et dans la dernière des six formules (121c), page 297, des composantes de tensions, nous pourrons réunir en une seule, soit dans l'expression de t_{xx}, soit dans celle de t_{yy}, les deux parties provenant de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de $\frac{\partial v}{\partial y}$ qui seront affectées de $\frac{d'}{c}\frac{z^2}{2}$, vu que l'on a, en ajoutant les deux équations (129c) différentiées respectivement en x et en y,

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)=0\,;$$

ce qui permet de mettre l'un des deux binômes du troisième ordre à la place de l'autre en changeant son signe. Et nous pourrons de même, vu (128), écrire à volonté $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ pour $-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ou réciproquement. Nous obtiendrons de cette manière :

$$(131)\quad\left\{\begin{aligned} t_{xx} &= \frac{fd'}{c}z^2\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right)+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(a_1-2f)\frac{\partial\psi}{\partial y}-2fz\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{c}{fd'}(a_1-f)\frac{C}{2}\right],\\ t_{yy} &= \frac{fd'}{c}z^2\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)+(a_1-2f)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_1\frac{\partial\psi}{\partial y}-2fz\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{c}{fd'}(a_1-f)\frac{C}{2}\right],\\ t_{xy} &= \frac{fd'}{c}z^2\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right)+f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-2fz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}. \end{aligned}\right.$$

φ, ψ, f étant astreints à vérifier les deux équations (129c) ainsi que celle (128) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Si nous mettons pour a_1, pour f, pour $\frac{c}{d'}$, qui entrent dans les équations (130), (131), leurs valeurs données par les formules (z), p. 84, du n° 16 *bis* de la Note de la fin du § 16, en fonction du module $E'=E_x=E_y$ d'élasticité *transversale,* et des rapports $\eta'=\eta_{xy}=\eta_{yx}$,

$\eta'' = \eta_{xz} = \eta_{yz}$ de contractions aux dilatations produites dans des sens qui leur sont perpendiculaires, et si nous faisons, C′ étant une autre constante,

$$C = \eta'' C',$$

les formules (130) deviennent :

$$(132)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\eta''}{1-\eta'}\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) + \varphi - z\left[\dfrac{\partial f}{\partial x} - (1-\eta')\dfrac{C'x}{2}\right], \\ v = \dfrac{\eta''}{1-\eta'}\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \psi - z\left[\dfrac{\partial f}{\partial y} - (1-\eta')\dfrac{C'y}{2}\right], \\ w = -\dfrac{\eta''}{1-\eta'}\, z\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + f - \dfrac{\eta'' C z^2}{2} - (1-\eta')\, C'\dfrac{x^2+y^2}{4}\,; \end{cases}$$

et celles (131) se réduisent aux suivantes :

$$(132\,a)\quad \begin{cases} t_{xx} = \dfrac{E'}{1+\eta'}\left\{\dfrac{\eta''}{1-\eta'}\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right) + \dfrac{1}{1-\eta'}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta'\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) - z\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (1+\eta')\dfrac{C'}{2}\right]\right\}, \\ t_{yy} = \dfrac{E'}{1+\eta'}\left\{\dfrac{\eta''}{1-\eta'}\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right) + \dfrac{1}{1-\eta'}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \eta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - z\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (1+\eta')\dfrac{C'}{2}\right]\right\}, \\ t_{xy} = \dfrac{E'}{1+\eta'}\left\{\dfrac{\eta''}{1-\eta'}\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) - z\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}; \end{cases}$$

où l'on peut, si on désire se débarrasser du coefficient ou de la fraction numérique η'', plus difficile à mesurer que $\eta' = \eta_{xy}$ et $\eta = \eta_{zx} = \eta_{zy}$, faire, conformément à la première formule (x) de la même Note du § 16,

$$\eta'' = \frac{E'}{E}\eta = \frac{E_x}{E_z}\eta_{zx}.$$

Et les équations différentielles (129c) deviennent simplement, en y joignant celle (128),

$$(132\,b)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (1-\eta')\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (1+\eta')\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + (1-\eta')\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1+\eta')\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (*) \end{cases}$$

(*) Toutes ces expressions et équations applicables à une plaque d'une matière dont la

C'est au moyen des expressions (132 a) des composantes de tension que l'on exprimera les conditions à satisfaire à la paroi cylindrique.

Si la normale, en un point de cette paroi, dirigée vers l'extérieur, fait avec l'axe des x l'angle p, il faut, dans les équations (25), page 46, $t_{xx} \cos p + \ldots$, ou (34 f), page 112, faire

$$\cos q = \sin p, \qquad \text{et} \;\; \cos r = 0\,;$$

Et si X et Y sont les composantes parallèles aux axes x, y, de la force extérieure agissant sur ce point (on a vu plus haut que la troisième composante, parallèle aux z, doit s'évanouir), on doit avoir, à la surface, les équations

$$(133) \quad \begin{cases} X = t_{xx} \cos p + t_{xy} \sin p, \\ Y = t_{xy} \cos p + t_{yy} \sin p\,; \end{cases}$$

dans lesquelles les t doivent être remplacés par leurs valeurs (132 a).

Ces équations doivent être satisfaites, quel que soit z, dans tous les points de la paroi cylindrique. Il en résulte que X, Y ne peuvent être des fonctions choisies arbitrairement, et qu'au contraire il est nécessaire que les forces extérieures soient réparties d'une manière déterminée pour que les états d'équilibre supposés puissent se produire. On voit tout d'abord, d'après les expressions (132 a), que les tensions t ne contiennent que la première et la seconde puissance de z; les expressions des forces X, Y agissant sur la surface latérale, et auxquelles ces tensions doivent faire équilibre, ne peuvent contenir non plus que ces deux puissances de z, et l'on doit avoir, X_0, Y_0, $X_1, \ldots$, étant six quantités indépendantes de z,

$$(134) \quad \begin{cases} X = X_0 + X_1 z + X_2 z^2, \\ Y = Y_0 + Y_1 z + Y_2 z^2. \end{cases}$$

Si l'on introduit les expressions (132 a) des tensions dans celles (133) des forces X, Y agissant sur la surface, on trouve, en comparant leurs valeurs à celles (134) et en égalant les coefficients des mêmes puis-

---

contexture n'est pas la même dans le sens de son épaisseur que dans les sens latéraux ou parallèles à ses bases, deviennent, quand on fait $E' = E$, $\eta' = \eta'' = \eta$, identiques à celles de Clebsch relatives au seul cas fort rare d'une isotropie complète et qui, comme on voit, ne sont pas plus simples.

sances de z, les équations suivantes :

$$
(135)\left\{
\begin{aligned}
X_0 &= \frac{E'}{1+\eta'}\left\{\frac{1}{1-\eta'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\eta'\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\cos p+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\sin p\right\},\\
Y_0 &= \frac{E'}{1+\eta'}\left\{\frac{1}{1-\eta'}\left(\eta'\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\sin p+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\cos p\right\},\\
X_2 &= \frac{E'\eta''}{2(1-\eta'^2)}\left\{\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2\partial y}\right)\cos p+\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\partial y^2}\right)\sin p\right\},\\
Y_2 &= \frac{E'\eta''}{2(1-\eta'^2)}\left\{\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right)\sin p+\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\partial y^2}\right)\cos p\right\},\\
X_1 &= -\frac{E'}{1+\eta'}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-(1+\eta')\frac{C'}{2}\right]\cos p+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin p\right\},\\
Y_1 &= -\frac{E'}{1+\eta'}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-(1+\eta')\frac{C'}{2}\right]\sin p+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos p\right\};
\end{aligned}\right.
$$

où l'on pourrait remplacer, comme on a vu, $\frac{E'}{1+\eta'}$ par $2f = 2G_1$, $\frac{E'}{1-\eta'^2}$ par a_1, et η'' par $\frac{E'}{E}\eta$ (Note du § 16, form. (z) et (r), p. 84 et 80).

Les six grandeurs X_0, Y_0, X_1..... elles-mêmes ne peuvent pas non plus être données arbitrairement, car les équations de condition qu'on vient d'écrire, au nombre de six, ne peuvent pas, en général, être satisfaites à la fois par trois fonctions f, φ, ψ, pour la détermination de chacune desquelles il suffit ordinairement d'une seule équation.

§ 40. — Discussion des états d'équilibre représentés par ces formules. — Considération, en premier lieu, de l'extension uniforme de la plaque.

Remarquons tout d'abord que dans les six équations de condition (135) aussi bien que dans les équations (132), servant à déterminer φ, ψ et f, la fonction f se montre entièrement séparée des fonctions φ et ψ; mais, d'après les expressions (132) et (132a) des déplacements et des tensions, on voit qu'elle est liée à la constante arbitraire C'. Les états d'équilibre exprimés par les formules précédentes se divisent donc en deux catégories, à l'une desquelles correspondent les termes dépendant de f et de C', et à l'autre, ceux qui dépendent de φ et de ψ. Pour déterminer ce que sont ces états d'équilibre, il suffit d'observer lesquelles des portions des valeurs (134) des forces X, Y produisent l'un des deux états ou l'autre. Les états d'équilibre qui correspondent aux fonc-

tions φ, ψ dépendent seulement de X_0, Y_0, X_2, Y_2, car dans les expressions (132*b*) des tensions, ces fonctions φ, ψ ne sont affectées que des puissances 2 et zéro de z. Ces états se produisent ainsi lorsque

$$(135\ bis)\qquad X = X_0 + X_2 z^2\ , \qquad Y = Y_0 + Y_2 z^2\ .$$

Comme ces expressions ne changent pas lorsque z se change en $-z$, on voit que les forces extérieures sont, dans ce cas, symétriquement réparties sur la surface du cylindre, des deux côtés du plan xy, qui coupe au milieu sa hauteur comme on a dit. Elles exercent donc, en réalité, une *traction sans torsion* et même sans aucune flexion de la surface moyenne. Les valeurs correspondantes des déplacements sont, d'après (130) et (132), de la forme

$$(136)\qquad u = u_0 + u_2 z^2\ , \quad v = v_0 + v_2 z^2\ , \quad w = -w_1 z\ ,$$

où u_0, v_0, u_2, v_2, w_1 ne dépendent que de x et y. Les points de la surface moyenne $z = 0$ sont demeurés sur cette surface plane, puisque w s'annule avec z.

Le caractère général de l'état que ces déplacements amènent est celui de *l'extension*. Les fibres primitivement parallèles à l'axe des z sont courbées, et, d'après les équations générales du § 25, page 158,

$$x' = x + u'\ , \qquad y' = y + v'$$

en x', y', z', coordonnées après les déplacements opérés, on a les équations suivantes pour celles, après les déplacements, des fibres de la plaque dont nous nous occupons; équations où comme dans celles (74), x et y, coordonnées primitives, doivent être considérées comme des constantes :

$$(137)\qquad \begin{cases} x' = x + u_0 + u_2 z'^2 \\ y' = y + v_0 + v_2 z'^2 \end{cases}$$

La courbe représentée par ces équations est une parabole dont le sommet ($x' = x + u_0$, $y' = y + v_0$) se trouve dans la section médiane $z = z' = 0$. Le plan de cette parabole, ainsi que la droite qui lui est tangente à son sommet, sont perpendiculaires au plan de cette même section. En effet, les équations (137), dont chacune ne contient que deux des trois variables x', y', z', représentent les projections de la courbe sur les plans yz et xz, et ces projections sont manifestement des paraboles ayant leur sommet dans la section médiane. A ce sommet, l'on a $\frac{\partial x'}{\partial z'} = 2u_2 z' = 0$; $\frac{\partial y'}{\partial z'} = 2v_2 z' = 0$.

Si, entre ces deux équations, on élimine z' pour avoir la projection de la courbe sur la surface médiane, qui est le plan xy, on obtient :

$$v_2 x' - u_2 y' + v_2 (x + u_0) - u_2 (y + v_0) = 0 ;$$

ce qui est bien l'équation d'une droite et qui montre que la courbe se trouve, comme nous l'avons dit, dans un plan perpendiculaire à la section médiane.

Parmi ces états d'équilibre, il est à propos de remarquer particulièrement ceux que l'on peut désigner sous le nom d'*état d'extension simple*. Ce sont ceux pour lesquels u et v *ne dépendent pas de* z. On a, pour ces états d'équilibre, en égalant à zéro les coefficients de z^2 dans les expressions (130) de u et de v,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right), \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right).$$

L'expression $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$ est donc constante. En la désignant par $\varkappa$, on a, d'après (129a) :

$$(138) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varkappa , \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 , \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 .$$

Ces équations ne se contredisent pas; les états d'équilibre ainsi définis sont donc, en général, possibles.

On peut donner facilement aux équations (138) une forme plus simple. En effet si, dans la seconde, on remplace $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ par sa valeur tirée de la première, et si l'on fait de même dans la troisième pour $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, il reste :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 .$$

Par conséquent, l'expression $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$ est également constante. Si on la désigne par $\varkappa'$, on a, au lieu des équations (138), les suivantes :

$$(139) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{une constante } \varkappa ; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{une constante } \varkappa' ;$$

équations qui remplacent complètement les précédentes.

On peut poser :

$$(139\ bis)\qquad \varphi = \frac{\varkappa x + \varkappa' y}{2} + u_1, \qquad \psi = \frac{\varkappa y - \varkappa' x}{2} + v_1;$$

où u_1, v_1 sont des fonctions de x, y définies par les équations :

$$(140)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

Portant les valeurs (139 *bis*) de φ et de ψ dans les expressions (130) des déplacements u, v, dont on aura effacé les derniers termes affectés de f et de C′ qui, ici, sont nuls, on a, eu égard à la première équation (140) qui annule la somme $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$ et ses dérivées :

$$(141)\qquad u = \frac{\varkappa x + \varkappa' y}{2}, \qquad v = \frac{\varkappa y - \varkappa' x}{2}.$$

Les forces (135 *bis*) $X = X_0 + X_2 z^2$; $Y = Y_0 + Y_2 z^2$, agissant sur la paroi latérale, et qui sont capables de produire ces déplacements, se réduisent à leurs parties X_0, Y_0, car, d'après la troisième et la quatrième des formules (135), X_2 et Y_2 sont nulles en vertu de la première (139), dont le second membre $\varkappa$ n'est qu'une constante. Et si, dans les deux premières (135), nous mettons pour φ et ψ leurs valeurs (139 *bis*), nous avons, pour ces forces s'exerçant sur l'unité superficielle de la paroi latérale de la plaque,

$$(142)\qquad \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{E'\varkappa}{2(1-\eta')}\cos p + \frac{E'}{1+\eta'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\cos p + \frac{\partial u_1}{\partial y}\sin p\right), \\ Y_0 &= \frac{E'\varkappa}{2(1-\eta')}\sin p + \frac{E'}{1+\eta'}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\cos p + \frac{\partial v_1}{\partial y}\sin p\right); \end{aligned} \right.$$

où l'on peut faire (formule (z') de la note du § 16, p. 84),

$$\frac{E'}{2(1-\eta')} = a_1 - f \quad \text{et} \quad \frac{E'}{1+\eta'} = 2f.$$

Telles sont les expressions des deux composantes suivant les x et les y, de forces qui, appliquées sur l'unité superficielle des éléments de la surface latérale, produisent des déplacements intérieurs exprimables par les formules (141); c'est-à-dire partout, et en tous sens, une dilatation uniforme $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\varkappa}{2}$ accompagnée ou non d'une petite rotation générale $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\varkappa'}{2}$ (§ 21 à la fin). Cette dilatation (ou contrac-

tion) uniforme sera prise, par exemple, sous l'action d'une force ayant ses composantes X_0, Y_0 représentées par les premiers termes des équations (142), savoir par

$$(142\ a)\qquad X_0 = \frac{E'\varkappa}{2(1-\eta')}\cos p\,;\qquad\qquad Y_0 = \frac{E'\varkappa}{2(1-\eta')}\sin p\,;$$

ou par ce à quoi elles se réduisent quand on suppose nulle la fonction arbitraire de x, y que nous avons désignée par u_1. C'est alors une tension ou pression normale à tous les éléments de la surface latérale, et partout égale par unité de la superficie. Ce résultat particulier offre simplement une vérification de notre analyse, car il était facile de le prévoir et d'y arriver plus directement.

§ 41. — Déplacement sans flexion des éléments de la plaque, avec augmentation de volume égale en tous les points.

Laissons de côté les déplacements (141); et considérons seulement les états d'équilibre qu'on a lorsque les expressions (139 *bis*) se réduisent à

$$\varphi = u_1\,,\qquad \psi = v_1\,,$$

u_1 et v_1 étant les quantités définies par les équations (140). Pour tous ces états, w, dont la valeur est donnée par la troisième expression (132) de laquelle on a retranché, comme il a été dit, les termes en f et en C ou C', s'évanouit en vertu de la première de ces équations (140). On a ainsi des extensions et contractions telles que chaque point est déplacé parallèlement aux bases de la plaque. En même temps, la dilatation cubique υ, somme des trois dilatations principales, s'évanouit aussi, d'après l'équation (123), dont le second membre, affecté de w, est nul; et comme celle de ces trois dilatations qui est normale aux bases disparaît, les deux autres dilatations sont égales et de signe contraire. Il en est absolument de même des trois tensions principales t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}; on a $t_{zz}=0$, et $t_{xx} = -t_{yy} = \frac{E}{1+\eta}\frac{\partial u_1}{\partial x}$; de sorte que chaque élément se trouve étendu dans une certaine direction, contracté et comprimé d'autant dans une direction perpendiculaire. L'ellipsoïde d'*élasticité* dont les rayons vecteurs donnent (§ 5) les grandeurs des tensions suivant leurs directions se

réduit dans ce cas à un cercle dont le plan est parallèle aux deux bases de la plaque; c'est ce que l'on peut voir aussi d'après les équations du § 9 si on remarque que $t_{xx} = -t_{yy}$ et que t_{xz}, t_{yz}, t_{zz} disparaissent.

Examinons ce cas avec plus de détail. Pour les déplacements dont il s'agit, on a $u = u_1$, $v = v_1$; on peut donc supprimer les indices 1 dans les équations (140) et les écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

De ces équations résultent les combinaisons :

$$\frac{\partial (u + v\sqrt{-1})}{\partial x} = \sqrt{-1}\,\frac{\partial (u + v\sqrt{-1})}{\partial y},$$
$$\frac{\partial (u - v\sqrt{-1})}{\partial x} = \sqrt{-1}\,\frac{\partial (u - v\sqrt{-1})}{\partial y}.$$

Elles n'expriment qu'une chose, savoir que $(u + v\sqrt{-1})$ ne peut être qu'une fonction de $(x - y\sqrt{-1})$, et peut en être arbitrairement toute fonction; et de même, que $(u - v\sqrt{-1})$ ne peut être qu'une fonction quelconque de $(x + y\sqrt{-1})$. On peut donc poser

$$(143) \qquad \left\{ \begin{aligned} u + v\sqrt{-1} &= f(x - y\sqrt{-1}) \\ u - v\sqrt{-1} &= F(x + y\sqrt{-1}) \end{aligned} \right.$$

f et F étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. Ces fonctions peuvent toujours se déterminer de manière à résoudre le problème dont voici l'énoncé :

Quelles sont les forces de traction qui doivent être appliquées sur la surface latérale *d'une plaque prismatique ou cylindrique pour que la contraction dans une direction perpendiculaire aux bases de la plaque soit partout la même et que tous les points de la surface latérale subissent des déplacements déterminés arbitrairement à l'avance sur les normales à cette surface latérale?* (*)

Ce problème se divise immédiatement en deux parties. Nous pouvons partager les forces nécessaires pour produire ces déplacements en une traction constante D agissant partout normalement, et en d'au-

(*) Plus généralement : et que tous les points de la surface latérale se déplacent suivant une courbe donnée arbitrairement, en s'écartant naturellement peu de la courbe primitive. Ce problème se traite de la même manière, voyez ci-après § 46. (*Note de l'auteur.*

tres forces X_0, Y_0 appliquées à chaque point de la surface latérale d'une manière qui sera déterminée plus loin. Nous pouvons choisir la traction uniforme D de manière qu'à elle seule elle fasse éprouver à toute la surface de la plaque l'extension superficielle qui doit avoir lieu pour satisfaire au problème posé. Les déplacements provenant des forces X_0, Y_0 ne devront plus alors être accompagnés d'aucune contraction suivant la normale aux bases, car D seule doit produire partout exactement cette contraction qui, d'après l'énoncé du problème, doit être égale en tous les points. Les forces X_0, Y_0 ne devant produire aucune contraction suivant la normale aux bases de la plaque, ne doivent, par conséquent, produire aucune augmentation de volume dans le sens parallèle à la plaque, c'est-à-dire aucune augmentation de la superficie de sa base; et cela ne peut avoir lieu que si elles produisent, dans cette direction, des extensions égales aux contractions.

Les déplacements provenant des forces X_0, Y_0 sont donc de la nature de ceux qui viennent d'être considérés. Aux équations développées précédemment s'ajoute seulement la condition que le déplacement mesuré suivant la normale à la surface latérale, c'est-à-dire la grandeur $u \cos p + v \sin p$ soit égale à une quantité donnée en chaque point de la périphérie de chaque section parallèle aux bases.

Désignons par N cette fonction donnée des coordonnées x, y du contour des sections, de sorte qu'on ait, aux points de ce contour,

$$u \cos p + v \sin p = \mathrm{N}. \tag{143 a}$$

La traction encore indéterminée D produit les déplacements dont les valeurs sont les suivantes (144) déduites des équations (141) lorsqu'on y annule la constante $\varkappa'$ qu'il n'est pas essentiel de conserver :

$$u = \frac{\varkappa x}{2}, \qquad v = \frac{\varkappa y}{2}. \tag{144}$$

Et les équations (142 a) permettent de poser

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{E}'\varkappa}{2(1-\eta')}, \tag{145}$$

puisqu'on suppose que le rôle de la traction D est de produire ces déplacements-là. La constante $\varkappa$, elle-même, se détermine facilement d'après la condition que l'extension totale de la surface, produite par la force D, soit égale à celle qui résulte du déplacement (143 a) N. Ce déplacement du contour des sections de la plaque étant très-petit, on peut imaginer l'agrandissement total des superficies des mêmes sec-

tions comme formé de petits rectangles dont un côté serait un élément ds du contour, tandis que l'autre serait exprimé par le déplacement normal correspondant N. L'agrandissement superficiel tout entier est donc

$$\int N ds,$$

la somme $\int$ de tous ces rectangles étant étendue au contour entier de la plaque. D'un autre côté l'application de la traction D fait que chaque élément $dxdy$ est agrandi, et que sa surface, après le déplacement, est d'après les équations (144)

$$d(x+u)d(y+v) = dxdy\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)^2.$$

Chaque unité de surface des sections est donc agrandie de la quantité

$$\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)^2 - 1 = \varkappa,$$

en négligeant le carré de la petite grandeur $\varkappa$. Si on désigne par J la surface entière de la base de la plaque, on doit avoir, en conséquence

$$\varkappa J = \int N ds$$

pour que l'extension produite par la traction D soit égale à l'extension donnée. On trouve donc enfin

$$\varkappa = \frac{1}{J}\int N ds$$

d'où, en substituant dans (144), l'on tire pour D et pour les déplacements produits par cette force supposée d'abord agir seule :

(146) $$D = \frac{E'\int N ds}{2J(1-\eta')},$$

(147) $$u = \frac{x}{2J}\int N ds, \qquad v = \frac{y}{2J}\int N ds,$$

ce qui donne

$$u\cos p + v\sin p = \frac{x\cos p + y\sin p}{2J}\int N ds.$$

Pour compléter la solution, il reste à déterminer la seconde partie des déplacements de manière qu'ils satisfassent aux équations (143); et qu'en même temps le déplacement normal correspondant à cette

seconde partie, après déduction du déplacement normal correspondant à la première, ait la valeur donnée

$$(147\ bis)\qquad u\cos p+v\sin p=\mathrm{N}-\frac{x\cos p+y\sin p}{2\mathrm{J}}\int \mathrm{N}ds.$$

§ 42. — Cas particulier d'une plaque circulaire.

Le problème posé ci-dessus ne peut être résolu d'une manière plus complète que lorsqu'on attribue à la plaque une forme déterminée. Je vais chercher cette solution pour le cas d'une plaque de *forme circulaire*.

Introduisons les coordonnées polaires. Soit r le rayon vecteur, ou la distance, au centre de la plaque, d'un point situé dans sa surface médiane $z=0$, et soit φ l'angle du rayon r avec l'axe des x. Nous avons

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi;$$

et aussi, d'après les principes connus

$$x+y\sqrt{-1}=r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)=re^{\varphi\sqrt{-1}},$$
$$x-y\sqrt{-1}=r(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)=re^{-\varphi\sqrt{-1}}.$$

Imaginons maintenant les fonctions (145) f et F développées suivant les puissances de leurs arguments; ces puissances ne peuvent être que positives, car tout terme affecté d'une puissance négative de r rendrait u ou v infini au centre pour lequel on a $r=0$, ce qui ne saurait être; on a donc

$$(148)\qquad \begin{cases} u+v\sqrt{-1}=\mathrm{A}+\mathrm{A}_1re^{-\varphi\sqrt{-1}}+\mathrm{A}_2r^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+\ldots\ldots, \\ u-v\sqrt{-1}=\mathrm{B}+\mathrm{B}_1re^{\varphi\sqrt{-1}}+\mathrm{B}_2r^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$\mathrm{A}, \mathrm{A}_1,\ldots$ $\mathrm{B}, \mathrm{B}_1,\ldots.$ désignant des constantes arbitraires.

Remarquons maintenant que

$$(148\,a)\qquad (u-v\sqrt{-1})\,e^{\varphi\sqrt{-1}}+(u+v\sqrt{-1})^{-\varphi\sqrt{-1}}=$$
$$=(u-v\sqrt{-1})\;(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+(u+v\sqrt{-1})\;(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$=2(u\cos\varphi+v\sin\varphi).$$

Comme, pour le cercle, la normale en un point de la circonférence fait, avec l'axe des x, l'angle φ lui-même, ou comme on a $p=\varphi$, et par

conséquent, d'après (147 *bis*),

$$(148\ b) \qquad u\cos\varphi + v\sin\varphi = N - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{2J}\int Nds,$$

l'on peut, pour la périphérie, égaler le second membre de l'équation (148 *b*) qui vient d'être écrite, à la moitié du premier membre de la précédente (148 *a*) et qui est affecté des exponentielles imaginaires. Or, soit a le rayon de la périphérie, on a aussi :

$$ds = ad\varphi; \qquad x\cos p + y\sin p = a; \qquad J = a^2\pi;$$

en sorte que le second membre de (148 *b*) peut s'écrire

$$N - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Nd\varphi.$$

Quant à la fonction N qui est supposée donnée pour tous les points de la périphérie, nous pouvons la considérer comme une fonction de φ. Si donc nous égalons l'expression précédente à celle qui suit, moitié du premier membre de (148 *a*)

$$\frac{1}{2}\left[(u - v\sqrt{-1})\,e^{\varphi\sqrt{-1}} + (u + v\sqrt{-1})\,e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right];$$

et si nous remplaçons $(u + v\sqrt{-1})$, $(u - v\sqrt{-1})$ par leurs valeurs (148) en même temps que r par a, nous obtiendrons, pour la détermination des constantes A, B..., l'équation suivante :

$$(148\,c)\ N - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Nd\varphi = \frac{1}{2}\Big\{Ae^{-\varphi\sqrt{-1}} + A_1ae^{-2\varphi\sqrt{-1}} + A_2a^2e^{-3\varphi\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$+ Be^{\varphi\sqrt{-1}} + B_1ae^{2\varphi\sqrt{-1}} + B_2a^2e^{3\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\Big\}.$$

La détermination des constantes se fait par l'application du principe connu en vertu duquel l'expression

$$\int_0^{2\pi} e^{n\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi = \frac{1}{n\sqrt{-1}}\left(e^{2\pi n\sqrt{-1}} - 1\right)$$

s'évanouit toutes les fois que n est un nombre entier positif ou négatif différent de zéro ; car on a toujours dans ce cas :

$$e^{2n\pi\sqrt{-1}} = \cos 2n\pi + \sqrt{-1}\sin 2n\pi = 1,$$

Mais si $n = 0$, cette intégrale $\int_0^{2\pi}$ devient égale à 2π. Si donc on mul-

tiplie l'équation ci-dessus (148 c) par $e^{n\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi$ ou par $e^{-n\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi$ et si l'on intègre de 0 à 2π, tous les termes du second membre, excepté un, disparaissent chaque fois, et l'on obtient

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{N}e^{n\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi = \pi \mathrm{A}_{n-1}\,a^{n-1},$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{N}e^{-n\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi = \pi \mathrm{B}_{n-1}\,a^{n-1};$$

ou, en remplaçant les exponentielles imaginaires par leurs expressions trigonométriques :

$$\mathrm{A}_{n-1}\,a^{n-1} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\cos n\varphi\,d\varphi + \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\sin n\varphi\,d\varphi\right),$$

$$\mathrm{B}_{n-1}\,a^{n-1} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\cos n\varphi\,d\varphi - \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\sin n\varphi\,d\varphi\right).$$

Si donc on pose

$$(149)\qquad \mathrm{C}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\cos n\varphi\,d\varphi;\qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\sin n\varphi\,d\varphi,$$

l'on a

$$\mathrm{A}_{n-1} = \frac{\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n\sqrt{-1}}{a^{n-1}};\qquad \mathrm{B}_{n-1} = \frac{\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n\sqrt{-1}}{a^{n-1}}.$$

Enfin, en introduisant ces valeurs dans les expressions (148) et en séparant les quantités réelles des imaginaires, on arrive à

$$(150)\quad \begin{cases} u = \mathrm{C}_1 + (\mathrm{C}_2\cos\varphi + \mathrm{S}_2\sin\varphi)\dfrac{r}{a} + (\mathrm{C}_3\cos 2\varphi + \mathrm{S}_3\sin 2\varphi)\dfrac{r^2}{a^2} + \ldots, \\[2ex] v = \mathrm{S}_1 + (\mathrm{S}_2\cos\varphi - \mathrm{C}_2\sin\varphi)\dfrac{r}{a} + (\mathrm{S}_3\cos 2\varphi - \mathrm{C}_3\sin 2\varphi)\dfrac{r^2}{a^2} + \ldots. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que les portions des déplacements qui sont produites par la traction D ont des valeurs (147), $u = \dfrac{x}{2\mathrm{J}}\displaystyle\int \mathrm{N}\,ds$, $v = \dfrac{y}{2\mathrm{J}}\displaystyle\int \mathrm{N}\,ds$, qui reviennent, vu que $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, et que $\mathrm{J} = \pi a^2$, $ds = a\,d\varphi$, à

$$u = \frac{r}{a}\,\mathrm{C}\cos\varphi,\qquad v = \frac{r}{a}\,\mathrm{C}\sin\varphi,$$

où C représente l'intégrale

$$(151)\qquad \mathrm{C} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{N}\,d\varphi.$$

Nous aurons ainsi pour la somme des déplacements que le problème propose de trouver :

$$(151\ a)\left\{\begin{aligned} u &= C_1 + [(C + C_2)\cos\varphi + S_2 \sin\varphi]\,\frac{r}{a} + (C_3 \cos 2\varphi + S_3 \sin 2\varphi)\,\frac{r^2}{a^2} + \ldots \\ v &= S_1 + [S_2 \cos\varphi + (C - C_2)\sin\varphi]\,\frac{r}{a} + (S_3 \cos 2\varphi - C_3 \sin 2\varphi)\,\frac{r^2}{a^2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Ces formules, avec celles (149) et (151) qui donnent la signification des C, S, déterminent complètement les déplacements u, v, parallèles aux x, y.

Cherchons maintenant les forces qui sont propres à les produire. En premier lieu, la traction normale D, qui agit partout uniformément devient, d'après (146) en remplaçant toujours J par πa^2, ds par $ad\varphi$:

$$D = \frac{E'C}{a\,(1 - \eta')} \text{ où on peut faire } \frac{E'}{1 - \eta'} = 2(a_1 - f)\,.$$

Quant aux forces X_0, Y_0, on les trouve au moyen des deux premières formules (135) du § 39, p. 504, dans lesquelles on remplace φ et ψ par u et v et où on introduit ensuite pour u et v leurs valeurs (150). Ce calcul est rendu beaucoup plus facile au moyen des équations (140), page 307, avec u, v mis pour u_1, v_1, savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,,$$

qui permettent d'éliminer v de X_0 et u de Y_0 et qui donnent à leurs valeurs (135) la forme simple

$$X_0 = \frac{E'}{1 + \eta'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos p + \frac{\partial u}{\partial y}\sin p\right),$$
$$Y_0 = \frac{E'}{1 + \eta'}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos p + \frac{\partial v}{\partial y}\sin p\right). \qquad (^*)$$

On a vu au § 33, formule (92 c), p. 223, que les expressions entre parenthèses ne sont autre chose que les quotients différentiels de u et v par rapport à la normale au contour, et comme, ici, la normale se

(*) Ces expressions ne sont autre chose, comme on voit, que les seconds termes de celles (142) de X_0, Y_0 de la fin du § 40, termes que l'auteur avait supprimés en annulant ou abstrayant u_1, v_1, sans en présenter le motif, et que j'ai rétablis en ne réduisant qu'ultérieurement les valeurs (142) à celles (142 a) que l'auteur donnait seules.

On observera que $\frac{E'}{1 + \eta'} = 2\,f$ ou le double du coefficient d'élasticité du glissement g_{xy}.

confond avec le rayon, on a les expressions

$$X_0 = \frac{E'}{1+\eta'} \frac{\partial u}{\partial r} = 2\mathfrak{f} \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad Y_0 = \frac{E'}{1+\eta'} \frac{\partial v}{\partial r} = 2\mathfrak{f} \frac{\partial v}{\partial r};$$

et, en y mettant pour u, v, les expressions (150) des parties de u, v, qui ne viennent pas de la force de traction constante D du § 41, l'on obtient les expressions suivantes des forces qui doivent agir, sur le bord de la plaque, en même temps que cet *effort extenseur :*

$$X_0 = \frac{E'}{a(1+\eta')} \left\{ (C_2 \cos\varphi + S_2 \sin\varphi) + 2\,(C_3 \cos 2\varphi + S_3 \sin 2\varphi)\, \frac{r}{a} + \ldots . \right\}$$

$$Y_0 = \frac{E'}{a(1+\eta')} \left\{ (S_2 \cos\varphi - C_2 \sin\varphi) + 2\,(S_3 \cos 2\varphi - C_3 \sin 2\varphi)\, \frac{r}{a} + \ldots . \right\}$$

§ 43. — Application à la solution approximative de problèmes généraux sur les plaques.

La considération des états particuliers d'équilibre dans lesquels, au commencement du § 40, nous avons reconnu principalement le caractère de l'extension, peut encore avoir une autre utilité.

Le problème général qui consiste à *déterminer l'état d'équilibre d'une plaque sur la surface cylindrique de laquelle agissent des forces quelconques parallèles aux bases ou faces planes extrêmes*, ne peut pas être traité rigoureusement dans toute sa généralité puisque, comme on l'a vu, les forces qui correspondent à un pareil état d'équilibre sont soumises à des conditions particulières. Mais si nous supposons que les forces agissant sur chaque bande infiniment étroite de la surface latérale cylindrique soient symétriquement réparties sur cette bande de part et d'autre de la médiane suivant laquelle elle est coupée par la section moyenne; que, par conséquent, elles ne tendent à produire que des extensions ou contractions sans aucune torsion ni flexion; nous pourrons avec quelque approximation remplacer, de la manière suivante, le problème général qui vient d'être énoncé, par un autre dont la solution soit comprise dans les formules du § 39.

Soit Ads la somme de toutes les composantes X des forces extérieures qui agissent sur la bande de la surface cylindrique latérale dont la largeur est ds, élément de la périphérie, et dont la hauteur est l'épaisseur de la plaque. Soit également Bds la somme des composantes Y. Dans le problème du § 39, on obtient les sommes analogues en multi-

pliant d'abord, par l'élément $dz\,ds$ de la même partie de la surface cylindrique, les composantes des forces agissant sur l'unité de surface

$$X = X_0 + X_1 z + X_2 z^2,$$
$$Y = Y_0 + Y_1 z + Y_2 z^2,$$

et en faisant les sommes $\int X\,dz ds$, $\int Y\,dz ds$ depuis $z = -\frac{h}{2}$ jusqu'à $z = +\frac{h}{2}$, si h désigne l'épaisseur de la plaque. Cette intégration donne, pour une bande,

$$ds \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X dz = \left(X_0 h + X_2 \frac{h^3}{12}\right) ds,$$
$$ds \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y dz = \left(Y_0 h + Y_2 \frac{h^3}{12}\right) ds;$$

les termes dépendant de X_1, Y_1, ayant entièrement disparu.

Dès lors, ce problème se rapprochera autant que possible de celui du § 39 si on suppose les fonctions X, Y déterminées de manière que les sommes des composantes qui correspondent à chaque arête de la surface cylindrique aient la même valeur dans le problème posé et dans celui que l'on doit y substituer. Posons donc

$$(155) \qquad A = X_0 h + X_2 \frac{h^3}{12}, \qquad B = Y_0 h + Y_2 \frac{h^3}{12};$$

où A et B sont des fonctions données de x et de y; et remplaçons alors le problème donné par celui dans lequel les forces agissant sur la surface cylindrique seraient déterminées par la loi

$$X = X_0 + X_2 z^2,$$
$$Y = Y_0 + Y_2 z^2.$$

Remarquons que les quatre fonctions X_0, Y_0, X_2, Y_2, de x, y, ne sont pas complètement déterminées par les équations (155), qui n'expriment entre ces quatre fonctions que deux relations nécessaires. D'un autre côté, les équations (135) de la fin du § 39, p. 304 donnant des expressions de X_0, Y_0, X_2, Y_2, ne peuvent être prises comme pouvant subsister à la fois toutes ensemble : il faut seulement les considérer comme imposant d'autres conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions X_0, Y_0, X_2, Y_2 des équations (155). Si donc on

exprime ces quatre fonctions au moyen de leurs valeurs tirées de (135) en φ, ψ, et si l'on introduit ces valeurs dans (153), on a les deux conditions suivantes :

$$(154)\quad \begin{cases} \dfrac{2(1-\eta'^2)A}{hE'} = \cos p \left\{ 2\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta'\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \dfrac{\eta'' h^2}{12}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right)\right\} \\ \qquad + \sin p \left\{ (1-\eta')\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dfrac{\eta'' h^2}{12}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial^2 x\partial y} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right)\right\}; \\ \dfrac{2(1-\eta'^2)B}{hE'} = \cos p \left\{ (1-\eta')\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \dfrac{\eta'' h^2}{12}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right)\right\} \\ \qquad + \sin p \left\{ 2\left(\eta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \dfrac{\eta'' h^2}{12}\left(\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)\right\}. \\ \text{où} \quad 1-\eta' = \dfrac{2\mathrm{f}}{\mathrm{a}_1}, \quad \dfrac{1-\eta'^2}{E'} = \dfrac{1}{\mathrm{a}_1}, \quad \eta'' = (1-\eta')\dfrac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}} \end{cases}$$

Les équations (135) étaient en trop grand nombre pour pouvoir être satisfaites à la fois par un choix arbitraire des fonctions X_0, Y_0, X_2, Y_2. Cette difficulté n'existe plus avec les équations de condition (154) ; on peut toujours satisfaire à ces équations, lorsque A et B sont des fonctions données de x et de y. Bien que l'on ne soit pas en état, à l'aide de ces conditions, de résoudre le problème général posé au commencement de ce paragraphe, on peut donc cependant résoudre le problème pour lequel les sommes de toutes les composantes qui agissent sur chacune des génératrices du cylindre sont des grandeurs données arbitrairement. Les solutions de ce problème sont, d'après (130) p. 301, en mettant [(z) de la note du § 16] $\dfrac{1-\eta'}{\eta''}$ pour $\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}'}$, exprimées par les équations :

$$(155)\quad \begin{cases} u = \varphi + \dfrac{\eta''}{1-\eta'}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\dfrac{z^2}{2}, \\ v = \psi + \dfrac{\eta''}{1-\eta'}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\dfrac{z^2}{2}, \\ w = -\dfrac{\eta''}{1-\eta'}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)z; \quad \text{où } \dfrac{\eta''}{1-\eta'} = \dfrac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}; \end{cases}$$

dans lesquelles les fonctions φ et ψ, outre qu'elles doivent satisfaire aux conditions de limite (154) imposées pour que les forces agissant sur la surface soient les forces données A, B, doivent encore satisfaire en tous les points du solide aux équations (131), p. 301, imposées par les

suppositions $t_{xz}=0$, $t_{yz}=0$, $t_{zz}=0$, partout :

$$(156)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{1-\eta'}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{1+\eta'}{2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{1-\eta'}{2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{1+\eta'}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0 \\ \text{où } \dfrac{1-\eta'}{2}=\dfrac{f}{a_1}, \quad \dfrac{1+\eta'}{2}=1-\dfrac{f}{a_1}. \end{cases}$$

§ 44. — Solution approximative du problème général pour une plaque circulaire.

Je vais appliquer ces équations au cas simple d'une plaque circulaire. Nous introduirons les coordonnées polaires r, θ, et nous considérerons (153) A et B comme des fonctions données de l'angle θ, tandis que dans les équations (154), r devra avoir la valeur constante a qui correspond à la périphérie de la plaque.

Posons maintenant pour abréger

$$(157)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\xi, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\eta, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\xi', & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\eta'. \end{cases}$$

Les équations (154) et (156) prennent alors des formes beaucoup plus simples. On devra en outre remplacer partout l'angle p par l'angle θ formé par le rayon r avec l'axe des x attendu que la normale à la périphérie se confond avec le rayon ; les conditions génera les (156) deviennent donc

$$(158)\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{1-\eta'}{2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{1-\eta'}{2}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0\ ;\ \text{où } \frac{1-\eta'}{2}=\frac{f}{a_1};$$

et, vu que les équations (157) donnent

$$(159)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\xi+\xi'}{2}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-\dfrac{\eta-\eta'}{2}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\eta+\eta'}{2}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\dfrac{\xi-\xi'}{2}, \end{cases}$$

les conditions limites (154) deviennent

$$(160)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{(1-\eta'^2)\,A}{hE'} &= \cos\theta \left\{ \frac{1+\eta'}{1}\xi + \frac{1-\eta'}{2}\xi' + \frac{\eta'' h^2}{24}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right\} \\ &\quad + \sin\theta \left\{ \frac{1-\eta'}{2}\eta' + \frac{\eta'' h^2}{24}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right\} \\ \frac{(1-\eta'^2)\,B}{hE'} &= \cos\theta \left\{ \frac{1-\eta'}{2}\eta' + \frac{\eta'' h^2}{24}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right\} \\ &\quad + \sin\theta \left\{ \frac{1+\eta'}{2}\xi - \frac{1-\eta'}{2}\xi' + \frac{\eta'' h^2}{24}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right\}. \end{aligned}\right.$$

Les grandeurs ξ, ξ', η, η' doivent, en vertu de (159) satisfaire aux équations

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\xi+\xi')}{\partial y} &= \frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\xi-\xi')}{\partial x} &= -\frac{\partial(\eta-\eta')}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Si, au moyen de ces équations et des équations (158) on détermine les fonctions ξ, ξ', η, η', les mêmes (159) fournissent enfin

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\xi+\xi'}{2}dx + \frac{\eta+\eta'}{2}dy, \\ d\psi &= -\frac{\eta-\eta'}{2}dx + \frac{\xi+\xi'}{2}dy; \end{aligned}\right.$$

et par conséquent φ et ψ par une simple intégration.

En introduisant les coordonnées polaires dans ces équations, on a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

d'où l'on déduit en différentiant d'abord par rapport à r, puis par rapport à θ; ensuite en différentiant chacune de ces deux mêmes équations par rapport à x et par rapport à y, et tirant par résolution de chacun des deux groupes de deux équations qui en résultent, les valeurs des quotients différentiels de r et de θ,

$$(162\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta, \\ &\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}\right.$$

En conséquence, si l'on imagine une fonction quelconque K exprimée d'abord en x et y, et ensuite en r et θ, on aura, par différentiation de fonctions de fonctions,

$$(163)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial x} &= \frac{\partial K}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial K}{r\partial\theta}\sin\theta\,,\\
\frac{\partial K}{\partial y} &= \frac{\partial K}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial K}{r\partial\theta}\cos\theta\,,\\
\frac{\partial K}{\partial r} &= \frac{\partial K}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial K}{\partial y}\sin\theta\,,\\
\frac{\partial K}{r\partial\theta} &= -\frac{\partial K}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial K}{\partial y}\cos\theta\,.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules, qui sont fondamentales pour les diverses différentiations, permettent de donner aux équations (158) à (161) des formes telles qu'il ne s'y trouve plus de quotients différentiels que par rapport à r et à θ. Que, par exemple, on multiplie la première équation (158) par $\cos\theta$, la seconde par $\sin\theta$ et que l'on additionne; ou bien que l'on multiplie la première par $-\sin\theta$, la seconde par $\cos\theta$, et que l'on additionne encore, on aura, en ayant égard aux deux dernières équations (163) qui s'appliquent à une fonction quelconque telle que ξ ou η;

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned}
&2\frac{\partial\xi}{\partial r} + (1-\mathfrak{y}')\frac{\partial\eta}{r\partial\theta} = 0, \quad\text{ou}\quad \mathrm{a}_1\frac{\partial\xi}{\partial r} + \mathrm{f}\frac{\partial\eta}{r\partial\theta} = 0;\\
&2\frac{\partial\xi}{r\partial\theta} - (1-\mathfrak{y}')\frac{\partial\eta}{\partial r} = 0\,, \quad\text{ou}\quad \mathrm{a}_1\frac{\partial\xi}{r\partial r} - \mathrm{f}\frac{\partial\eta}{\partial r} = 0\,.
\end{aligned}\right.$$

Imaginons maintenant les fonctions ξ et η développées suivant les sinus et cosinus des multiples de θ, chaque terme comprenant un coefficient dépendant de r seulement, c'est-à-dire posons :

$$2\xi = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_1\cos\theta + \mathrm{R}_2\cos 2\theta + \ldots + \mathrm{R}'_1\sin\theta + \mathrm{R}'_2\sin 2\theta + \ldots,$$
$$(1-\mathfrak{y}')\eta = \mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1\cos\theta + \mathrm{S}_2\cos 2\theta + \ldots + \mathrm{S}'_1\sin\theta + \mathrm{S}'_2\sin 2\theta + \ldots.$$

Introduisons ces expressions dans les équations (164); et, dans chacune d'elles, annulons les coefficients des sinus et des cosinus du même argument, nous aurons, i étant un indice quelconque,

$$\frac{\partial \mathrm{R}_0}{\partial r} = 0\,,\qquad \frac{\partial \mathrm{S}_0}{\partial r} = 0\,,$$
$$\frac{\partial \mathrm{R}_i}{\partial r} + \frac{i}{r}\mathrm{S}'_i = 0\,,\qquad \frac{\partial \mathrm{R}'_i}{\partial r} - \frac{i}{r}\mathrm{S}_i = 0\,,$$
$$\frac{\partial \mathrm{S}'_i}{\partial r} + \frac{i}{r}\mathrm{R}_i = 0\,,\qquad \frac{\partial \mathrm{S}_i}{\partial r} - \frac{i}{r}\mathrm{R}'_i = 0\,.$$

R^0 et S^0 sont deux constantes, et R_i est lié avec S'_i comme R'_i avec S_i par les quatre équations binômes que nous venons d'écrire.

Eliminant R'_i et S'_i, on obtient pour R_i et S_i la même équation différentielle du second ordre

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R_i}{\partial r}\right)-i^2R_i=0 \quad ; \qquad r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S_i}{\partial r}\right)-i^2S_i=0 \ ,$$

dont chacune, étant intégrée, doit donner lieu à l'introduction de deux constantes arbitraires. Or, on satisfait à ces deux équations par les expressions suivantes où A_i, B^i, C_i, D^i sont des constantes arbitraires :

$$R_i=A_ir^i+\frac{C_i}{r^i} \ , \qquad S_i=B_ir^i+\frac{D_i}{r^i} \ .$$

Comme les constantes sont en nombre suffisant, puisque les équations différentielles que résolvent les expressions de R_i, S_i sont du second ordre, ces expressions sont bien les formes les plus générales de R_i et de S_i.

Mais les constantes C_i, D_i doivent être nulles afin que, pour $r=0$, c'est-à-dire au centre de la plaque, les valeurs ci-dessus restent finies. On a donc simplement

$$R_i=A_ir^i \ , \qquad S_i=B_ir^i \ ,$$

et, par suite

$$R'_i=B_ir^i \ , \qquad S'_i=-A_ir^i \ ;$$

de sorte que les expressions ξ et de η deviennent :

$$(165)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{1}{2}\Big[A_0+A_1r\cos\theta+A_2r^2\cos2\theta+\ldots\ldots+B_1r\sin\theta+B_2r^2\sin2\theta+\ldots\ldots\Big], \\ \eta=\dfrac{1}{1-\eta'}\Big[B_0+B_1r\cos\theta+B_2r^2\cos2\theta+\ldots\ldots-A_1r\sin\theta-A_2r^2\sin2\theta-\ldots\ldots\Big] \end{cases}$$

Pour trouver maintenant les fonctions ξ' et η', nous ramènerons d'abord les équations (161) à la forme

$$\frac{\partial\xi'}{\partial x}+\frac{\partial\eta'}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\xi'}{\partial y}-\frac{\partial\eta'}{\partial y}=-\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x} \ ;$$

ou, en remplaçant les dérivées par rapport à x et à y par leurs valeurs en dérivées par rapport à r et θ au moyen des formules de changement (163).

$$\frac{\partial\xi'}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\xi'}{r\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial\eta'}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\eta'}{r\partial\theta}\cos\theta=\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\partial\eta}{r\partial\theta}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}-\frac{\partial\xi}{r\partial\theta}\right)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\xi'}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial\xi'}{r\partial\theta}\cos\theta-\frac{\partial\eta'}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial\eta'}{r\partial\theta}\sin\theta=-\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\partial\eta}{r\partial\theta}\right)\sin\theta+\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}-\frac{\partial\xi}{r\partial\theta}\right)\cos\theta.$$

Si, maintenant, l'on multiplie la première de ces deux équations par $\cos\theta$, la seconde par $\sin\theta$, ou bien la première par $-\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$, et si, chaque fois, l'on additionne, on obtient :

$$(166)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi'}{\partial r}+\frac{\partial \eta'}{r\partial \theta}=\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}+\frac{\partial \eta}{r\partial \theta}\right)\cos 2\theta+\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}-\frac{\partial \xi}{r\partial \theta}\right)\sin 2\theta\ ,\\ &\frac{\partial \xi'}{r\partial \theta}-\frac{\partial \eta'}{\partial r}=-\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}+\frac{\partial \eta}{r\partial \theta}\right)\sin 2\theta+\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}-\frac{\partial \xi}{r\partial \theta}\right)\cos 2\theta\ .\end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que les premiers membres de ces équations (166) ont tout à fait la même forme que ceux des équations (164) dans les quelles 2ξ serait remplacé par ξ' et $(1-\eta')\eta$ par η'. Cette remarque va nous donner le moyen de déterminer pour ξ', η' des expressions en série comme celles (165) de ξ, η. En effet, supposons que l'on ait trouvé une solution particulière quelconque ξ'_0, η'_0 des équations (166), solution à laquelle on peut donner la forme

$$(167)\quad \left\{\begin{aligned} \xi'_0&=\rho\cos 2\theta+\rho'\sin 2\theta\ ,\\ \eta'_0&=\rho\sin 2\theta-\rho'\cos 2\theta\ .\end{aligned}\right.$$

Si l'on met ξ'_0, η'_0 à la place de ξ', η' dans les équations (166), les premiers membres seront :

$$\frac{\partial \xi'_0}{\partial r}+\frac{\partial \eta'_0}{r\partial \theta}\ ,\qquad \frac{\partial \xi'_0}{r\partial \theta}-\frac{\partial \eta'_0}{\partial r}\ ,$$

et ne cesseront pas d'être égaux aux fonctions de r, θ qui forment les seconds membres. Retranchant, des équations (166), celles qui résultent de cette substitution, on a

$$\frac{\partial(\xi'-\xi'_0)}{\partial r}+\frac{\partial(\eta'-\eta'_0)}{r\partial \theta}=0\ ,\qquad \frac{\partial(\xi'-\xi'_0)}{r\partial \theta}-\frac{\partial(\eta'-\eta'_0)}{\partial r}=0\ .$$

Les différences $(\xi'-\xi'_0)$ et $(\eta'-\eta'_0)$ doivent donc être exactement de la forme trouvée ci-dessus pour 2ξ et pour $(1-\eta')\eta$, c'est-à-dire que l'on a :

$$(168)\quad \left\{\begin{aligned} \xi'&=\xi'_0+C_0+C_1 r\cos\theta+C_2 r^2\cos 2\theta+\ldots\ldots+D_1 r\sin\theta+D_2 r^2\sin 2\theta+\ldots\ldots,\\ \eta'&=\eta'_0+D_0+D_1 r\cos\theta+D_2 r^2\cos 2\theta+\ldots\ldots-C_1 r\sin\theta-C_2 r^2\sin 2\theta-\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

où les C_i, D_i désignent des constances arbitraires.

Il reste donc à trouver la solution particulière ξ'_0, η'_0, ou bien une

expression des fonctions que nous avons appelées ρ, ρ', définies par (167). Introduisons dans les équations (166) les valeurs (167) pour ξ' et pour η'; les premiers membres de ces équations prennent la forme

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{r\partial \theta} + \frac{2\rho}{r}\right)\cos 2\theta + \left(\frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{r\partial \theta} + \frac{2\rho'}{r}\right)\sin 2\theta \ ;$$

$$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{r\partial \theta} + \frac{2\rho}{r}\right)\sin 2\theta + \left(\frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{r\partial \theta} + \frac{2\rho'}{r}\right)\cos 2\theta \ .$$

En comparant ces formes avec les seconds membres des mêmes équations (166) on obtient les équations plus simples,

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{r\partial \theta} + \frac{2\rho}{r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{r\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{\partial r}{r\partial \theta} + \frac{2\rho'}{r} = \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\partial \xi}{r\partial \theta};$$

ou, enfin, en introduisant dans les seconds membres de ces égalités, pour ξ et η leurs valeurs (165),

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{r\partial \theta} + \frac{2\rho}{r} =$$

$$= \frac{1+\eta'}{2(1-\eta')}\left[B_1 \sin\theta + 2B_2 r \sin 2\theta + \ldots\ldots + A_1 \cos\theta + 2A_2 r \cos 2\theta + \ldots\ldots\right];$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{r\partial \theta} + \frac{2\rho'}{r} =$$

$$= -\frac{1+\eta'}{2(1-\eta')}\left[B_1 \cos\theta + 2B_2 r \cos 2\theta + \ldots\ldots - A_1 \sin\theta - 2A_2 r \sin 2\theta - \ldots\ldots\right]$$

Si l'on pose, par conséquent :

$$\rho = E_1 r \sin\theta + E_2 r^2 \sin 2\theta + \ldots\ldots + F_1 r \cos\theta + F_2 r^2 \cos 2\theta + \ldots\ldots,$$
$$\rho' = G_1 r \sin\theta + G_2 r^2 \sin 2\theta + \ldots\ldots + H_1 r \cos\theta + H_2 r^2 \cos 2\theta + \ldots\ldots,$$

on obtient, par la comparaison des coefficients correspondants de chaque sinus et de chaque cosinus :

$$H_i = -E_i = \frac{1+\eta'}{4(1-\eta')} i B^i ; \ G^i = F_i = -\frac{1+\eta'}{4(1-\eta')} i A_i , \text{ où } \frac{1+\eta'}{1-\eta'} = \frac{a_1}{f} - 1,$$

de sorte que l'on a enfin

$$(168\,a)\quad \begin{cases} \rho = -\dfrac{1+\eta'}{4(1-\eta')}\Big[B_1 r\sin\theta + 2B_2 r^2 \sin 2\theta + \ldots\ldots + A_1 r\cos\theta + 2A_2 r^2\cos 2\theta + \ldots\ldots\Big] \\ \rho' = -\dfrac{1+\eta'}{4(1-\eta')}\Big[A_1 r\sin\theta + 2A_2 r^2\sin 2\theta + \ldots\ldots - B_1 r\cos\theta - 2B_2 r^2 \cos 2\theta - \ldots\ldots\Big] \end{cases}$$

ce qui revient, d'après les (165), à

$$\rho = -\frac{1+\eta'}{2(1-\eta')}\, r\frac{\partial\xi}{\partial r}; \qquad \rho' = \frac{1+\eta'}{4}\, r\frac{\partial\eta}{\partial r}.$$

De cette façon on a complètement déterminé la forme des fonctions ξ, η, ξ', η', et il ne reste plus qu'à avoir égard aux conditions de limites pour les faire servir à la détermination des constantes.

Dans les deux lignes de chacune des équations (160) qui expriment ces conditions de limites, se trouvent, affectés de $\dfrac{\eta'' h^2}{24}$, les binômes formant les premiers membres des égalités suivantes, et auxquels on peut, en vertu de la troisième des formules de changement (163), substituer les seconds membres :

$$(168\,b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\cos\theta + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\sin\theta = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\cos\theta + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\sin\theta = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Multiplions donc respectivement les deux équations (160), modifiées au moyen de ces substitutions (168 *b*), par $\cos\theta$ et par $\sin\theta$, puis par $-\sin\theta$ et par $\cos\theta$, et additionnons chaque fois, nous obtiendrons, eu égard encore aux dernières formules de changement de variables (163), appliquées à $\dfrac{\partial\xi}{\partial r}$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial\theta}$ au lieu de K, les équations plus simples

$$(168\,c)\quad \begin{cases} \dfrac{1-\eta'^2}{hE'}(A\cos\theta + B\sin\theta) = \dfrac{\eta'' h^2}{24}\dfrac{\partial\xi^2}{\partial r^2} + \dfrac{1-\eta'}{2}(\xi'\cos 2\theta + \eta'\sin 2\theta) + \dfrac{1+\eta'}{2}\xi, \\ \dfrac{1-\eta'^2}{hE'}(B\cos\theta - A\sin\theta) = \dfrac{\eta'' h^2}{24}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1-\eta'}{2}(\eta'\cos 2\theta - \xi'\sin 2\theta). \end{cases}$$

Ces équations ne s'appliquent qu'à la valeur $r = a$ du rayon vecteur mais elles conviennent à toutes les valeurs de l'angle polaire θ. Si l'on y introduit pour ξ, ξ', η, η', leurs valeurs en série trouvées ci-dessus, et si l'on y fait en même temps, $r = a$, on obtient les équations sui-

vantes qui expriment les conditions limites, ou au bord de la plaque, et qui doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de θ :

$$(168\,d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}(A\cos\theta + B\sin\theta) = \\
&= \frac{\eta'' h^2}{24}\Big[1.2\,A_2\cos 2\theta + 2.3\,A_3 a\cos 3\theta + \ldots\ldots + 1.2\,B_2\sin 2\theta + 2.3\,B_3 a\sin 3\theta + \ldots\ldots\Big] \\
&+ \frac{1+\eta'}{2}\Big[A_0 + A_1 a\cos\theta + A_2 a^2\cos 2\theta + \ldots\ldots + B_1 a\sin\theta + B_2 a^2\sin 2\theta + \ldots\ldots\Big] \\
&- \frac{1+\eta'}{4}\Big[A_1 a\cos\theta + 2\,A_2 a^2\cos 2\theta + \ldots\ldots + B_1 a\sin\theta + 2\,B_2 a^2\sin 2\theta + \ldots\ldots\Big] \\
&+ (1-\eta')\big[C_0\cos 2\theta + C_1 a\cos 3\theta + C_2 a^2\cos 4\theta + \ldots + D_1 a\sin 3\theta + D_2 a^2\sin 4\theta + \ldots\big]; \\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}(B\cos\theta - A\sin\theta) = \\
&= \frac{\eta'' h^2}{24}\Big[-1.2\,A^2\sin 2\theta - 2.3\,A_3 a\sin 3\theta - \ldots + 1.2\,B_2\cos 2\theta + 2.3\,B_3 a\cos 3\theta + \ldots\Big] \\
&+ \frac{1+\eta'}{4}\,A_1 a\sin\theta + 2\,A_2 a^2\sin 2\theta + \ldots\ldots - B_1 a\cos\theta - 2\,B_2 a^2\cos 2\theta - \ldots\ldots\Big] \\
&+ (1-\eta')\big[D_0\cos 2\theta + D_1 a\cos 3\theta + D_2 a^2\cos 4\theta + \ldots - C_1 a\sin 3\theta - C_2 a^2\sin 4\theta - \ldots\big].
\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les constantes au moyen de ces équations, on n'a qu'à se rappeler une propriété connue des intégrales trigonométriques d'après laquelle, si m et n sont deux nombres différents, on a :

$$(168\,e)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\cos m\theta\,\sin n\theta\,d\theta = 0\ , \\
&\int_0^{2\pi}\cos m\theta\,\cos n\theta\,d\theta = 0\ , \\
&\int_0^{2\pi}\sin m\theta\,\sin n\theta\,d\theta = 0\ .
\end{aligned}\right.$$

La première de ces équations subsiste encore quand $m = n$; tandis qu'on a, au lieu des deux autres

$$(168\,f)\qquad \int^{2\pi}\cos^2 m\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2 m\theta\,d\theta = \pi\ ;$$

et, pour $m = n = 0$, on a, au lieu de la seconde :

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\ .$$

Qu'on intègre donc les équations (168 d) de 0 à 2π après les avoir multipliées par $d\theta$ ou par $\cos\theta d\theta$ ou bien par $\sin\theta d\theta$, on trouve les équations suivantes qui ne contiennent plus que les constantes, et les grandeurs A et B supposées connues :

(169)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta+B\sin\theta)\,d\theta=(1+\eta')\,A_0\pi\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta-A\sin\theta)\,d\theta=0\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta+B\sin\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac{1+\eta'}{4}A_1a\pi\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int^{2\pi}(A\cos\theta+B\sin\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{1+\eta'}{4}B_1a\pi\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta-A\sin\theta)\cos\theta\,d\theta=-\frac{1+\eta'}{4}B_1a\pi\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta-A\sin\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{1+\eta'}{4}A_1a\pi\,.
\end{aligned}\right.$$

Qu'on les intègre de même après les avoir multipliées par $\cos i\theta d\theta$, $\sin i\theta d\theta$, i ayant toutes les valeurs entières plus grandes que l'unité, on a toujours, en vertu des (168 e), (168 f) ne laissant subsister qu'un seul terme des séries après l'intégration,

(169 a)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta+B\sin\theta)\cos i\theta\,d\theta=\\
&\quad=\pi A_i\left(\frac{i(i-1)\eta''h^2a^{i-2}}{24}-\frac{(1+\eta')(i-2)}{4}a^i\right)+(1-\eta')\pi C_{i-2}a^{i-2}\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta+B\sin\theta)\sin i\theta\,d\theta=\\
&\quad=\pi B_i\left(\frac{i(i-1)\eta''h^2a^{i-2}}{24}-\frac{(1+\eta')(i-2)}{4}a^i\right)+(1-\eta')\pi D_{i-2}a^{i-2}\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta-A\sin\theta)\cos i\theta\,d\theta=\\
&\quad=\pi B_i\left(\frac{i(i-1)\eta''h^2a^{i-2}}{24}-\frac{1+\eta'}{4}ia^i\right)+(1-\eta')\pi D_{i-2}a^{i-2}\,;\\
&\frac{2(1-\eta'^2)}{hE'}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta-\sin\theta)\sin i\theta\,d\theta=\\
&\quad=-\pi A_i\left(\frac{i(i-1)\eta''h^2a^{i-2}}{24}-\frac{1+\eta'}{4}ia^i\right)-(1-\eta')\pi C_{i-2}a^i\\
&\text{où }\frac{1-\eta'^2}{E'}=\frac{1}{a_1},\quad \eta'=1-2\frac{f}{a_1}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations suffisent pour déterminer complètement les constantes, car celles (169), où n'entrent ni les C ni les D, donnent A_0, A_1, B_1 et le système des quatre équations (169 *a*) fournit les quatre constantes A_i, B_i, C_{i-2}, D_{i-2}, et par conséquent tous les C, D, ainsi que les A, B d'indices 2 et au-dessus.

On a ainsi, en tirant A_1, B_1 de la troisième et de la quatrième des (169) sauf à se servir plus loin, comme on va voir, de la cinquième et de la sixième qui les contiennent aussi,

$$(169\,b)\left\{\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2(1-\eta')}{hE'\pi}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta + B\sin\theta)\,d\theta, \text{ où } \frac{2(1-\eta')}{E'} = \frac{1}{a_1-1};\\
A_1 &= \frac{8(1-\eta')}{ahE'\pi}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta + B\sin\theta)\cos\theta\,d\theta,\\
B_1 &= \frac{8(1-\eta')}{ahE'\pi}\int_0^{2\pi}(A\cos\theta + B\sin\theta)\sin\theta\,d\theta,\\
A_i &= \frac{4(1-\eta')}{a^i hE'\pi}\int_0^{2\pi}[A\cos(i+1)\theta + B\sin(i+1)\theta]\,d\theta\\
B_i &= \frac{4(1-\eta')}{a^i hE'\pi}\int_0^{2\pi}[A\sin(i+1)\theta - B\cos(i+1)\theta]\,d\theta,\\
C_{i-2} &= -\frac{i(i-1)\eta''h^2 - 6(1+\eta')a^2 i}{6a^i hE'\pi}\int_0^{2\pi}[A\cos(i+1)\theta + B\sin(i+1)\theta]\,d\theta\\
&\quad - \frac{2(1+\eta')}{hE'a^{i-2}\pi}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta - A\sin\theta)\sin i\theta\,d\theta.\\
D_{i-2} &= -\frac{i(i-1)\eta''h^2 - 6(1+\eta')a^2 i}{6a^i hE'\pi}\int_0^{2\pi}[A\sin(i+1)\theta - B\cos(i+1)\theta]\,d\theta\\
&\quad + \frac{2(1+\eta')}{hE'a^{i-2}\pi}\int_0^{2\pi}(B\cos\theta - A\sin\theta)\cos i\theta\,d\theta.
\end{aligned}\right.$$

Il résulte, en outre, des équations ci-dessus, trois conditions qui ne contiennent pas les constantes et qui, par conséquent, paraissent exiger, pour les forces extérieures, des propriétés particulières. L'une de ces conditions est exprimée par la seconde des équations (169). En ajoutant, d'une part, la quatrième et la cinquième de ces équations, et, de l'autre, en retranchant la dernière de la troisième, on obtient encore deux équations de conditions. Ces trois équations sont :

$$\int_0^{2\pi}(B\cos\theta - A\sin\theta)\,d\theta = 0\ ;\quad \int_0^{2\pi}A\,d\theta = 0\ ;\quad \int_0^{2\pi}B\,d\theta = 0\ .$$

Elles n'expriment en réalité que la condition que les forces exté-

rieures agissant sur la plaque se fassent équilibre. En effet, si l'on désigne par ds un élément de la périphérie, par x, y ses coordonnées; les sommes des composantes des forces extérieures seront :

$$\int A\, ds\,, \qquad \int B\, ds\,,$$

et la somme de leurs moments de rotation sera

$$\int (B\,x - A\,y)\, ds\,.$$

Si les forces extérieures se font équilibre, ces trois intégrales doivent être nulles. En les égalant à zéro, et en y remplaçant x, y, ds par $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, $a d\theta$, on obtient bien les trois équations de condition qui viennent d'être écrites.

La détermination des constantes est donc complètement opérée; le nombre des conditions a été suffisant, et le problème ne présente aucune ambiguïté. La constante B_0 seule est restée inconnue, mais on verra plus loin que cela ne fait aucun obstacle à ce que le problème soit entièrement déterminé.

Il reste à exprimer les fonctions φ et ψ, afin d'arriver à l'expression générale des déplacements u, v, w. Cela se fait à l'aide des considérations suivantes :

Comme conséquence des équations (159) et des troisième et quatrième formules de changement de variables (163), on a

$$(170)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{\xi+\xi'}{2}\cos\theta + \frac{\eta+\eta'}{2}\sin\theta,\\ \frac{\partial\psi}{\partial r} &= -\frac{\eta-\eta'}{2}\cos\theta + \frac{\xi-\xi'}{2}\sin\theta,\\ \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} &= -\frac{\xi+\xi'}{2}\sin\theta + \frac{\eta+\eta'}{2}\cos\theta,\\ \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} &= \frac{\eta-\eta'}{2}\sin\theta + \frac{\xi-\xi'}{2}\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières de ces équations, intégrées par rapport à r donnent

$$(171)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \cos\theta \int_0^r \frac{\xi+\xi'}{2}\,dr + \sin\theta \int_0^r \frac{\eta+\eta'}{2}\,dr + \Theta_1\,,\\ \psi &= -\cos\theta \int_0^r \frac{\eta-\eta'}{2}\,dr + \sin\theta \int_0^r \frac{\xi-\xi'}{2}\,dr + \Theta_2\,; \end{aligned} \right.$$

où Θ_1 et Θ_2 ne sont fonctions que de θ. Ces expressions donnent évidemment, pour les quotients différentiels de φ et de ψ par rapport à r, les deux premières équations (170). Il faut déterminer Θ_1 et Θ_2 pour que les quotients différentiels de φ et de ψ par rapport à θ soient d'accord avec les deux dernières équations (170). En différentiant ces expressions par rapport à θ on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r\frac{\partial(\xi+\xi')}{\partial\theta}dr+\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r\frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial\theta}dr+\frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta}$$
$$-\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r(\xi+\xi')\,dr+\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r(\eta+\eta')\,dr,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r\frac{\partial(\eta-\eta')}{\partial\theta}dr+\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r\frac{\partial(\xi-\xi')}{\partial\theta}dr+\frac{\partial\Theta_2}{\partial\theta}$$
$$+\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r(\eta-\eta')\,dr+\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r(\xi-\xi')\,dr.$$

Si maintenant, dans les équations (161) on substitue, au moyen des (163), les quotients différentiels par rapport à r et θ à ceux qui sont pris par rapport à x et à y, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial(\xi+\xi')}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial(\xi+\xi')}{r\partial\theta}\cos\theta+\frac{\partial(\eta+\eta')}{r\partial\theta}\sin\theta=0,$$
$$\frac{\partial(\xi-\xi')}{\partial r}\cos\theta+\frac{\partial(\eta-\eta')}{\partial r}\sin\theta-\frac{\partial(\xi-\xi')}{r\partial\theta}\sin\theta+\frac{\partial(\eta-\eta')}{r\partial\theta}\cos\theta=0.$$

On peut alors, dans les expressions précédentes de $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, mettre, à la place des quotients différentiels par rapport à θ, ceux qui sont pris par rapport à r, et l'on obtient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r\left(\eta+\eta'+r\frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial r}\right)dr-\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r\left(\xi+\xi'+r\frac{\partial(\xi+\xi')}{\partial r}\right)dr+\frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r\left(\xi-\xi'+r\frac{\partial(\xi-\xi')}{\partial r}\right)dr+\frac{\sin\theta}{2}\int_0^r\left(\eta-\eta'+r\frac{\partial(\eta-\eta')}{\partial r}\right)dr+\frac{\partial\Theta_2}{\partial\theta}.$$

On peut maintenant intégrer les seconds membres; et, en observant que les quatre intégrales qui sont $r(\eta\pm\eta')$, $r(\xi\pm\xi')$, n'ont pas besoin qu'on leur ajoute de constantes, vu qu'elles s'annulent à la limite inférieure $r=0$, on obtient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=r\left(\cos\theta\frac{\eta+\eta'}{2}-\sin\theta\frac{\xi+\xi'}{2}\right)+\frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=r\left(\cos\theta\frac{\xi-\xi'}{2}+\sin\theta\frac{\eta-\eta'}{2}\right)+\frac{\partial\Theta_2}{\partial\theta}.$$

Ces équations concordent avec les deux dernières (170) à la condition que l'on admette Θ_1 et Θ_2 comme des quantités constantes, afin que leurs quotients différentiels par rapport à θ disparaissent. En donnant ainsi aux grandeurs Θ cette signification de constantes, les équations (171) p. 329, donnent les expressions complètes de φ et de ψ.

Pour effectuer les intégrations qui y sont indiquées, remarquons que d'après les séries (168), p. 323, ξ' et η' ont la forme

$$\xi' = \xi'_0 + \xi'_1 , \qquad \eta' = \eta'_0 + \eta'_1 ;$$

et que d'après (167) on a

$$\begin{aligned} \xi'_0 \cos\theta + \eta'_0 \sin\theta &= \rho\cos\theta + \rho'\sin\theta , \\ \eta'_0 \cos\theta - \xi'_0 \sin\theta &= \rho\sin\theta - \rho'\cos\theta . \end{aligned}$$

On peut donc aussi écrire

$$(171\,a)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{\cos\theta}{2}\int_0^r (\xi + \xi'_1 + \rho)\,dr + \frac{\sin\theta}{2}\int_0^r (\eta + \eta'_1 + \rho')\,dr + \Theta_1 , \\ \psi &= -\frac{\cos\theta}{2}\int_0^r (\eta - \eta'_1 + \rho')\,dr + \frac{\sin\theta}{2}\int_0^r (\xi - \xi'_1 + \rho)\,dr + \Theta_2 . \end{aligned} \right.$$

Au moyen des développements (165) de ξ, η, p. 322 et (168 a) de ρ et ρ', p. 325, on donne facilement aux binômes $(\xi + \rho)$, $(\eta + \rho')$ la forme

$$\begin{aligned} \xi + \rho = {} & \frac{3 - \mathfrak{y}'}{4(1 - \mathfrak{y}')}\left[A_0 + A_1 r\cos\theta + B_1 r\sin\theta + A_2 r^2\cos 2\theta + B_2 r^2 \sin 2\theta + \ldots\right] \\ & - \frac{1 + \mathfrak{y}'}{4(1 - \mathfrak{y}')}\left[A_0 + 2A_1 r\cos\theta + 2B_1 r\sin\theta + 3A_2 r^2\cos 2\theta + 3B_2 r^2\sin 2\theta + \ldots\right], \\ \eta + \rho' = {} & \frac{3 - \mathfrak{y}'}{4(1 - \mathfrak{y}')}\left[B_0 + B_1 r\cos\theta - A_1 r\sin\theta + B_2 r^2\cos 2\theta - A_2 r^2\sin 2\theta + \ldots\right] \\ & + \frac{1 + \mathfrak{y}'}{4(1 - \mathfrak{y}')}\left[B_0 + 2B_1 r\cos\theta - 2A_1 r\sin\theta + 3B_2 r^2\cos 2\theta - 3A_2 r^2\sin 2\theta + \ldots\right]; \end{aligned}$$

où $\dfrac{3 - \mathfrak{y}'}{1 - \mathfrak{y}'} = \dfrac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{f}} + 1$.

Si enfin, on prend dans (168), p. 323, les valeurs de $\xi'_1 = \xi' - \xi'_0$ et de $\eta'_1 = \eta' - \eta'_0$ on a, par l'intégration des termes de (171 a), les expressions suivantes pour φ et ψ :

$$\varphi = \Theta_1 + \frac{3-\eta'}{8(1-\eta')}\left\{ r(A_0\cos\theta + B_0\sin\theta) + \frac{r^2}{2}(A_1\cos 2\theta + B_1\sin 2\theta) + \frac{r^3}{3}(A_2\cos 3\theta + B_2\sin 3\theta) + \ldots \right\}$$
$$- \frac{1+\eta'}{8(1-\eta')}\left\{ r(A_0\cos\theta - B_0\sin\theta) + r^2A_1 + r^3(A_2\cos\theta + B_2\sin\theta) + r^4(A_3\cos 2\theta + B_3\sin 2\theta) + \ldots \right\};$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ r(C_0\cos\theta + D_0\sin\theta) + \frac{r^2}{2}(C_1\cos 2\theta + D_1\sin 2\theta) + \frac{r^3}{3}(C_2\cos 3\theta + D_2\sin 3\theta) + \ldots \right\}$$
$$= \Theta_2 + \frac{3-\eta'}{8(1-\eta')}\left\{ r(A_0\sin\theta - B_0\cos\theta) + \frac{r^2}{2}(A_1\sin 2\theta - B_1\cos 2\theta) + \frac{r^3}{3}(A_2\sin 3\theta - B_2\cos 3\theta) + \ldots \right\}$$
$$- \frac{1+\eta'}{8(1-\eta')}\left\{ r(A_0\sin\theta - B_0\cos\theta) - r^2B_1 + r^3(A_2\sin\theta - B_2\cos\theta) + r^4(A_3\sin 2\theta - B_3\cos 2\theta) + \ldots \right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{ r(C_0\sin\theta - D_0\cos\theta) + \frac{r^2}{2}\left(C_1\sin 2\theta - D_1\cos 2\theta +\right)\frac{r^3}{3}C_2\sin 3\theta - D_2\cos 3\theta) + \ldots \right\}.$$

Après avoir donné ces développements complets, il suffira d'indiquer brièvement les formes sous lesquelles se présentent les déplacements et les tensions. En introduisant dans les expressions (132 a) de u, v, w, et (132 b) de t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} les fonctions ξ, η, ξ', η', définies par (157) et (159) et en remplaçant ensuite les $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}$ par les dérivées en r et θ que fournissent les formules de transformation (163) et (162 a), l'on obtient pour les déplacements :

$$u = \frac{\eta'' z^2}{2(1-\eta')}\left\{ \frac{\partial\xi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\xi}{r\partial\theta}\sin\theta \right\} + \varphi,$$
$$v = \frac{\eta'' z^2}{2(1-\eta')}\left\{ \frac{\partial\xi}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\xi}{r\partial\theta}\cos\theta \right\} + \psi,$$
$$w = -\frac{\eta'' z}{1-\eta'}\xi;$$

et pour les tensions :

$$t_{xx} = \frac{E'}{2(1-\eta'^2)}\Big[(1+\eta')\xi + (1-\eta')\xi'$$
$$+ \eta'' z^2\left\{ \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\cos^2\theta + 2\left(\frac{\partial\xi}{r\partial\theta} - \frac{\partial^2\xi}{r\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial^2\xi}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial\xi}{r\partial r}\right)\sin^2\theta \right\}\Big],$$
$$t_{yy} = \frac{E'}{2(1-\eta'^2)}\Big[(1+\eta')\xi - (1-\eta')\xi'$$
$$+ \eta'' z^2\left\{ \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\sin^2\theta - 2\left(\frac{\partial\xi}{r\partial\theta} - \frac{\partial^2\xi}{r\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial^2\xi}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial\xi}{r\partial r}\right)\cos^2\theta \right\}\Big],$$
$$t_{xy} = \frac{E'}{2(1-\eta'^2)}\Big[(1-\eta')\eta'$$
$$+ \eta'' z^2\left\{ \left(\frac{\partial^2\xi}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial\xi}{r^2\partial\theta}\right)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\xi}{r^2\partial\theta^2} - \frac{\partial\xi}{r\partial r}\right)\sin\theta\cos\theta \right\}\Big];$$

$$\text{où}\quad \frac{E'\eta''}{2(1-\eta'^2)} = \frac{\text{fd}'}{\text{c}},\quad \frac{E'}{2(1-\eta')} = \text{a}_1 - \text{f},\quad \frac{E'}{2(1+\eta')} = \text{f}.$$

Dans les expressions des déplacements, il y a encore trois constantes indéterminées B_0, Θ_1, Θ_2 ; mais ces constantes ne se trouvent pas dans les expressions des tensions : celles-ci sont donc complètement déterminées en chaque point. Pour reconnaître l'influence de ces constantes sur les déplacements laissons les subsister seules en faisant disparaître tout le reste, nous avons :

$$u = \Theta_1 + \frac{1}{4} B_0 r \sin\theta = \Theta_1 + \frac{B_0 x}{4},$$

$$v = \Theta_2 - \frac{1}{4} B_0 r \cos\theta = \Theta_2 - \frac{B_0 y}{4},$$

$$w = 0.$$

On a déjà dit plusieurs fois que des formules de cette espèce correspondent à un petit déplacement du système des axes coordonnés, c'est-à-dire à une petite translation avec une petite rotation générale ; et ici, où l'on a $w = 0$, cette translation et cette rotation ne sont que parallèles au plan xy. L'indétermination de Θ_1, Θ_2, B_0 est donc sans influence sur l'état intérieur du corps ; on peut par conséquent annuler ces constantes ou bien leur attribuer une valeur arbitraire quelconque. Le problème est donc complètement déterminé.

Il est sans doute possible de résoudre, pour des plaques d'une autre forme, le problème proposé, comme on vient de le faire pour une plaque circulaire. Il nous suffit d'avoir montré complètement, pour ce cas particulier, la marche à suivre ainsi que la solution : on voit aussi que cette solution, complète et générale, pour ce cas le plus simple est déjà compliquée ; car, dans les expressions obtenues pour les déplacements u, v, w des points et pour les tensions t_{xx}, t_{yy}, t_{xy} qui y agissent, il faut, à la place de la fonction ξ, mettre la série trigonométrique (165) p. 322, dont les coefficients A_0, A_1, A_2,.... B_1, B_2, ont les expressions (169 *b.*) de la p. 328, où les intégrales définies $\int_0^{2\pi}$ se calculent lorsque les forces A, B qui agissent sur chaque bande longitudinale de la surface latérale de la plaque sont données en fonction de l'angle polaire θ.

§ 45. — Flexion d'une plaque par des couples de forces agissant sur son bord. — Flexion uniforme par des couples égaux tournant autour des tangentes à la courbe périphérique de la surface médiane.

Pour compléter ce qui a été dit au commencement du § 40, il reste à examiner la seconde espèce des états d'équilibre contenus dans les expressions générales ($152\,a$), ($152\,b$) p. 302. Pour ces états qui dépendent uniquement, avons-nous dit, de la fonction f et de la constante C' entrant en même temps que φ et ψ dans les expressions générales des déplacements et des tensions, on a seulement :

$$(172)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -z\left(\frac{\partial f}{\partial x} - (1-\eta')\,\frac{C'x}{2}\right), \quad \text{où } \frac{1-\eta'}{2} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{a}_1}\,; \\ v &= -z\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1-\eta')\,\frac{C'y}{2}\right); \\ w &= f - C'(1-\eta')\,\frac{x^2+y^2}{4} - \eta''\,\frac{C'z^2}{2}, \quad \text{où } \frac{\eta''}{2} = \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{d}'}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}}\,; \end{aligned}\right.$$

la fonction f étant définie par l'équation (152)

$$(173)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,;$$

et les tensions ($152\,b$) ont alors pour valeurs :

$$(174)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{t}_{xx} &= -\frac{E'z}{1+\eta'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (1+\eta')\,\frac{C'}{2}\right), \\ \mathfrak{t}_{yy} &= -\frac{E'z}{1+\eta'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (1+\eta')\,\frac{C'}{2}\right), \quad (^*) \\ \mathfrak{t}_{xy} &= -\frac{E'z}{1+\eta'}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \text{où } \frac{E'}{1+\eta'} = 2\mathfrak{f},\ \frac{E'}{2} = 1 - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{a}_1}. \end{aligned}\right.$$

Ce qui caractérise l'état dont nous nous occupons maintenant, c'est que toutes les tensions changent de signe avec z ; que, par conséquent,

---

(*) Dans le livre de Clebsch il y a deux erreurs d'inadvertance. Il y a été donné 2 pour dénominateur à x^2+y^2 dans la troisième (172), et $1-\eta'$ pour coefficient à $\frac{C'}{2}$ dans les deux premières (174). Il faut 4, et $1+\eta'$. Je les ai corrigées aussi plus loin, notamment aux formules ($174\,a$), en y donnant à x^2+y^2 le dénominateur 2 qui manquait, et en réduisant $\mathfrak{t}_{xx} = \mathfrak{t}_{yy}$ à $-\frac{E'zC'}{2}$ au lieu de $\frac{EzC'}{2}\,\frac{1-\eta'}{1+\eta'}$; et, aussi, dans les formules ($174\,c$), (175).

les tensions dans la moitié inférieure de la plaque sont exactement égales et opposées à celles de la moitié supérieure à même distance du plan milieu $z = 0$. Les forces de traction agissant parallèlement à la plaque sur ses bords ou sur son cylindre contournant sont donc aussi égales et opposées de chaque côté de la section plane médiane. Elles n'exercent, composées ensemble, ni traction ni pression ; elles agissent seulement comme moments de rotation autour de droites tracées sur le plan de la section médiane ; et le caractère des formules qu'on vient d'écrire et des déplacements qu'elles expriment, est une *flexion produite par des couples* de pareilles forces.

La surface plane médiane, elle-même, n'éprouve de tension d'aucune sorte ; elle subit seulement un changement de forme tel que ses points se trouvent déplacés normalement à son plan primitif $z = 0$, sans que leur projection change de position dans ce plan, car u et v s'annulent avec z. Les fibres intérieures de la plaque, perpendiculaires à cette surface médiane, restent rectilignes mais changent de direction. En effet, si l'on pose [(73) ou (74) et (75) du § 25, pages 158-159]

$$x' + x + u\,, \qquad y' = y + v\,, \qquad z' = z + w,$$

on peut, des équations (172), déduire les suivantes, en négligeant les quantités d'ordre supérieur de petitesse :

$$x' = x - z'\left(\frac{\partial f}{\partial x} - (1 - \eta')\frac{C'x}{2}\right) \quad \text{où} \quad \frac{1 - \eta'}{2} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{a}_1}\,;$$

$$y' = y - z'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1 - \eta')\frac{C'y}{2}\right)\cdot$$

Si l'on considère x et y, coordonnées de la situation primitive de la fibre, comme des quantités constantes, les équations qu'on vient d'écrire sont en x', y', z', celles de deux plans. L'intersection de ces plans donne la position de la fibre déplacée, restée sensiblement rectiligne comme on voit.

Le cas le plus simple est celui où f lui-même disparaît ; les formules (173), (174) se réduisent alors simplement à

$$(174\,a)\quad \left\{\begin{aligned} & u = \frac{1 - \eta'}{2} C'xz\,, \qquad v = \frac{1 - \eta'}{2} C'yz, \\ & w = -\frac{C'}{2}\left[(1 - \eta')\frac{x^2 + y^2}{2} + \eta'' z^2\right]; \\ & t_{xx} = t_{yy} = \frac{C'E'z}{2}, \quad t_{xy} = 0\,; \quad \text{où}\ \frac{1 - \eta'}{2} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{a}_1}, \quad \frac{\eta''}{2} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{a}_1}\,\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}. \end{aligned}\right.$$

Un pareil état d'équilibre peut évidemment se produire dans une plaque quelconque, quelle qu'en soit la forme. Dans cet état, toute surface parallèle à la surface médiane éprouve des tensions égales en chacun de ses points ; car t_{xx} et t_{yy} sont égales et indépendantes de x, y ; et cette tension produit une extension simple et égale dans tous les sens puisque $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, et que la tension t_{xy}, qui produit le glissement des éléments les uns devant les autres, est nulle.

Les équations des fibres déplacées deviennent alors :

$$x' = x\left(1 + \frac{1-\eta'}{2}C'z'\right), \quad y' = z\left(1 + \frac{1-\eta'}{2}C'z'\right).$$

Les droites représentées par ces deux équations se coupent toutes en un même point de l'axe des z dont les coordonnées sont

$$x' = 0, \quad y' = 0, \qquad z' = -\frac{2}{(1-\eta')C'}.$$

On peut donc considérer les fibres déplacées comme un faisceau qui diverge à partir d'un point unique, pris sur l'axe prolongé, à une grande distance du plan milieu de la plaque. Enfin l'équation d'une surface parallèle à la surface médiane, après les déplacements, lorsqu'on néglige les quantités d'ordre supérieur de petitesse, est l'équation suivante, obtenue en posant $z' = z + w$ et en remplaçant dans l'expression (172) de w, où l'on fait $f = 0$, les coordonnées primitives x, y, par les coordonnées après le déplacement, x', y' :

$$z' = z - \frac{C'}{2}\left[(1-\eta')\frac{x'^2 + y'^2}{2} + \eta'' z^2\right].$$

Cette équation représente un paraboloïde de révolution dont le sommet a pour coordonnées

$$x' = 0, \quad y' = 0, \qquad z' = z - \frac{\eta'' C' z^2}{2}.$$

Si, pour un moment on désigne par ζ la coordonnée z' du sommet, l'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$z' - \zeta = -\frac{C'}{2}(1-\eta')\frac{x'^2 + y'^2}{2};$$

ce qui montre que les différents paraboloïdes, dans lesquels se sont changées les différentes sections planes de la plaque, sont superposa-

bles, et ne diffèrent que par la position du sommet, puisque la seule grandeur z qui les distingue n'est contenue que dans ζ.

Les forces extérieures qui sont capables de produire cet état d'équilibre sont données par les équations (154), (155) du § 39, qui se réduisent dans ce cas à

$$X = X_1 z = \frac{E'C'z}{2} \cos p, \qquad Y = Y_1 z = \frac{E'C'z}{2} \sin p.$$

Les forces sont donc les mêmes pour chaque génératrice du cylindre constituant le bord de la plaque, et elles sont partout normales à ce cylindre. Car on a

$$X : Y = \cos p : \sin p.$$

Elles sont aussi proportionnelles aux distances de leurs points d'application à la surface médiane ; nulles sur cette surface ($z = 0$), elles croissent de part et d'autre avec des valeurs opposées quant au signe (*).

(*) **NOTE FINALE DU § 45.**

1. Clebsch, dans ce § de son livre, considère, comme on voit, le cas *d'une plaque sollicitée, autour, par des forces faisant couples, et d'intensités proportionnelles aux distances z de leurs points d'application à la surface médiane.* Finalement même, par l'annulation de la fonction f (qu'il rétablira au § 46), il réduit les forces à celles qui agissent normalement au cylindre contournant et qui ne tendent à faire tourner qu'autour de tangentes à la périphérie de la section médiane, ce qui produit une flexion *sphérique*, analogue à cette flexion *égale* ou *circulaire* des tiges, déterminée par des couples de forces normales aux bases, dont nous avons parlé au n° 2 de la Note de la fin du § 28.

Dans la présente Note, nous considérerons d'abord cette flexion sphérique. — Nous ferons voir qu'elle peut être trouvée d'une manière fort simple avec une complète rigueur quelle que soit la forme du contour, toujours pour des plaques d'une épaisseur quelconque, sans avoir à la déduire d'une analyse générale et très complexe, préalablement donnée, comme celle des §§ 39 à 44 ci-dessus. Il suffit, en effet, de la regarder comme résultant de la superposition, à angle droit, de deux flexions circulaires ou cylindriques de courbures égales ou de même rayon, et de même sens.

Puis, nous montrerons que le même procédé simple, en superposant deux flexions cylindriques de courbures inégales, même de *sens opposés*, peut faire obtenir avec la même rigueur une curieuse variété de déformations.

On verra ensuite que des solutions tout aussi rigoureuses peuvent être obtenues lorsque les flexions composantes sont déterminées, non plus par des *couples*, mais par des *efforts tranchants* qui agissent tangentiellement

sur les faces latérales de la plaque, et qui l'affectent de ce que nous avons appelé des flexions *inégales*, dans la théorie des tiges.

Mais c'est surtout aux plaques circulaires, d'épaisseur quelconque, dont le bord est appuyé ou encastré, ou même est libre si l'appui a été pris sur tout autre cercle que celui du pourtour, que ce genre rigoureux de solution sera appliqué, et sans faire aucunement l'hypothèse (§ 29, 121 *a* et 121 *b*, p. 297) de nullité des composantes de tension t_{xz}, t_{yz} partout à l'intérieur. Il donnera complètement la forme prise par la plaque fléchie sous l'action d'efforts ou de couples symétriquement distribués autour de son axe de figure, même ailleurs qu'au pourtour. On verra aussi que lorsqu'il s'agira seulement de déterminer sa *flèche centrale* de courbure, les solutions s'étendront à des charges distribuées sur les faces de toutes les manières, même sans continuité ni régularité. Ces solutions, si on néglige certains termes propres aux plaques épaisses (dont l'analyse actuelle tient compte), se trouveront être d'accord avec celles que Poisson a données en 1828 pour les plaques minces et les seuls cas de symétrie, en les tirant de l'intégration de l'équation connue aux différences partielles du quatrième ordre, dont l'établissement est fondé sur de pareilles suppressions faites *a priori*, et qui sera démontrée surtout à la Note du § 73.

2. Comme préparation à ces solutions relatives à des plaques de dimensions finies, considérons d'abord une plaque de longueur infinie dans le sens des y, de largeur finie, constante, mais quelconque dans le sens des x, aussi horizontal, et d'une épaisseur que nous appellerons

$$2\varepsilon$$

sollicitée uniquement sur ses deux faces verticales parallèles aux y, et partout de la même manière sur leurs diverses bandes $2\varepsilon dy$, par des forces normales $t_{xx}\,dy\,dz$, supposées proportionnelles à la coordonnée z, et, par conséquent, faisant couples, puisque z est positif entre ses valeurs 0 et $+\varepsilon$, négatif entre 0 et $-\varepsilon$. On suppose que l'élasticité de la matière homogène de la plaque est la même dans tous les sens horizontaux, mais que celle du sens vertical en diffère autant qu'on veut.

Vu qu'aucune raison n'existe pour qu'une plaque ainsi sollicitée se dilate dans le sens y où elle est indéfinie, on aura partout $\partial_y = \dfrac{dv}{dy} = 0$, et les trois tensions normales seront régies par les formules (h_1) du n° 15 de la Note du § 16, reproduites ci-dessus § 59, sous le n° (121 *c*), page 297 :

$$(a)\qquad t_{xx} = (2f + f')\,\partial_x + d'\partial_z, \qquad t_{yy} = f'\partial_x + d'\partial_z, \qquad t_{zz} = d'\partial_z + c\partial_z.$$

Elles sont à substituer dans les trois équations indéfinies de l'équilibre d'un élément de volume

$$(b)\qquad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0.$$

On y satisfera, ainsi qu'à $t_{zz, zx, zy} = 0$ pour $z = \pm \varepsilon$, l'origine des z étant prise sur le feuillet moyen, au milieu de la largeur de la plaque, par

$$(c) \quad u = -\frac{xz}{R}, \quad v = 0, \quad w = \frac{1}{2R}\left(x^2 + \frac{d'}{c} z^2\right), \quad \text{(R étant une constante)},$$

donnant

$$(d) \quad \partial_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{R}, \qquad \partial_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \partial_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{d'}{c}\partial_x = \frac{d'}{c}\frac{z}{R},$$

$$(e) \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Si nous substituons dans (a), en faisant, comme au n° 16 *bis* de la Note du § 16, formules (z), p. 84,

$$(f) \qquad 2f + f' - \frac{d'^2}{c} = a_1,$$

nous avons

$$(g) \quad t_{xx} = -a_1\frac{z}{R}, \quad t_{yy} = -(a_1 - 2f)\frac{z}{R}, \quad t_{zz} = 0, \quad t_{yz, zx, xy} = 0,$$

qui réduisent à l'identité $0 = 0$ les équations d'équilibre (b).

On voit que a_1 est un module d'élasticité d'extension propre aux plaques dont les *deux* faces perpendiculaires à une seule coordonnée z sont libres, comme le module E de Navier est propre aux tiges dont les *quatre* faces perpendiculaires à deux coordonnées transversales sont libres de toute action extérieure (voyez le n° 15 de la Note du § 16, et le n° 6 ci-après de la présente Note) (*).

Les équations (e) prouvent que toutes les petites lignes ou petites faces matérielles primitivement parallèles ou perpendiculaires aux x, y, z resteront à angle droit les unes sur les autres.

La première (c) prouve qu'un point dont l'abscisse et l'ordonnée primitives étaient x et z a maintenant pour abscisse $x + u = x\left(1 - \frac{z}{R}\right)$. Cette quantité est $= 0$ pour $z = R$; toutes les lignes matérielles primitivement verticales aboutissent donc maintenant, si on les prolonge, à une ligne horizontale ayant pour équation $x = 0$, $z = R$. Comme elles restent normales, vu (e) $g_{zx} = 0$, au feuillet moyen, on voit que ce feuillet primitivement plan est changé maintenant *en portion d'un cylindre à base circulaire de rayon* R, ayant pour axe cette même horizontale parallèle aux y.

La première (g) montre que le moment ou couple de flexion M_y appliqué

(*) Ce module a_1 est les $\frac{16}{15}$ du module E de Navier lorsque $a = b = c = 3f = 3f' = 3d' = 3G$.

aux faces verticales de hauteur 2ε, parallèle aux y, a pour valeur

$$(h)\qquad \mathrm{M}_y = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{t}_{xx}\, z\,dz = -\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{R}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} z^2 dz = -\frac{2\mathrm{a}_1 \varepsilon^3}{3\mathrm{R}}.$$

La seconde (g) prouve que si, dans cette plaque indéfinie, on taille une plaque rectangle d'une longueur finie dans le sens y, et si l'on veut que la flexion ne cesse pas de suivre ces lois, il faut appliquer aux divers éléments $dx\,dz$ des deux faces nouvelles de hauteur 2ε, parallèles aux x, des forces normales, faisant couples, comme celles qui agissent sur les faces parallèles aux y, mais ayant, pour l'unité superficielle, des intensités

$$(h_1)\qquad \mathrm{t}_{yy} = -(\mathrm{a}_1 - 2\mathrm{f})\frac{z}{\mathrm{R}},$$

quatre fois moins grandes, quand $\mathrm{a} = \mathrm{c} = 3\,\mathrm{f} = 3\,\mathrm{f}' = 3\,\mathrm{d}' = 3\,\mathrm{G}$, que les intensités de celles-ci, et ne servant qu'à empêcher les nouvelles faces de perdre leur verticalité.

5. A ces déplacements (c) d'une plaque indéfinie dans le sens y, superposons-en d'autres, à savoir ceux que prendrait une plaque indéfinie dans le sens x, d'une longueur *finie* quelconque dans le sens y, et sollicitée sur les nouvelles faces, qui sont parallèles aux x, par des tensions $\mathrm{t}_{yy} = -\mathrm{a}_1 \frac{z}{\mathrm{R}}$. Ces déplacements ne différeront de ceux (c) qu'en ce que x sera changé en y, et u en v; et ils leur seront superposables par simple addition, comme on sait, si les uns comme les autres sont très petits. Les déplacements résultants auront ces expressions qui conviendront à des plaques, soit rectangles de dimensions quelconques, soit, comme on va voir, circulaires de rayons quelconques :

$$(i)\qquad u = -\frac{xz}{\mathrm{R}},\quad v = -\frac{yz}{\mathrm{R}},\quad w = \frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}} z^2\right),$$

donnant

$$(j)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x = \partial_y = -\frac{z}{\mathrm{R}}, & \partial_z = 2\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\frac{z}{\mathrm{R}}, & g_{yz,zx,xy} = 0, \\ \mathrm{t}_{xx} = \mathrm{t}_{yy} = -2(\mathrm{a}_1 - \mathrm{f})\frac{z}{\mathrm{R}}, & \mathrm{t}_{zz} = 0, & \mathrm{t}_{yz,zx,xy} = 0; \end{array}\right.$$

en sorte que les lignes droites primitivement normales au feuillet moyen $z = 0$, ainsi qu'aux faces $z = \pm\varepsilon$, sont restées normales à ces trois surfaces après leur incurvation.

Prenons des coordonnées semi-polaires

$$(k)\qquad ,\ \alpha,\qquad \text{telles qu'on ait}\qquad x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,$$

égalités qui, différentiées, donnent, pour avoir les déplacements :

$$(k_1)\qquad \delta x = \delta r\cos\alpha - r\delta\alpha\sin\alpha,\qquad \delta y = \delta r\sin\alpha + r\delta\alpha\cos\alpha;$$

ou, en appelant, avec Lamé,

$$\mathrm{U},\quad \mathrm{V},\quad \mathrm{W}$$

les déplacements du point (x, y, z ou r, α, z) dans les sens respectifs du rayon vecteur r, de l'élément $r\partial\alpha$ de son cercle, et des z:

$$(l)\quad \begin{cases} u = \mathrm{U}\cos\alpha - \mathrm{V}\sin\alpha, & v = \mathrm{U}\sin\alpha + \mathrm{V}\cos\alpha; \\ \text{d'où}\quad \mathrm{U} = u\cos\alpha + v\sin\alpha, & \mathrm{V} = -u\sin\alpha + v\cos\alpha. \end{cases}$$

En y substituant les (i), on trouve, eu égard aux (k),

$$(m)\qquad \mathrm{U} = -\frac{rz}{\mathrm{R}},\quad \mathrm{V} = 0,\quad \mathrm{W} = \frac{1}{\mathrm{R}}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}z^2\right).$$

Toutes les fois que le déplacement horizontal V dans un sens perpendiculaire au rayon vecteur r est nul, et que les déformations s'opèrent symétriquement autour de l'axe des z, *les dérivées par rapport à α sont nulles*, ce qui n'empêche pas qu'il n'y ait une dilatation ∂_α dans le sens $rd\alpha$ perpendiculaire au méridien de tout point, puisque, r devenant $r + \mathrm{U}$, le petit arc $rd\alpha$ augmente de $\mathrm{U}\,d\alpha$; d'où il suit, comme il est facile de le voir, qu'on a pour les dilatations, les glissements et les composantes de tension dans les sens r, $rd\alpha$ et z,

$$(n)\quad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial r},\quad \partial_\alpha = \dfrac{\mathrm{U}}{r},\quad \partial_z = \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}, \\ \mathrm{g}_{\alpha z} = 0,\quad \mathrm{g}_{zr} = \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial r} + \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z},\quad \mathrm{g}_{r\alpha} = 0; \end{cases}$$

$$(o)\quad \begin{cases} \mathrm{t}_{rr} = (2\mathrm{f}+\mathrm{f}')\partial_r + \mathrm{f}'\partial_\alpha + \mathrm{d}'\partial_z,\quad \mathrm{t}_{\alpha\alpha} = \mathrm{f}'\partial_r + (2\mathrm{f}+\mathrm{f}')\partial_\alpha + \mathrm{d}'\partial_z, \\ \mathrm{t}_{zz} = \mathrm{d}'\partial_r + \mathrm{d}'\partial_\alpha + \mathrm{c}\partial_z; \end{cases}$$

d'où, si l'on a partout $\mathrm{t}_{zz} = 0$, l'on tire, en éliminant ∂_z,

$$(p)\qquad \mathrm{t}_{rr} = \mathrm{a}_1(\partial_r + \partial_\alpha) - 2\mathrm{f}\partial_\alpha,\qquad \mathrm{t}_{\alpha\alpha} = \mathrm{a}_1(\partial_r + \partial_\alpha) - 2\mathrm{f}\partial_r.$$

Dans le cas présent on voit par les expressions (m), des déplacements :

1° Que g_{zr} sera nul comme les deux autres glissements;

2° Qu'on aura partout

$$(q)\quad \partial_r = \partial_\alpha = \partial_x = \partial_y = -\frac{z}{\mathrm{R}},\quad \mathrm{t}_{rr} = \mathrm{t}_{\alpha\alpha} = \mathrm{t}_{xx} = \mathrm{t}_{yy} = -2(\mathrm{a}_1 - \mathrm{f})\frac{z}{\mathrm{R}};$$

3° Que le rayon vecteur r d'un point quelconque est devenu, après la flexion,

$$r + \mathrm{U} = r\left(1 - \frac{z}{\mathrm{R}}\right).$$

Comme cette quantité s'annule pour $z = \mathrm{R}$, il s'ensuit que toutes les petites lignes matérielles primitivement perpendiculaires au feuillet moyen, mesurant

les distances z des divers points à ce feuillet, concourent maintenant, étant prolongées hors de la plaque, au point $z = R$ de l'axe des z. Comme elles lui sont restées normales puisque les glissements $g_{z\alpha}$, g_{zr} sont nuls, ce feuillet s'est changé en une portion de sphère de rayon R ayant son centre à ce même point ($r = 0$, $z = R$). C'est ce qu'on pouvait déjà voir par les expressions (i) qui donnent zéro pour $x + u$ et $y + v$ quand on y fait $z = R$.

4. Si donc on a une plaque horizontale, soit rectangulaire de côtés quelconques, soit circulaire de rayon quelconque, et si l'on applique uniformément sur ses faces verticales des forces normales t_{xx}, t_{yy} ou t_{rr}, d'intensités (j), $-2(a_1 - f)\frac{z}{R}$ par unité superficielle de leurs éléments, forces qui sur chaque bande verticale feront couples puisque les z se comptent tant au-dessus qu'au-dessous du plan à égale distance des deux faces horizontales $z = \pm\varepsilon$, ce plan, si la plaque est circulaire, se changera en calotte sphérique de rayon R, et, si elle est rectangulaire, en une portion de sphère du même rayon; portion qui pour $W_0 = (W)_{z=0}$ supposé très petit, se confond avec la portion de même hauteur du paraboloïde de révolution $w_0 = \frac{x^2 + y^2}{2R}$, donné par la troisième équation (i) en y faisant $z = 0$.

Le milieu $x = 0$, $z = 0$, ou $r = 0$ du feuillet moyen, qui peut être supposé n'avoir pas changé de place, ne se trouve plus, après la flexion, à égale distance des deux faces $z = -\varepsilon$, $z = +\varepsilon$, aussi devenues sphériques. Toutes deux se sont relevées de

$$(r) \qquad (W)_{z=\pm\varepsilon} = \frac{d'}{c}\frac{\varepsilon^2}{R}.$$

Ces relèvements s'expliquent, savoir : 1° celui de la face inférieure $z = -\varepsilon$, par les contractions verticales $-\partial_z = \frac{d'}{c}\cdot\frac{1}{R}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{d'}{c}\cdot\frac{1}{R}\frac{\varepsilon}{2}$, dont chacune des deux moitiés accompagne nécessairement, et dans une proportion $\frac{d'}{c}$ (*), les dilatations horizontales ∂_r et $\partial_\alpha = -\frac{z}{R}$ qui ont lieu pour $z = -\frac{1}{2}\varepsilon$, moyenne des ordonnées de ce côté inférieur dont la hauteur est ε; et 2° celui de la face supérieure $z = \varepsilon$, par les dilatations verticales, ou dans le sens z, accompagnant les contractions horizontales de x et y ou r et α, quand on a, comme ici, $t_{zz} = 0$ sur les faces inférieure et supérieure $z = \pm\varepsilon$.

(*) Cette proportion $\frac{d'}{c}$, ou $\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$ d'après la notation de Lamé, quand il y a isotropie complète, serait de $\frac{1}{3}$ si λ était égal à μ (note du § 16), c'est-à-dire serait supérieure aux η qui sont égaux à $\frac{1}{4}$ dans la même supposition d'isotropie.

On aura, pour les moments fléchissants produits par ces forces t_{xx}, ou t_{yy} ou $t_{rr} = -2(a_1 - f)\frac{z}{R}$:

$$(s) \qquad M_x \text{ ou } M_y \text{ ou } M_r = -2(a_1 - f)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{z}{R} z\,dz = -\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1 - f}{R}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux des formules (172), (174), (174 *a*) de Clebsch lorsqu'on y fait (voir formules (x) et (z) de la Note § 16, p. 83-84),

$$\frac{1}{R} = -\frac{1-\eta'}{2}C', \quad 2(a_1 - f) = \frac{E'}{1-\eta'}, \quad \frac{d'}{c}\frac{1}{R} = -\frac{C'\eta''}{2}.$$

Ils ont un intérêt pratique bien que l'application, au contour, de forces normales distribuées comme l'exigent les expressions ci-dessus t_{xx}, t_{yy} ou $t_{rr} = -2(a_1 - f)\frac{z}{R}$ soit irréalisable ; car si à leur place, il y a (comme on a dit au § 28 et à la Note), tout auprès des bords d'une plaque mince, d'autres forces appliquées par exemple sur les faces supérieure et inférieure de manière à n'avoir pas de résultante et à produire des couples dont les moments fléchissants aient par unité de longueur la valeur (s) $-2(a_1 - f)\frac{2\varepsilon^3}{3R}$, la plaque soit rectangle, soit circulaire, éprouvera *très approximativement* la déformation sphérique indiquée, *partout* sauf de très petites zones auprès des bords, par les raisons que nous avons données précédemment en traitant des tiges (Note citée du § 28).

5. Aux déplacements u, v, w donnés par (c) on aurait pu en superposer d'autres donnés par

$$u = 0, \quad v = -\frac{yz}{R'}, \quad w = \frac{1}{2R'}\left(y^2 + \frac{d'}{c}z^2\right)$$

différant de ceux qu'on a ajoutés au nº 3 pour avoir (i) en ce qu'au lieu de R il y a une autre constante R'. Il en résulte, au lieu de (i), (j) :

$$(t) \qquad u = -\frac{xz}{R}, \quad v = -\frac{yz}{R'}, \quad w = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R'}\right)\frac{d'}{c}z^2$$

$$(u)\left\{\begin{array}{l} \partial_x = -\frac{z}{R}, \quad \partial_y = -\frac{z}{R'}, \quad \partial_z = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\frac{d'}{c}z, \quad g_{yz,zx,xy} = 0 \\ t_{xx} = -\left(\frac{a_1}{R} + \frac{a_1 - 2f}{R'}\right)z, \quad t_{yy} = -\left(\frac{a_1 - 2f}{R} + \frac{a_1}{R'}\right)z, \quad t_{zz} = 0, \quad t_{yz,zx,xy} = 0. \end{array}\right.$$

Ces valeurs de t_{xx}, t_{yy} donnent les forces faisant couples à appliquer normalement sur les faces latérales perpendiculaires respectivement aux x et aux y, d'une plaque rectangulaire *de dimensions quelconques* pour que se points éprouvent les déplacements (t), et ses parties les petites déformations (u).

Si R, R′ sont de même signe, l'équation $w_0 = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'}$ du feuillet moyen après la flexion est celle d'un *paraboloïde elliptique*. Si R, R′ sont de signe contraire, c'est celle d'un *paraboloïde hyperbolique*. Comme on a $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{1}{R}$, $\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{1}{R'}$, on voit que lorsque les flexions sont faibles, ce qui doit toujours être supposé dans la théorie de l'élasticité, R et R′ sont les deux rayons principaux de la courbure prise par ce feuillet.

Si $R = -R'$, le feuillet moyen devient une de ces surfaces à courbures principales égales et opposées, appelées *anticlastiques* par MM. Thomson et Tait, dans leur grand *A Treatise of Natural Philosophy*, de 1867, dont un seul exemplaire existe en France, et dont il n'a encore été réédité que le premier volume.

6. Si ce sont des *efforts tranchants*, au lieu de couples, qui déterminent la flexion de la plaque, des solutions analogues à celles des nos 2, 3, 4 peuvent encore être données, et cette flexion est alors (comme pour les tiges) *inégale* au lieu d'être *égale* ou sphérique.

Soit d'abord une plaque indéfinie dans le sens y, et terminée dans le sens x, aussi horizontal, par deux faces verticales planes $x = \pm a$. Si P représente l'effort tranchant qui agit sur l'unité de longueur horizontale et tangentiellement dans le sens z sur ces faces dont la hauteur est 2ε, on doit avoir, pour l'équilibre de translation dans ce sens vertical, et pour l'équilibre de rotation autour de la médiane $z = 0$ d'une section verticale dont l'abscisse est x, de la partie de plaque de largeur $a - x$ comprise entre cette section et le bord $x = a$:

$$(v) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{xz}\, dz = P, \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{xx}\, z\, dz = P(a - x).$$

Il est facile de reconnaître qu'on y satisfera, ainsi qu'aux équations indéfinies (b) de l'équilibre avec les $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, et, aussi, aux conditions $(t_{zz,zx,zy})_{z=\pm\varepsilon} = 0$, par les expressions suivantes :

$$(x) \quad \begin{cases} u = \dfrac{3P}{2a_1\varepsilon^3}\left[-z\left(ax - \dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{d'}{c}\dfrac{z^3}{6}\right] + \dfrac{3P}{4e}\left(\dfrac{z}{\varepsilon} - \dfrac{z^3}{3\varepsilon^3}\right), \\ v = 0, \\ w = \dfrac{3P}{2a_1\varepsilon^3}\left[\dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{d'}{c}\left(a - x\right)\dfrac{z^2}{2}\right]; \end{cases}$$

donnant

$$(y) \quad \begin{cases} t_{zz} = 0, \quad t_{yz} = 0, \quad t_{xz} = e\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{d'}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(z) \qquad t_{xx} = a_1\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3Pz}{2\varepsilon^3}(a - x)$$

et, par suite :

$$(a') \qquad t_{xz} = \frac{3P}{4\varepsilon}\left(1 - \frac{z^2}{\varepsilon^2}\right), \ t_{yy} = -\frac{a - 2f}{a_1}\frac{3Px}{2\varepsilon^3}(a - x) \cdot \qquad (*)$$

En faisant $z = 0$ dans les expressions (x), l'on voit que, pour les points du feuillet moyen de la plaque, le déplacement horizontal u est nul, et le déplacement vertical

$$(b') \qquad w_0 = \frac{Pa^3}{2a_1\varepsilon^3}\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{a^3}\right)$$

suit la même loi que pour une tige horizontale d'épaisseur verticale 2ε, posée sur deux appuis distants de $2a$, si elle est chargée au milieu d'un poids $2P$ par unité de sa largeur. Seulement, il y a, au dénominateur, le module a_1 des plaques (nº 2), au lieu du module connu E des tiges, un peu moindre, qu'on a lorsque les faces verticales 2ε sont libres; en sorte que la *flèche* de la flexion de la plaque d'une largeur très grande, ou comparable tout au moins à sa longueur $2a$, posée sur deux lignes horizontales fixes, et ainsi chargée, est $\frac{Pa^3}{2a_1\varepsilon^3}$ au lieu de $\frac{Pa^3}{2E\varepsilon^3}$.

Si l'on voulait, au reste, que les points prissent exactement les déplacements (x) quelle que fût la largeur de la plaque dans le sens y (et toujours quelle que fût l'épaisseur 2ε), il faudrait appliquer, non seulement sur les faces $x = a$ les forces tangentielles verticales t_{xz} exprimées par la formule (a'), mais encore (et analogiquement à ce qu'a offert l'expression (h_1) du nº 2), sur les faces taillées, des forces perpendiculaires aux y, et exprimées par la valeur (a') de t_{yy}.

7. On pourrait même, aux petits déplacements u, v, w du système (x) en ajouter d'autres qu'on en déduirait en y changeant u en v en même temps que x, a, P, en y, b, Q, ce qui donnerait les flexions d'une plaque de largeur $2a$ dans le sens x, de longueur $2b$ dans le sens y, sollicitée sur ses faces latérales perpendiculaires à x et à y par des forces telles que (a') faisant efforts tranchants P, Q pour l'unité de leur longueur. Mais l'expression qui en résulterait pour les déplacements verticaux du feuillet moyen $z = 0$

$$(c') \qquad w_0 = \frac{3}{2a_1\varepsilon^3}\left(\frac{Pax^2 + Qby^2}{2} - \frac{Px^3 + Qy^3}{6}\right)$$

montre qu'on ne saurait regarder une plaque ainsi sollicitée comme appuyée tout autour sur un cadre horizontal; car, même en ajoutant, autour,

(*) M. Boussinesq, à qui je dois la détermination, à ma demande, des formules (x), a remarqué que celles (c), (d) nº 2, sont un cas particulier de celles (x), (y), (z), (a') que nous venons de donner : il suffit, pour y ramener celles-ci, de faire P infiniment petit, a infiniment grand, mais leur produit Pa fini $= \frac{2a_1\varepsilon^3}{3R}$. On sait, et on voit en statique, qu'un couple peut en effet être réduit à une force infiniment petite agissant à une distance infinie sur un système invariablement lié à celui où le couple s'exerce.

des couples comme ceux du n° 5, choisis comme on voudrait, et augmentant w_0 de $\frac{x^2}{2R}+\frac{y^2}{2R}$, on aurait toujours, en faisant soit $x=a$, soit $y=b$, des valeurs de w_0 non constantes, à cause des termes du troisième degré en y ou x. Le problème de la flexion de la plaque rectangulaire posée de niveau tout autour ne peut probablement recevoir que des solutions approximatives comme celles qui feront le sujet de la *deuxième partie* où nous allons entrer, et où l'on traitera, chap. V, *des plaques d'une épaisseur très petite*. La fin de la note du § 73 en donnera la solution due à Navier (*).

8. Mais il en est autrement d'une PLAQUE CIRCULAIRE.

Sa flexion peut être obtenue exactement et complètement, quelle que soit son épaisseur, si elle est sollicitée symétriquement en tous sens autour de son axe de figure, moyennant que les forces appliquées à son cylindre contournant, et dont on ne connaît en général que les résultantes et les couples résultants, seront supposées distribuées d'une certaine manière sur les bandes verticales qui le composent. Nous supposerons aussi, pour nous borner, qu'elles ne tendent qu'à fléchir la plaque et nullement à l'étendre.

Et même, lorsqu'on ne se propose d'avoir que l'amplitude de sa *flèche centrale* de flexion, on verra qu'elle peut être obtenue avec autant de facilité pour une multitude de cas de dissymétrie et de discontinuité des charges.

Considérons, pour plus de généralité, une plaque évidée circulairement au milieu, ou bien une portion de plaque comprise entre deux cylindres conaxiques à base circulaire.

Soient r_0 et a les rayons intérieur et extérieur des cylindres limitant cette plaque horizontale, d'épaisseur 2ε;

P, comme au n° 6, l'intensité de l'effort tranchant vertical qui agit sur l'unité *de longueur* de son cylindre contournant extérieur, la plaque étant, pour fixer les idées, supposée prendre son appui sur la circonférence immobile, de rayon r_0, du cercle moyen du cylindre intérieur ou d'évidement;

$Q=2\pi a P$, l'effort tranchant total s'exerçant sur toute la surface du cylindre extérieur, de rayon a, de longueur $2\pi a$, de superficie $2\pi a.2\varepsilon$;

M_a, le moment ou couple fléchissant que des forces normales ou horizontales peuvent en même temps produire, aussi sur *l'unité de longueur* horizontale du contour extérieur $r=a$, autour de la tangente à son cercle moyen;

(*) On voit aussi, en faisant $x=r\cos\alpha$, $x=r\sin\alpha$ avec $a=b$, $P=Q$ dans l'expression (c') de w_0 relative à la *plaque carrée* sollicitée tout autour par des efforts tranchants égaux, qu'on ne peut en déduire ce qui est relatif à une plaque circulaire sollicitée de même, comme on a pu le faire au n° 5 quand il n'y avait, au contour, que des forces fléchissantes faisant couples. En effet, cette substitution produit, entre les parenthèses, un terme $\frac{1}{6}Pr^3(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)$ faisant varier w_0 non seulement avec r, mais encore avec l'angle azimutal α; et la surface affectée par le feuillet moyen n'est pas de révolution.

M_s, le moment ou couple semblable, qui s'exerce sur une coupe faite dans la plaque par un cylindre vertical et conaxique, de rayon quelconque r;

R, comme au n° 4, le rayon de la portion de sphère en laquelle se serait changé le plan du feuillet moyen de la plaque si elle n'éprouvait d'autre action que le couple M_a, sans effort tranchant;

W_0 la valeur du déplacement vertical W pour $z=0$, ou l'ordonnée des points du feuillet moyen de la plaque après sa flexion.

Vu la symétrie supposée, comme au n° 5, des actions et flexions autour de l'axe vertical des z qui passe par le centre de la plaque, on aura, en conservant les notations de ce numéro, et les z ne désignant toujours que les distances primitives des divers points de la plaque à son feuillet moyen:

$$(d')\quad \begin{cases} V=0\text{, et les } \dfrac{\partial}{\partial\alpha}=0\text{ ; ou les tensions et les déplacements indépendants de l'angle azimutal } \alpha\text{ ;} \\ \partial_r=\dfrac{\partial U}{\partial r};\quad \partial_\alpha=\dfrac{U}{r},\quad \partial_z=\dfrac{\partial W}{\partial z};\quad g_{\alpha z}=0,\quad g_{zr}=\dfrac{\partial W}{\partial r}+\dfrac{\partial U}{\partial z},\quad g_{r\alpha}=0. \end{cases}$$

$$(e')\quad \begin{cases} t_{rr}=(2f+f')\dfrac{\partial U}{\partial r}+f'\dfrac{U}{r}+d'\dfrac{\partial W}{\partial z}; \\ t_{\alpha\alpha}=f'\dfrac{\partial U}{\partial r}+(2f+f')\dfrac{U}{r}+d'\dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ t_{zz}=d'\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}+\dfrac{U}{r}\right)+c\dfrac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(f')\qquad t_{rz}=e\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r}\right),$$

$$(f_1')\qquad M_s=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rr}\,z\,dz,\qquad M_a=(M_s)_{r=a}.$$

Les tensions t devront satisfaire aux deux équations différentielles suivantes, *indéfinies* ou applicables à tous les points, de l'équilibre de translation d'un élément de plaque dans les sens r et z :

$$(g')\qquad \frac{\partial t_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial t_{rz}}{\partial z}+\frac{t_{rr}-t_{\alpha\alpha}}{r}=0,\qquad \frac{\partial t_{rz}}{\partial r}+\frac{t_{rz}}{r}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}=0,\qquad (*)$$

(*) Ces deux équations sont une particularisation, pour $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}=0$, $t_{r\alpha}=0$, des trois que Lamé a déduites [leçon 14 sur l'élasticité, form. (5)], par une transformation en coordonnées semi-polaires r, α, de celles d'équilibre en coordonnées rectangles x, y, z. On peut les écrire, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$ étant les forces s'exerçant par unité de volume dans les sens r, $rd\alpha$, z :

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{r\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial t_{rz}}{\partial z}+\frac{t_{rr}-t_{\alpha\alpha}}{r}+\mathfrak{R}=0,$$
$$\frac{\partial t_{\alpha r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial t_{\alpha z}}{\partial z}+\frac{2t_{r\alpha}}{r}+\mathfrak{A}=0,$$
$$\frac{\partial t_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{z\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}+\frac{t_{zr}}{r}+\mathfrak{Z}=0.$$

Elles se trouvent démontrées d'une manière directe au n° 6 d'un *Mémoire sur les divers*

ainsi qu'aux conditions *définies* ou relatives à certains points, savoir :

1° Ceux des deux faces horizontales de la plaque :

$$(h') \qquad (\mathrm{t}_{zz})_{z=\pm\varepsilon}=0\,, \qquad (\mathrm{t}_{rz})_{z=\pm\varepsilon}=0.$$

2° Ceux de son contour extérieur vertical :

$$(i') \qquad \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{t}_{rr}dz\right)_{r=a}=0\,, \qquad \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{t}_{rz}dz\right)_{r=a}=\mathrm{P}\,.$$

Nous chercherons donc quelles sont les valeurs générales des déplacements U, W capables d'y satisfaire :

1° Si les forces verticales ou tangentielles t_{rz} agissant sur le contour, dont

---

genres d'homogénéité des corps solides (*Journal de Liouville*, t. X, 1865), et au t. II, n° 163, du *Traité de mécanique générale* de M. Résal, 1874.

Cette démonstration directe, réduite au cas qui nous occupe, consiste à considérer un élément de volume $dr.rd\alpha.dz$ compris entre deux plans ayant pour ordonnées z et $z+dz$, deux méridiens faisant entre eux le petit angle $d\alpha$, et deux cylindres de rayons r et $r+dr$, conaxiques à la plaque.

Cet élément est sollicité sur ses six faces :

1° Dans la direction r, supposée bissectrice du petit angle $d\alpha$, savoir :

Sur ses deux faces cylindriques, par deux forces

$$-rd\alpha dz\,\mathrm{t}_{rr} \text{ et } (r+dr)\,d\alpha dz\left(\mathrm{t}_{rr}+\frac{\partial\,\mathrm{t}_{rr}}{\partial r}dr\right);$$

Sur ses deux faces perpendiculaires aux z, par deux forces

$$-rd\alpha dr\,\mathrm{t}_{zr} \text{ et } rd\alpha dr\left(\mathrm{t}_{zr}+\frac{\partial\,\mathrm{t}_{zr}}{\partial z}dz\right);$$

Sur ses deux faces méridiennes par les composantes, suivant r, de deux forces $\mp drdz\,\mathrm{t}_{\alpha\alpha}$ qui leur sont normales et qui font avec r des angles ayant $\pm\frac{1}{2}d\alpha$ pour cosinus, en sorte que les deux composantes donnent ensemble

$$-drdzd\alpha\,\mathrm{t}_{\alpha\alpha}\,.$$

2° Dans la direction α, perpendiculaire au rayon r, par des forces qui, pour le cas ic considéré, se détruisent ;

3° Dans la direction z :

Sur les deux faces cylindriques, par deux forces

$$-rd\alpha dz\,\mathrm{t}_{rz} \text{ et } (r+dr)d\alpha dz\left(\mathrm{t}_{rz}+\frac{\partial\,\mathrm{t}_{rz}}{dr}dr\right);$$

Sur les deux faces perpendiculaires aux z par

$$-rd\alpha dr\,\mathrm{t}_{zz} \text{ et } rd\alpha dr\left(\mathrm{t}_{zz}+\frac{\partial\,\mathrm{t}_{zz}}{\partial z}dr\right);$$

Sur les deux faces méridiennes par deux forces $-drdz\,\mathrm{t}_{\alpha z}$ et $drdz\,\mathrm{t}_{\alpha z}$ qui se détruisent.

On a donc, en égalant à zéro les sommes de composantes de forces de mêmes directions, effaçant les produits infiniment petits du quatrième ordre et divisant par le volume $dr.rd\alpha.dz$ de l'élément, les deux équations d'équilibre ci-dessus (g') des forces agissant respectivement dans le sens r et dans le sens z, en supposant qu'aucune force analogue à la pesanteur n'agit sur la matière de la plaque.

la seule résultante P est donnée, et dont nous pouvons choisir arbitrairement le mode de distribution, toujours inconnu, y suivent, comme on a vu dans le problème du n° 6, la loi parabolique du second degré, la plus simple de celles qui donnent (h'), $(\mathrm{t}_{rz})_{z=\pm\varepsilon}=0$, et (i'), $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{t}_{rz}\,dz=\mathrm{P}$, pour $r=a$; c'est-à-dire la loi représentée par

$$(j') \qquad (\mathrm{t}_{rz})_{r=a}=\frac{3\mathrm{P}}{4\varepsilon}\left(1-\frac{z^2}{\varepsilon^2}\right);$$

2° Si en même temps les forces horizontales t_{zr}, dont le seul couple résultant est donné, y ont une distribution telle qu'on ait, en tous les points (comme nous avons vu aussi dans les autres problèmes),

$$(k') \qquad \mathrm{t}_{zz}=0\ ;$$

et si, bien entendu, ces deux suppositions sont reconnues, par le résultat du calcul, compatibles entre elles, ou susceptibles d'être satisfaites par les mêmes valeurs de U et W satisfaisant aussi aux équations indéfinies et définies (g') (h') (i') du problème; valeurs qui en offriront alors la solution désirée, rigoureusement exacte si les forces appliquées au contour suivent bien le mode de distribution supposé.

9. La supposition (k') réduit la seconde équation d'équilibre (g') à

$$(k_1') \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{t}_{rz})=0\ , \quad \text{d'où} \quad \mathrm{t}_{rz}=\frac{\text{une fonction de } z}{r}\ ;$$

d'où il résulte aussi, vu (j') et (f'), qu'on a partout :

$$(l') \qquad \mathrm{t}_{rz}=\mathrm{c}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial r}\right)=\frac{3\mathrm{P}}{4\varepsilon^3}\,\frac{a}{r}\,(\varepsilon^2-z^2)\ .$$

La même supposition (k'), $\mathrm{t}_{zz}=0$, si on l'introduit dans la troisième formule de tension (e') et si l'on remarque que

$$\partial_r+\partial_\alpha=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}+\frac{\mathrm{U}}{r}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial.r\mathrm{U}}{\partial r}$$

donne

$$(m') \qquad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}=-\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial.r\mathrm{U}}{\partial r}\ .$$

En faisant comme au n° 5, et déjà au n° 16 de la grande Note du 16, $2\,\mathrm{f}+\mathrm{f}'-\frac{\mathrm{d}'^2}{\mathrm{c}}=\mathrm{a}_1$, l'on obtient :

$$(n') \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{t}_{rr}=\mathrm{a}_1\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial.r\mathrm{U}}{\partial r}-2\mathrm{f}\dfrac{\mathrm{U}}{r}\ , \quad \mathrm{t}_{\alpha\alpha}=\mathrm{a}_1\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial.r\mathrm{U}}{\partial r}-2\mathrm{f}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial r}\ ; \\[2ex] \mathrm{t}_{rr}-\mathrm{t}_{\alpha\alpha}=2\mathrm{f}.r\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\mathrm{U}}{r}\right), \quad \dfrac{\partial \mathrm{t}_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\mathrm{t}_{rr}-\mathrm{t}_{\alpha\alpha}}{r}=\mathrm{a}_1\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial.r\mathrm{U}}{\partial r}\right); \end{array}\right.$$

en sorte que si l'on fait pour abréger

$$(n_1') \qquad \frac{3Pa}{8\mathfrak{a}_1\varepsilon^3} = \frac{1}{H},$$

où il est facile de voir que H exprime *une longueur linéaire*, et si l'on a égard à la valeur (l') de t_{rz}, la première équation d'équilibre (g') prend cette forme

$$(o') \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial . rU}{\partial r}\right) = \frac{4z}{Hr}.$$

Intégrant une première fois, puis substituant dans (m') et désignant par A, ou plutôt par $-\frac{2}{A} - \frac{4 \log a}{H}$, une première constante arbitraire, nous obtenons, pour déterminer séparément U et W, les deux équations :

$$(p') \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial . rU}{\partial r} = z\left(\frac{4}{H}\log\frac{r}{a} - \frac{2}{A}\right), \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{d'}{c}\left(\frac{4}{H}z\log\frac{r}{a} - \frac{2z}{A}\right).$$

Tirons, de la première, $\partial . rU = z . \frac{4}{H} r \log\frac{r}{a} dr - \frac{2rz}{A} dr$ et intégrons; ajoutons à ce que donne $\frac{4r}{H}\log\frac{r}{a} dr$, une constante linéaire B, dont nous disposerons ci-après, comme de A. Il faudra toujours, après avoir mis, à la suite, l'intégrale du second terme $-\frac{2rz}{A}$, ajouter pour la généralité une fonction arbitraire de z. Appelons $\mathfrak{Z}$ cette fonction de z, et nommons, de même, $\mathfrak{R}$ une fonction arbitraire de r à ajouter à l'intégrale du second membre de la deuxième équation (p') ; nous aurons

$$(q') \quad U = \frac{z}{H}\left(2r\log\frac{r}{a} - r\right) + \frac{Bz}{r} - \frac{rz}{A} + \frac{1}{r}\mathfrak{Z}; \quad W = -\frac{d'}{c}\left(\frac{2z^2}{H}\log\frac{r}{a} - \frac{z^2}{A}\right) + \mathfrak{R}.$$

Les deux fonctions $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{R}$ doivent être telles que ces expressions de U et de W satisfassent à l'égalité du second au troisième membre de l'équation (l) donnant t_{rz}, ou, eu égard à ce que (n'_1) H représente, à

$$(r') \qquad \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{H}\frac{2\mathfrak{a}_1}{c}\frac{\varepsilon^2 - z^2}{r}.$$

En y substituant les (q'), on a, pour la condition à remplir par les fonctions $\mathfrak{Z}$ et , de la première desquelles nous avons, ce qui était permis, détaché en quelque sorte le terme Br,

$$(s') \quad \frac{2r}{H}\log\frac{r}{a} - \frac{r}{H} + \frac{B}{r} - \frac{r}{A} + \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial r} = \frac{2}{H}\frac{d'}{c}.\frac{z^2}{r} + \frac{2}{H}\frac{\mathfrak{a}_1}{c}\frac{\varepsilon^2 - z^2}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

Cette condition (s') peut être remplie de plusieurs manières. On pourrait en tirer une des deux fonctions arbitraires en laissant subsister l'autre;

mais, d'après la nature du problème, des constantes y suffiront. Tirons donc $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$ de l'annulation supposée de *chacun* des deux membres de (s'), dont le premier ne contient que r, et le second que z quand on le débarrasse du diviseur r; puis déduisons-en, par intégration $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{Z}$, en appelant $-\mathrm{C}$ une nouvelle constante à ajouter à ce qu'on obtiendra pour $\mathfrak{R}$, et substituons dans les expressions (q'); elles ne contiendront plus que des constantes, et nous aurons ces valeurs générales des déplacements :

$$(t')\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} &= -\frac{rz}{\mathrm{A}} + \frac{1}{\mathrm{H}}\left\{ 2rz\log\frac{r}{a} - rz + \frac{2\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\frac{z^3}{3r} - \frac{2}{r}\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{e}}\left(\varepsilon^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\right\} + \frac{\mathrm{B}z}{r} \\ \mathrm{W} &= \frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{\mathrm{d}'z^2}{\mathrm{c}}\right) + \frac{1}{\mathrm{H}}\left\{ r^2 - \left(r^2 + \frac{2\mathrm{d}'z^2}{\mathrm{c}}\right)\log\frac{r}{a}\right\} - \mathrm{C} - \mathrm{B}\log\frac{r}{a}\,. \end{aligned} \right.$$

C'est à dessein que nous n'avons pas, en intégrant, ajouté une constante à la valeur de $\mathfrak{Z}$ comme à celle de $\mathfrak{R}$, car, en l'appelant C', elle aurait apporté à la valeur (t') de U, un terme $\frac{\mathrm{C}'}{r}$, d'où, à celle de t_{rr} comme on va voir, un terme $-2\,\mathrm{f}\frac{\mathrm{C}'}{r^2}$ qui aurait empêché la première condition (i'), $\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{t}_{rr}\,dz\right)_{r=a} = 0$, d'être satisfaite et qui, pour d'autres raisons encore, ne saurait subsister lorsque la plaque n'est que fléchie ou n'éprouve pas *d'efforts extenseurs* de son feuillet moyen.

10. On en déduit, en mettant dans l'expression (n') de la composante normale de tension t_{rr} la valeur (t') de U, celle-ci :

$$(u')\quad \mathrm{t}_{rr} = -2\frac{\mathrm{a}_1 - \mathrm{f}}{\mathrm{A}}z + \frac{1}{\mathrm{H}}\left\{ 4(\mathrm{a}_1 - \mathrm{f})z\log\frac{r}{a} + 2\mathrm{f}z - \frac{2\mathrm{f}}{r^2}\left[\frac{2\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\frac{z^3}{3} + \frac{2\mathrm{a}_1}{\mathrm{e}}\left(\varepsilon^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\right]\right\} 2\mathrm{f} - \frac{\mathrm{B}z}{r^2}.$$

Cette force est nulle, ainsi qu'on voit, aux points $z = 0$ du feuillet moyen; et elle se distribue symétriquement de part et d'autre, suivant une loi parabolique du troisième degré, comme Clebsch le remarquait déjà pour l'intérieur des tiges, au § 26.

Multiplions par $z\,dz$ et intégrons de $-\varepsilon$ à ε afin d'avoir le moment ou couple fléchissant M_s auquel nous avons à imposer des conditions en certains points, tels que ceux des bords de la plaque. Dans cette intégration, chaque facteur z produira $\frac{2\varepsilon^3}{3}$, et chaque facteur $\frac{z^3}{3}$ produira $\frac{2\varepsilon^5}{15}$, en sorte que le binôme entre crochets produira $\frac{4}{15}\varepsilon^5\left(\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}} + 4\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{e}}\right)$. Si donc nous faisons, pour abréger,

$$(v')\qquad \frac{2}{5}\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{a}_1}\left(\frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}} + 4\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{e}}\right)\frac{\varepsilon^2}{a^2} = \gamma^2\,,$$

quantité numérique du second ordre de petitesse, et généralement négli-

geable si le rapport $\frac{2\varepsilon}{2a}$ de l'épaisseur au diamètre de la plaque est petit du premier ordre, nous avons

$$(x')\quad M_s = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rr} z dz = \frac{4\varepsilon^3}{3}\left\{-\frac{a_1 - f}{A} + \frac{1}{H}\left[2(a_1 - f)\log\frac{r}{a} + f - a_1\gamma^2\frac{a^2}{r^2}\right] - f\frac{B}{r^2}\right\}.$$

11. On vérifie facilement que les expressions (t') de U et W donnent une valeur de t_{rz} conforme à l'expression posée (l'), ainsi que des valeurs (n') de t_{rr}, $t_{rr} - t_{\alpha\alpha}$ qui, avec celles-ci, satisfont identiquement aux équations différentielles *indéfinies* (g'), ainsi qu'aux quatre conditions *définies* (h'), (i'); enfin, qu'elles donnent bien $t_{zz} = 0$, en sorte que cette supposition (k'), et celle (l'), faites en commençant, sont parfaitement compatibles et remplies par les mêmes expressions de U, W, satisfaisant ainsi à toutes les conditions de la question.

Ces expressions (t') de U, W, peuvent, en conséquence, servir à résoudre les divers problèmes qu'on peut se poser sur la flexion des plaques ou parties de plaques circulaires sollicitées symétriquement autour de leur axe de figure sur les deux cylindres contournants, en déterminant les trois constantes A, B, C dans chaque cas, au moyen des équations (u'), (x') qu'on en a déduites, ainsi que des valeurs spéciales qui peuvent être données, dans des cas variés, pour les deux expressions suivantes, tirées de la seconde (t'), en faisant $z = 0$ pour l'appliquer aux points du feuillet moyen :

$$(y')\qquad W_0 = \frac{r^2}{2A} + \frac{r^2}{H}\left(1 - \log\frac{r}{a}\right) - C - B\log\frac{r}{a}$$

$$(z')\qquad \frac{\partial W_0}{\partial r} = \frac{r}{A} + \frac{r}{H}\left(1 - 2\log\frac{r}{a}\right) - \frac{B}{r}.$$

Par exemple

1° Si la plaque sollicitée sur l'unité de son contour $r = a$, à la fois par l'effort tranchant P et par un couple fléchissant donné M_a, se trouve fixée au milieu par un boulon cylindrique de rayon r_0 qui encastre sa partie inférieure, en obligeant ses éléments contigus à rester horizontaux, on aura les conditions

$$(M_s)_{r=a} = M_a\,,\quad (W_0)_{r=r_0} = 0\,;\quad \left(\frac{\partial W_0}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0\,.$$

2° Si cette même plaque boulonnée ne supporte à son pourtour que l'effort P, sans couple de flexion, les conditions seront

$$(M_s)_{r=a} = 0\,,\quad (W_0)_{r=r_0} = 0\,,\quad \left(\frac{\partial W_0}{\partial r}\right)_{r=r_0} = 0\,.$$

3° Si, toujours évidée et sollicitée au pourtour par le couple M_a, elle n'est que *posée* sur le cercle rigide et immobile du rayon r_0, en sorte que les

plans des éléments n'y soient astreints à aucune direction particulière, on devra avoir

$$(M_s)_{r=a} = M_a \ , \quad (W_0)_{r=r_0} = 0 \ , \quad (M_s)_{r=r_0} = 0 \ .$$

Ces équations de condition, en y mettant pour M_s, W_0, $\frac{dW_0}{dr}$, les expressions (x'), (y'), (z') spécifiées pour $r = a$, ou $r = r_0$, serviront à déterminer facilement les trois constantes $\frac{1}{A}$, B, et C, dont les valeurs, substituées dans les (t') ou seulement dans (y') W_0, donneront, pour ces divers cas, les déplacements U, W, et spécialement la valeur de W_0 qui fournit, en r, l'expression de l'ordonnée W_0 de la coupe méridienne de la plaque, ou l'équation de cette coupe.

12. Il est avantageux d'éliminer d'abord la constante $\frac{1}{A}$ en la remplaçant par l'introduction, dans les formules, du couple M_a, donné ou nul, c'est-à-dire du moment des forces horizontales agissant sur le cylindre contournant $r = a$.

On aura pour cela, en faisant $r = a$ dans (x'),

$$(z_1') \qquad M_a = -\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1 - f}{A} + \frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{f - a_1\gamma^2}{H} - \frac{4\varepsilon^3}{3} f \frac{B}{a^2} \ .$$

Si $P = 0$, d'où $\frac{1}{H} = 0$, ou si la flexion est l'effet du couple M_a, sans effort tranchant, cette expression, avec $B = 0$, fait retrouver, comme cela devait être, et sauf A écrit au lieu de R, celle (s), n° 4, du moment fléchissant d'une plaque de forme quelconque, qui ploie son feuillet moyen en portion de sphère d'un rayon que nous avons appelé R; et la même supposition, $\frac{1}{H} = 0$, avec annulation de la constante C comme de celle B, réduit les expressions (t') de U et de W à leurs premiers termes qui sont les expressions (m) du n° 3, p. 341.

Faisons donc, ce qui simplifiera les formules,

$$(z_2') \qquad M_a = -\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1 - f}{R} \ , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = -\frac{3}{4\varepsilon^3}\frac{M_a}{a_1 - f} \ ;$$

l'équation de condition (z'_1) relative au moment de flexion sur le contour, divisée par $-\frac{4}{3}(a_1 - f)\,\varepsilon^3$, donne pour la constante A :

$$(a'') \qquad \frac{1}{A} = \frac{1}{R} + \frac{1}{H}\frac{f - a_1\gamma^2}{a_1 - f} - \frac{f}{a_1 - f}\frac{B}{a^2} \ .$$

En la substituant dans les (t'), on a ces solutions que M. Boussinesq a cher-

chées et trouvées à ma prière :

$$(b'')\left\{\begin{aligned}
&U=-\frac{rz}{R}+\frac{1}{H}\left\{rz\left(2\log\frac{r}{a}-a_1\frac{1-\gamma^2}{a_1-f}\right)+\frac{2}{r}\frac{d'}{c}\frac{z^3}{3}+\frac{2}{r}\frac{a_1}{e}\left(\varepsilon^2 z-\frac{z^3}{3}\right)\right\}+\frac{Bz}{r}+\frac{f}{a_1-f}\frac{Brz}{a^2},\\
&W=\frac{1}{R}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{d'}{c}z^2\right)+\frac{1}{H}\left\{r^2+\left(\frac{r^2}{2}+\frac{d'}{c}z^2\right)\left(\frac{f-a_1\gamma^2}{a_1-f}-2\log\frac{r}{a}\right)\right\}-C-B\log\frac{r}{a}-\frac{f}{a_1-f}\frac{B}{a^2}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{d'}{c}z^2\right)\\
&\text{où}\quad \frac{1}{H}=\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3},\quad \frac{1}{R}=-\frac{3}{4\varepsilon^3}\frac{M_a}{a_1-f},\quad \gamma^2=\frac{2}{5}\frac{f}{a_1}\left(\frac{d'}{c}+4\frac{a_1}{e}\right)\frac{\varepsilon^2}{a^2}.
\end{aligned}\right.$$

Et, en susbstituant le même (a'') dans (x'), on a pour le moment fléchissant, aux points de la plaque à une distance quelconque r de son centre,

$$(c'')\quad M_s=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rr}z\,dz=\frac{4\varepsilon^3}{3}\left\{-\frac{a_1-f}{R}+\frac{1}{H}\left[2(a_1-f)\log\frac{r}{a}-a_1\gamma^2\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\right]-fB\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right\};$$

qui, spécifiée pour $r=a$, se réduit bien à (z'_1) M_a.

13. Les formules (b''), quand on y fait les constantes $C=0$, $B=0$, offrent déjà la solution d'un cas extrême et important du problème de la plaque sollicitée sur son contour par un effort tranchant P et un couple M_a. On voit en effet qu'alors

$$(d'')\quad W_0=\frac{r^2}{2R}+\frac{1}{H}\left(r^2+\frac{r^2}{2}\frac{f-a_1\gamma^2}{a_1-f}-r^2\log\frac{r}{a}\right),\qquad \frac{\partial W_0}{\partial r}=\frac{r}{R}+\frac{1}{H}\left(a_1\frac{1-\gamma^2}{a_1-f}r-2r\log\frac{r}{a}\right).$$

Ces deux expressions *s'annulent pour* $r=0$, (car on sait qu'en général $x\log x$ est $=0$ pour $x=0$). On ne peut sans doute pas supposer que la plaque s'appuie sur un seul point central, ou sur un cercle de rayon infiniment petit; car il résulte de l'expression (k'_1) ou (l') de t_{rz}, ou de celle $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rz}\,dz=\frac{Pa}{r}$ qui en est tirée, ou encore simplement de la condition de l'équilibre de translation de toute portion de plaque limitée par deux coupes cylindriques de même axe qu'elle, que sur ce cercle infiniment petit la plaque aurait à supporter un effort tranchant infini. Mais ces formules (b''), avec $C=0$, $B=0$, sont parfaitement applicables, *lorsque seulement ce cercle d'appui est de rayon très petit*, car, vu la grandeur toujours considérable de R par rapport à toute valeur de r, W_0 et $\frac{dW_0}{dr}$ peuvent être regardés comme du second ordre de petitesse quand r_0 est du premier ordre.

Nous en tirerons aux nos 15 et 16 des conséquences importantes.

14. Mais nous allons d'abord développer la solution pour un cas non moins intéressant. C'est celui où la plaque, sans être percée ou évidée, s'appuierait sur un disque rigide et immobile de rayon r_0, en n'en touchant que le bord, de manière à ne pas être empêchée de fléchir jusqu'à son milieu propre.

Il y a lieu alors de distinguer dans la plaque deux régions qui auront des modes de déformation différents; à savoir la *région centrale* où les rayons vecteurs r sont compris entre zéro et r_0, et la *région extérieure ou annulaire* dans laquelle ils varient de $r=r_0$ à $r=a$. Comme, dans la première, où l'on a évidemment $\frac{dW_0}{dr}=0$ pour $r=0$, il ne s'exerce, au centre $r=0$, aucun effort tranchant dans le sens vertical ou des z, l'équilibre de translation, dans le même sens z, de toute portion de plaque limitée par un ou par deux cylindres du même axe qu'elle, exige qu'il ne s'exerce un pareil effort nulle autre part. La flexion de la plaque, dans cette région centrale, sera donc produite par des couples seulement; et l'on aura pour ses points, en appelant $\frac{1}{R_0}$ une constante à déterminer plus tard, des U et W de la forme du premier terme de chacune des expressions (t'), en ajoutant, pour la seconde, une constante telle qu'est $-C$, à déterminer de manière que W_0 ou $(W)_{z=0}$ s'annule sur la circonférence du cercle d'appui, c'est-à-dire pour $r=r_0$. Il en résulte, pour la région centrale, ces expressions qui sont semblables, au reste, à celles que nous avons trouvées au nº 4 :

$$(e'')\qquad U=-\frac{rz}{R_0},\quad W=\frac{1}{R_0}\left(\frac{r^2-r_0^2}{2}+\frac{d'}{c}z^2\right),\quad M_s=-\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1-f}{R_0};$$

d'où, sur le cercle de jonction des deux régions ou parties de la plaque :

$$(f'')\quad (W_0)_{r=r_0}=0,\quad \left(\frac{\partial W_0}{\partial r}\right)_{r=r_0}=\frac{r_0}{R_0},\quad (M_s)_{r=r_0}=-\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1-f}{R_0}.$$

Dans la région extérieure ou annulaire, dont la flexion est régie par les expressions (b'') de U, W et celle (c'') de M_s qui s'en tire, on devra avoir, pour $r=r_0$, afin qu'elle se raccorde avec la partie centrale, les trois mêmes valeurs (f'') de W_0, $\frac{\partial W_0}{\partial r}$, et aussi de M_s, car le moment fléchissant ne doit pas plus varier brusquement de grandeur en cet endroit qu'en tout autre.

On aura en conséquence, pour déterminer les constantes B, C, ainsi que le rayon inconnu R_0 de la courbure de la partie centrale, ces trois équations, relatives aux points de jonction $r=r_0$, et dont la dernière a été débarrassée du facteur $\frac{4\varepsilon^3}{3}$ commun à tous ses termes :

$$0=\frac{r_0^2}{2R}+\frac{1}{H}\left[r_0^2+\frac{r_0^2}{2}\left(\frac{f-a_1\gamma^2}{a_1-f}-2\log\frac{r_0}{a}\right)\right]-C-B\log\frac{r_0}{a}-\frac{f}{a_1-f}\frac{B_0^2}{2a^2},$$

$$\frac{r_0}{R_0}=\frac{r_0}{R}+\frac{1}{H}\left[2r_0-\frac{r_0^2}{2}\cdot\frac{2}{r_0}+r_0\left(\frac{f-a_1\gamma^2}{a_1-f}-2\log\frac{r_0}{a}\right)\right]-\frac{B}{r_0}-\frac{f}{a_1-f}\frac{Br_0}{a^2},$$

$$-\frac{a_1-f}{R_0}=-\frac{a_1-f}{R}+\frac{1}{H}\left[2(a_1-f)\log\frac{r_0}{a}-a_1\gamma^2\left(\frac{a^2}{r_0^2}-1\right)\right]-fB\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

Si l'on ajoute la seconde et la troisième, divisées respectivement par r_0 et par a_1-f, il ne reste que $0=\frac{1}{H}\frac{a_1}{a_1-f}\left(1-\gamma^2\frac{a^2}{r_0^2}\right)-\frac{B}{r_0^2}\left(1+\frac{f}{a_1-f}\right)$, d'où

$$(g'')\qquad B=\frac{r_0^2-\gamma^2a^2}{H},$$

qui, substitué dans les deux premières, permet d'en tirer les deux autres constantes $\frac{1}{R_0}$ et C. Celle-ci est

$$(h'')\quad C=\frac{r_0^2}{2R}+\frac{1}{H}\left\{r_0^2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)+\frac{f}{a_1-f}\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{r_0^2}{a^2}\right)-(2r_0^2-\gamma^2a^2)\log\frac{r_0}{a}\right\}.$$

En substituant dans les (b'') et en y joignant les (e''), on a pour la solution complète de la plaque sollicitée sur l'unité de longueur de son contour $r=a$ par l'effort tranchant P ainsi que par le moment $M_a=-\frac{4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1-f}{R}$, et ayant son cercle intermédiaire, de rayon r_0, appuyé sur un disque immobile [en ayant égard, pour composer la partie logarithmique de W_0, à ce que $-r^2\log\frac{r}{a}+2r_0^2\log\frac{r_0}{a}-r_0^2\log\quad=-(r^2-r_0^2)\log\frac{r}{a}+2r_0^2\log\frac{r_0}{r}$] :

Région centrale $r<r_0$:

$$(i'')\quad\begin{cases} U=-\frac{rz}{R_0},\qquad W=\frac{1}{R_0}\left(\frac{r^2-r_0^2}{2}+\frac{d'}{c}z^2\right),\\ \text{où}\quad \frac{1}{R_0}=\frac{1}{R}+\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\left\{\left(\frac{f}{a_1-f}+\frac{\gamma^2a^2}{r_0^2}\right)\left(1-\frac{r_0^2}{a^2}\right)-2\log\frac{r_0}{a}\right\};\end{cases}$$

Région annulaire $r>r_0$:

$$(j'')\quad\begin{cases} U=-\frac{rz}{R}+\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\left\{rz\left(2\log\frac{r}{a}-\frac{a_1}{a_1-f}+\frac{f}{a_1-f}\frac{r_0^2}{a^2}+\gamma^2\right)+\frac{z}{r}(r_0^2-\gamma^2a^2)+\frac{2}{r}\frac{d'}{c}\frac{z^3}{3}+\frac{2}{r}\frac{a_1}{c}\left(\varepsilon^2z-\frac{z^3}{3}\right)\right\}\\ W=W_0+\frac{d'}{c}z^2\left\{\frac{1}{R}+\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\left[\frac{f}{a_1-f}\left(1-\frac{r_0^2}{a^2}\right)-2\log\frac{r}{a}-\gamma^2\right]\right\};\\ \text{où } W_0=\frac{r^2-r_0^2}{2R}+\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\left\{(r^2-r_0^2)\left[1-\log\frac{r}{a}+\frac{1}{2}\frac{f}{a_1-f}\left(1-\frac{r_0^2}{a^2}\right)-\frac{\gamma^2}{2}\right]+(2r_0^2-\gamma^2a^2)\log\frac{r_0}{r}\right\}.\end{cases}$$

On ne doit pas s'étonner de ce que ces expressions (j'') relatives à la partie annulaire, auraient, si on y faisait $r=r_0$, des termes de plus que celles qui sont fournies par les (b'') en faisant $B=0$, $C=0$, et qu'on a dit, au n° 11, être applicables au cas extrême où la plaque est percée d'un trou très petit ; de ce que, même, cette supposition $r_0=0$ rend infini le dernier terme de l'accolade de W_0. La question d'une plaque unique, censée évidée à son milieu, est toute différente de celle d'une plaque composée en quelque

sorte de deux plaques qui se raccordent, et dont l'une, celle du milieu, est entière comme l'autre. Au reste, comme tous les termes de plus, dans (j'') que dans (b'') particularisé, et qui proviennent des constantes, sont affectés de γ^2, l'accord s'opère entre ces deux formules quand l'épaisseur de la plaque est fort petite, ou lorsqu'on peut négliger γ^2 qui est un nombre multiplié par le carré du rapport $\frac{\varepsilon}{a}$.

Nous tirerons au nº 17 des conséquences importantes de l'expression (j'') de W_0 qui donne l'équation, en W_0 et r, de la coupe méridienne de la surface de révolution affectée par le feuillet moyen de la plaque après sa flexion.

15. Mais reprenons, auparavant, la première expression (d''), relative au cas extrême de la plaque prenant son appui sur son centre, ou plutôt, comme on l'a dit, *sur un cercle fixe de rayon très petit*, et qui donne les déplacements verticaux W_0 des points du feuillet moyen, la plaque étant sollicitée sur son cylindre contournant $r = a$ par des forces qui produisent à la fois, pour l'unité de longueur, un effort tranchant P et un couple de flexion M_a :

$$(k'') \quad \left\{ \begin{aligned} & W_0 = \frac{r^2}{2R} + \frac{r^2}{H}\left(\frac{2a_1 - f - a_1\gamma^2}{2a_1 - 2f} - \log\frac{r}{a}\right), \\ & \text{où} \quad \frac{1}{H} = \frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}, \quad \frac{1}{R} = -\frac{3}{4\varepsilon^3}\,\frac{M_a}{a_1 - f}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle

f la plus grande valeur de l'ordonnée W_0,

$Q = 2\pi a P$ (nº 8) la somme des efforts tranchants s'exerçant sur le contour de la plaque,

w_0 l'excès de f sur W_0, ou l'ordonnée de la coupe méridienne du feuillet moyen fléchi quand on la compte de haut en bas, *en prenant son origine dans le plan du cercle moyen du cylindre contournant la plaque;* on a

$$(l'') \qquad f = (W_0)_{r=a} = \frac{a^2}{2R} + \frac{3Qa^2}{16\pi a_1\varepsilon^3}\cdot\frac{2a_1 - f - a_1\gamma^2}{2a_1 - 2f},$$

$$(m'') \quad w_0 = f - W_0 = \frac{a^2 - r^2}{2R} + \frac{3Q}{16\pi a_1\varepsilon^3}\left[\frac{2a_1 - f - a_1\gamma^2}{2a_1 - 2f}(a^2 - r^2) + r^2\log\frac{r}{a}\right].$$

Ces expressions, qui ont été établies dans la supposition que le centre de la plaque est fixe, et que son bord $r = a$ est déplacé verticalement sous l'action de P et de M_a, s'appliquent évidemment aussi lorsque le bord est porté par un cadre fixe de manière que son cercle médian ($r = a$, $z = 0$) reste immobile, et que le reste se déprime sous l'action, au milieu, d'un poids Q de forme cylindrique d'un petit diamètre auquel les bords opposent, par unité de longueur, les efforts $P = \frac{Q}{2\pi a}$ qui sont alors des réactions du cadre.

Les w_0 sont, ainsi, les déplacements de haut en bas des points à la dis-

tance horizontale r du centre : f est la dépression centrale ou flèche de flexion ; et l'équation (m'') donne, en w_0 et r, la coupe méridienne du feuillet moyen fléchi en prenant l'origine de ses ordonnées w_0 dans le plan du cercle moyen du cylindre contournant.

Il y a deux cas à distinguer : 1° Si la plaque, aux points de son contour médian, est simplement *posée* sur le cadre fixe, on a, comme il a déjà été dit :

$$(n'') \qquad M_a = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = 0\ ,$$

ce qui donne, pour la flèche f et pour l'équation en w_0 et r de la coupe méridienne :

$$(o'') \qquad f = \frac{3Qa^2}{16\pi a_1 \varepsilon^3} \frac{2a_1 - f}{2a_1 - 2f}\left(1 - \frac{a_1\gamma^2}{2a_1 - f}\right) ;$$

$$(p'') \qquad w_0 = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1 \varepsilon^3}\left[\frac{2a_1 - f - a_1\gamma^2}{a_1 - f}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{r^2}{a^2}\log\frac{r^2}{a^2}\right] .$$

2° Si la plaque est encastrée sur son bord $r = a$, en sorte que la tangente aux coupes méridiennes y reste horizontale, on a

$$(q'') \qquad \left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)_{r=a} = 0\ ;$$

d'où, d'après l'expression (d'') de $\frac{\partial W_0}{\partial r}$,

$$(r'') \qquad \frac{1}{R} = -\frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\frac{a_1(1-\gamma^2)}{a_1 - f} .$$

Substituant dans l'expression (m'') de w_0, γ^2 *disparaît* et on a simplement

$$(s'') \qquad w_0 = \frac{3Pa}{8a_1\varepsilon^3}\left(\frac{r^2}{2} - r^2\log\frac{r}{a}\right) ;$$

d'où pour la flèche et pour l'équation de la coupe méridienne

$$(t'') \qquad f' = (W_0)_{r=a} = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1\varepsilon^3} ;$$

$$(u'') \qquad w_0 = f' - W_0 = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1\varepsilon^3}\left(1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}\log\frac{r^2}{a^2}\right) .$$

16. Calculons ces expressions *en supposant la matière isotrope*. Servons-nous des formules (i) de la fin du n° 15 de la note du § 16 où les dilatations et glissements sont affectés des deux coefficients ou paramètres d'élasticité e, e', les mêmes que ceux μ, λ de Lamé, en écrivant au lieu de e ou μ, G puisqu'il n'est autre que le coefficient d'élasticité de glissement ou de torsion du § 5 ; et, à l'instar de M. Kirchhoff, en écrivant ιG au lieu de e' ou λ *ce qui vaut mieux que de l'appeler* $2k$G ou 2ιG, comme nous l'indiquions à ce n° 15 d'après l'illustre correspondant de l'Académie. Ces formu-

les sont ainsi :

$$(v'')\quad \begin{cases} t_{xx}=G\,[2\partial_x+\iota(\partial_x+\partial_y+\partial_z)]\,, & t_{yz}=Gg_{yz}\,; \\ t_{yy}=G\,[2\partial_y+\iota(\partial_x+\partial_y+\partial_z)]\,, & t_{zx}=Gg_{zx}\,; \\ t_{zz}=G\,[2\partial_z+\iota(\partial_x+\partial_y+\partial_z)]\,, & t_{xy}=Gg_{xy}\,; \end{cases}$$

ce qui nous paraît offrir la manière la plus simple et la plus commode de représenter les six composantes de tensions dans les corps isotropes, car ι est un simple nombre que nous y maintenons par égard pour une opinion controversée ; mais, formules où il suffit de faire

$$\iota=1$$

pour les mettre en rapport (même note du § 16) avec ce que l'expérience ainsi que le raisonnement apprennent sur les corps isotropes réellement solides, et avec la loi la plus simple et la plus probable des actions entre leurs molécules.

Alors (nº 16 bis de la même note) on a

$$(x'')\quad \begin{cases} f=G, \quad f'=d'=\iota G, \quad a=c=(2+\iota)G, \quad a_1=2f+f'-\dfrac{d'^2}{c}=\dfrac{4+4\iota}{2+\iota}G \\ a_1-f=\dfrac{2+3\iota}{2+\iota}G\,, \quad \dfrac{2a_1-f}{2a_1-2f}=\dfrac{6+7\iota}{4+6\iota}\,, \quad \dfrac{a_1}{2a_1-f}=\dfrac{4+4\iota}{6+7\iota}\,, \\ \gamma^2=\dfrac{2}{5}\dfrac{f}{a_1}\left(\dfrac{d'}{c}+\dfrac{4a_1}{e}\right)\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}=\dfrac{16+17\iota}{10+10\iota}\cdot\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}\,, \quad \dfrac{a_1\gamma^2}{2a_1-f}=\dfrac{32+34\iota}{30+35\iota}\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}\,. \end{cases}$$

Donc, toujours dans le cas d'isotropie, on a pour la flèche

1º Plaque posée au contour :

$$(y'')\quad \begin{cases} f=\dfrac{6+7\iota}{4+6\iota}\cdot\dfrac{2+\iota}{4+4\iota}\cdot\dfrac{3Qa^2}{16\pi G\varepsilon^3}\left(1-\dfrac{32+34\iota}{30+35\iota}\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \\ \text{ou , avec } \iota=1, \\ f=\dfrac{117Qa^2}{1280\pi G\varepsilon^3}\left(1-\dfrac{66}{65}\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}\right). \\ \text{Équation de la coupe méridienne :} \\ w_0=\dfrac{117Qa^2}{1280\pi G\varepsilon^3}\left[\left(1-\dfrac{66}{65}\dfrac{\varepsilon^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)+\dfrac{10}{13}\dfrac{r^2}{a^2}\log\dfrac{r}{a}\right]. \end{cases}$$

2º Plaque encastrée :

$$(z'')\quad \begin{cases} f'=\dfrac{1}{G}\dfrac{2+\iota}{4+4\iota}\dfrac{3Qa^2}{32\pi\varepsilon^3}\,; \quad \text{ou avec } \iota=1,\ f'=\dfrac{1}{G}\dfrac{9}{256}\dfrac{Qa^2}{\pi\varepsilon^3}. \\ \text{Équation de la coupe méridienne : } w_0=\dfrac{1}{G}\dfrac{9}{256}\dfrac{Qa^2}{\pi\varepsilon^2}\left[1-\dfrac{r^2}{a^2}\left(1-2\log\dfrac{r}{a}\right)\right]. \end{cases}$$

17. Les formules (i''), (j'') relatives à la plaque *entière ou non évidée*, prenant son appui sur la circonférence rigide et immobile d'un cercle de rayon fini r_0, moindre que le sien, fournissent des résultats non moins intéressants et remarquables. Elles donnent en faisant

$$(a''') \qquad W_0 = \begin{cases} W'_0 \text{ pour la région centrale, où } r < r_0, \\ W''_0 \text{ pour la région annulaire, où } r > r_0 ; \end{cases}$$

$$(b''') \quad \begin{cases} W'_0 = \dfrac{r^2 - r_0^2}{2R_0} = \dfrac{r^2 - r_0^2}{2R} + \dfrac{r^2 - r_0^2}{2H}\left[\left(\dfrac{f}{a_1 - f} + \gamma^2 \dfrac{a^2}{r_0^2}\right)\left(1 - \dfrac{r_0^2}{a^2}\right) - \log \dfrac{r_0^2}{a^2}\right]; \\ W''_0 = \dfrac{r^2 - r_0^2}{2R} + \dfrac{1}{2H}\left[(r^2 - r_0^2)\left(2 + \dfrac{f}{a_1 - f}\dfrac{a^2 - r_0^2}{a^2} - \gamma^2 - \log\dfrac{r^2}{a^2}\right) + (2r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\dfrac{r_0^2}{r^2}\right]. \end{cases}$$

L'ordonnée W'_0 de la partie centrale $r < r_0$ du feuillet moyen fléchi est, comme on voit, négative, ce qui vient de ce qu'on a pris l'origine des W_0 sur le plan censé fixe $r = r_0$. En changeant de signe son expression (b'''), on en a la grandeur absolue. Si donc nous appelons, comme nous avons déjà fait au n° 15,

$$w_0$$

la hauteur, après la flexion, du plan du cercle $r = a$ au-dessus du plan de celui d'un rayon quelconque r, ou l'ordonnée de ce second plan par rapport au premier $r = a$, en y plaçant désormais l'origine, ce qui donne d'abord, pour le plan $r = r_0$,

$$(c''') \quad (w_0)_{r=r_0} = (W''_0)_{r=a} = \frac{a^2 - r_0^2}{2R} + \frac{1}{2H}\left[(a^2 - r_0^2)\left(2 + \frac{f}{a_1 - f}\frac{a^2 - r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right) + (2r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right],$$

l'on aura respectivement, pour les points de la région centrale et de la région annulaire, les ordonnées

$$(d''') \quad \begin{cases} (w_0)_{r<r_0} = (W''_0)_{r=a} - W'_0 = \dfrac{a^2 - r^2}{2R} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2H}\left\{(a^2 - r_0^2)\left(2 + \dfrac{f}{a_1 - f}\dfrac{a^2 - r^2}{a^2} - \gamma^2 \dfrac{r^2}{r_0^2}\right)(r^2 + r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\dfrac{r_0^2}{a^2}\right\}, \end{cases}$$

$$(e''') \quad \begin{cases} (w_0)_{r>r_0} = (W''_0)_{r=a} - W''_0 = \dfrac{a^2 - r^2}{2R} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2H}\left\{(a^2 - r^2)\left(2 + \dfrac{f}{a_1 - f}\dfrac{a^2 - r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right) + (r^2 + r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\dfrac{r^2}{a^2}\right\}. \end{cases}$$

Ces expressions qui, pour $r = r_0$ ou sur le cercle de jonction, se confondent en effet l'une et l'autre avec celle (c'''), donnent les équations en w_0 et r des deux parties se raccordant sur ce cercle $r = r_0$, de la coupe méridienne de la surface en laquelle s'est changé le plan du feuillet moyen,

sous l'action des efforts tranchants P et des moments fléchissants M_a exercés sur le cylindre du contour.

18. Or, ainsi qu'on l'a déjà remarqué au nº 15, à ces efforts P supposés exercés de haut en bas par unité de longueur sur le cylindre contournant de rayon a et qui font ainsi une charge totale

$$Q = 2\pi a . P,$$

la couronne fixe de rayon r_0 oppose, de bas en haut, une réaction égale aussi à $2\pi a P$, ce qui fait $\frac{Pa}{r_0}$ par unité de sa longueur $2\pi r_0$. Le résultat, quant à la flexion opérée, sera évidemment le même si les forces P appliquées au pourtour ne sont que des *réactions* exercées de bas en haut par un cadre circulaire fixe de rayon a, sur lequel la plaque aura été posée ou encastrée, et si le cercle $2\pi r_0$, supposé maintenant mobile avec le reste de celle-ci, supporte par unité de longueur une charge $P\frac{a}{r_0}$ agissant sur elle de *haut en bas*, comme il arrivera si on fait porter à la plaque un poids rigide $2\pi a P$ en forme de cylindre de rayon r_0.

Nous nous trouvons donc avoir donné la solution du problème des dépressions des points d'une plaque ainsi fixée au pourtour sur le cadre, et sollicitée, entre son bord et son centre, à une distance quelconque r_0 de celui-ci, par un poids également réparti aux divers points de la circonférence de son cercle de rayon r_0.

Si la plaque est *simplement posée* sur le cadre, on a $M_a = 0$, d'où

(d'''_1) $\quad (w_0)_{r < r_0}$ = l'expression (d''') avec $\frac{1}{R} = 0$ ou sans son premier terme ;

(e'''_1) $\quad (w_0)_{r > r_0}$ = (e''') *idem* *idem*.

Si elle y est *encastrée*, il faut attribuer à $\frac{1}{R}$ une valeur telle que la deuxième, (e'''), ait sa dérivée $\frac{dw_0}{dr}$ égale à zéro, ce qui donne ce qu'on tirerait aussi de (b''') en faisant $\frac{dW''_0}{dr} = 0$ pour $r = a$, à savoir :

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{H}\,\frac{a_1}{a_1 - f}\,\frac{a^2 - r_0^2}{a^2}.$$

Substituant dans (d'''), (e'''), l'on a pour ce cas de plaque encastrée

$$(d'''_2) \qquad (w_0)_{r < r_0} = \frac{1}{2H}\left\{(a^2 - r_0^2)\left(1 + \frac{r^2}{a^2} - \gamma^2\frac{r^2}{r_0^2}\right) + (r^2 + r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right\};$$

$$(e'''_2) \qquad (w_0)_{r > r_0} = \frac{1}{2H}\left\{(a^2 - r^2)\left(1 + \frac{r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right) + (r^2 + r_0^2 - \gamma^2 a^2)\log\frac{r^2}{a^2}\right\}.$$

De celles de ces formules ou équations qui sont relatives à la partie intérieure $r < r_0$, on tire, *en y faisant* $r = 0$, eu égard à $\frac{1}{2H} = \frac{3Pa}{16a_1\varepsilon^3}$, $Pa = \frac{Q}{2\pi}$, pour les *flèches centrales de courbure* que nous appellerons f, f',

$$(d'''_3) \quad \text{plaque posée} \quad f = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1\varepsilon^3}\left\{\frac{2a_1 - f}{a_1 - f}\left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) + \left(\frac{r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right\};$$

$$(d'''_4) \quad \text{plaque encastrée} \quad f' = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1\varepsilon^3}\left\{1 - \frac{r_0^2}{a^2} + \left(\frac{r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right\}.$$

Ces deux expressions de f et f', en y faisant $r_0 = 0$, redonneraient celles (o''), (t'') du cas extrême où r_0 est très petit, sans la présence du terme $-\gamma^2$ qui multiplié par le logarithme, donnerait l'infini. Cette non-concordance vient encore ici de ce que dans le cas que nous venons d'examiner il est question, non d'une plaque, mais de deux plaques qui se joignent en se raccordant; elle disparaît quand γ^2 $\left(\text{qui d'après les dernières } (x'') \text{ se réduit à } \frac{33}{20}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)$ peut être effacé devant $\frac{r_0^2}{a^2}$, ou quand la demi-épaisseur de la plaque est très petite devant tout rayon r_0 d'une circonférence portant une charge sensible.

19. Nous pourrions, avec plus de calculs, mais avec la même facilité, déterminer les circonstances de la flexion d'une plaque circulaire, toujours supposée (pour fixer les idées) soutenue par le cadre fixe de rayon a, mais qui serait chargée d'un nombre quelconque de poids :

$$q, q', q'', q''' \ldots \text{ sur des circonférences de rayons } r_0, r'_0, r''_0, r'''_0 \ldots$$

dans l'étendue desquelles chacun de ces poids serait uniformément distribué.

En effet, si l'on considère d'abord la portion annulaire comprise entre deux coupes verticales cylindriques quelconques $r = r'_0$, $r = r''_0$, l'expression (e''') de w_0, conséquence de celle (g'') de W_0, du n° 14, est applicable à la détermination des déplacements verticaux que les points du feuillet moyen, aux diverses distances intermédiaires r, auront éprouvés par sa flexion au-dessous du plan où se trouvera finalement le cercle médian $r = r''_0$ de la seconde des deux coupes; car il suffira, pour l'y rendre propre, de mettre : 1° r''_0 à la place de a, et r'_0 à la place de r_0 dans ses divers termes;

2° à la place de $\frac{1}{R}$, dans le premier terme, la valeur tirée, d'après (f'') ou (k''), de $\frac{-4\varepsilon^3}{3}\frac{a_1 - f}{R} = M_{r''_0}$ en désignant ainsi le couple de flexion s'exerçant sur l'unité de longueur de la coupe cylindrique $r = r''_0$;

3° dans le coefficient de l'accolade, écrit sous la forme $\frac{1}{2}\cdot\frac{3Q}{16\pi a_1\varepsilon^3}$, de mettre, à la place de Q, la *réaction tranchante totale* exercée de bas en haut

par la partie de plaque au delà de la portion annulaire ainsi considérée.

Cette réaction (qui est zéro sur le cercle de rayon r_0 limitant la partie centrale ou non-annulaire ne supportant aucune charge), sera respectivement

$$q', \quad q'+q'', \quad q'+q''+q''', \quad \ldots, \quad q'+q''+q'''+\ldots=Q$$

pour l'étendue totale des circonférences de rayons

$$r'_0, \quad r''_0, \quad r'''_0, \quad \ldots\ldots, \quad a.$$

Et les déplacements totaux *absolus* w_0 de haut en bas, dans chaque région ou zône, s'obtiendront par cumulation des déplacements relatifs qui y auront eu lieu, en astreignant, bien entendu, les zones consécutives aux conditions de leur raccordement qui sont les équations de valeurs de w_0, de $\frac{dw_0}{dr}$ et de M_s égales dans l'une et dans l'autre zone.

On pourrait même supposer les charges $q', q''\ldots$, en nombre infini, en les regardant comme des portions $dQ=p.2\pi r_0 dr_0$ de sa charge totale $Q=2\pi\int_0^a prdr$, où p, fonction donnée du rayon vecteur r ou r_0, représente la charge de l'unité superficielle en tous les points à une même distance du centre. La substitution de $p.2\pi r_0 dr_0$ à Q dans les formules ci-dessus donnera, au lieu de w_0, la valeur de l'élément $\frac{dw_0}{dr_0}dr_0$ de la dépression totale, et par suite, si l'on intègre entre les limites 0 et a de r_0, en regardant comme constant r qui entre dans ces formules, on aura la dépression w_0 à une distance déterminée quelconque r du centre, et par suite l'équation de la coupe méridienne de la plaque fléchie, ou ce que fournirait, d'une manière moins rigoureuse, l'équation différentielle connue du quatrième ordre de Lagrange (§ 73 à 78) simplement approximative comme étant fondée sur des suppressions, et supposant essentiellement que γ^2, dont cette méthode du § 73 ne tient pas compte, peut être négligé, ou que ε^2 s'efface devant les plus petites comme les plus grandes valeurs de r^2.

20. Mais, lorsqu'on se propose *d'avoir seulement la flèche centrale*, sans chercher la forme que prend la plaque en ses divers points, une remarque bien simple montre que les expressions (e'''), (e'''_1), en a et r_0, suffisent au calcul de cette flèche pour toutes les distributions possibles, même non symétriques, même discontinues et irrégulières, des charges que supporte la plaque soutenue en haut.

En effet : 1° D'après la complète symétrie de la structure d'une pareille plaque autour de son centre ou de son axe, si on la charge d'un poids isolé Q, à un endroit distant de r_0 du centre, la flèche centrale de flexion qu'elle prendra sera évidemment la même que si on avait placé ce poids Q en un tout autre endroit de la plaque, pourvu qu'il fût à cette même distance r_0 de son centre.

2° D'après le principe de composition ou superposition pure et simple

(note du § 11) des petits déplacements des points des corps élastiques sous l'action simultanée de diverses forces, censées avoir agi d'abord séparément, la flèche au centre sera encore la même si au lieu du poids unique Q, l'on charge la plaque de deux poids $\frac{1}{2}$Q, ou de trois poids $\frac{1}{3}$Q, etc., placés en des endroits différents, mais tous à la même distance r_0 du centre. La flèche sera donc, en vertu de ce principe (conséquence de la *linéarité* des équations différentielles des petits déplacements dans les corps élastiques), précisément celle (d'''_3) ou (d'''_4) que notre calcul a fournie pour un poids Q disséminé d'une manière égale sur les divers points d'une circonférence dont le rayon est r_0.

Nous avons ainsi, en établissant les deux formules (d'''_3) et (d'''_4), résolu le problème de la détermination de la flèche *centrale* de courbure produite par un poids unique Q posé n'importe où sur la plaque, ou distribué absolument comme on veut sur une circonférence qui lui est concentrique (*).

Et il y a plus. Que la même plaque soit chargée d'un nombre quelconque de poids Q, Q', Q''...., distribués aussi irrégulièrement qu'on veut et à des distances respectives r_0, r'_0, r''_0.... du centre ; on n'aura qu'à construire pour chacun d'eux, selon qu'il y aura simple appui ou encastrement tout autour, des formules comme celles (d'''_3) ou (d'''_4), et à les additionner, pour avoir la flèche centrale, quelles que puissent être, du reste, les dépressions ou ordonnées w_0 aux autres endroits que le centre $r=0$ (**).

(*) Aussi, Clebsch, le premier auteur qui ait calculé la forme prise par une plaque sous l'action d'une charge non centrale, a trouvé, comme on verra vers la fin du § 76, pour la dépression ζ d'un point quelconque moins éloigné du centre que le point où la charge est posée, une expression qui lorsqu'on y fait $r=0$, se réduit à un premier terme, indépendant de l'angle θ_0 qui détermine la situation azimutale de cette charge.

M. Lévy, en 1877, a tiré la même chose de la solution analytique qu'il a présentée du même problème, en se servant, comme Clebsch, de l'équation du quatrième ordre de Lagrange, transformée comme a fait Poisson par l'emploi de coordonnées semi-polaires; et il en a énoncé la conclusion en exprimant « que la flèche au centre d'une plaque circulaire ne change pas si l'on vient à changer arbitrairement les charges qu'elle supporte, pourvu que l'on conserve la résultante de toutes celles qui agissent à égale distance de son centre ».

(**) Une curieuse remarque a été suggérée à M. Boussinesq, qui nous l'a communiquée, par la forme des expressions (d''_1), (e''_1) de la flèche centrale que produit une charge Q appliquée à une distance r_0 du centre de la plaque. Ces expressions, lorsqu'on efface γ^2, ce qui revient à négliger $\frac{\varepsilon^2}{a^2}$ devant $\frac{r_0^2}{a^2}$, sont composées de la même manière en r_0 que le sont en r les expressions (p''), (u'') des déplacements verticaux éprouvés par des points éloignés de r du centre pour cette même charge placée au centre. Ainsi, *une charge donnée*, appliquée au centre d'une plaque circulaire *mince* qui est appuyée ou encastrée sur tout son contour, produit, *en tous les points situés à une distance quelconque r_0 de son centre, un déplacement vertical égal à celui que la même charge produirait au centre*, si elle était appliquée en des points qui en fussent distants de cette même quantité r_0.

L'aspect comparatif, soit des (d''_1), (e''_1) soit des (d''_2), (e''_2) lui a fait apercevoir une loi analogue de réciprocité pour les dépressions produites, non plus seulement au centre, mais à une distance quelconque r du centre, par l'effet d'une charge agissant à une distance

21. Appliquons (comme l'a indiqué encore M. Boussinesq) cette méthode de cumulation des dépressions partielles au cas le plus simple, celui où la charge Q est uniformément distribuée sur la plaque de rayon a, en sorte que chaque unité superficielle en supporte une partie :

$$p = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Alors, une couronne élémentaire $d.\pi r_0^2 = 2\pi r_0 dr_0$ de rayon r_0 et de largeur dr_0, supporte une partie de la charge totale exprimée par

$$(f''') \qquad \frac{Q}{\pi a^2} d\cdot \pi r_0^2 = Q d\cdot \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Substituons ce poids élémentaire à Q dans les expressions (d'''_1), (e'''_1) des flèches f, f' prises par la plaque simplement posée et par la plaque encastrée au pourtour, écrites

$$f = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1 \varepsilon^3}\left\{ \frac{2a_1 - f}{a_1 - f}\left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right) + \left(\frac{r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right\},$$

$$f' = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1 \varepsilon^3}\left\{ 1 - \frac{r_0^2}{a^2} + \left(\frac{r_0^2}{a^2} - \gamma^2\right)\log\frac{r_0^2}{a^2}\right\};$$

et appelons df, df', les flèches élémentaires ou composantes qui en résultent; puis, pour obtenir les flèches résultantes, faisons, avec le même analyste, $\frac{r_0^2}{a^2} = \rho$, et intégrons de $r_0 = 0$ à $r_0 = a$ ou de $\rho = 0$ à $\rho = 1$. Nous aurons

$$(g''') \quad \begin{cases} f = \int_{r=0}^{r=a} df = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1 \varepsilon^3}\left\{ \frac{2a_1 - f}{a_1 - f}\int_0^1 (1-\rho)\,d\rho + \int_0^1 (\rho - \gamma^2)\log\rho\, d\rho \right\} \\ f' = \int_{r=0}^{r=a} df' = \frac{3Qa^2}{32\pi a_1 \varepsilon^3}\left\{ \int_0^1 (1-\rho)\,d\rho + \int_0^1 (\rho - \gamma^2)\log\rho\, d\rho \right\}. \end{cases}$$

Comme on a

$$\int_0^1 (1-\rho)\,d\rho = \frac{1}{2};\ \int_0^1 \rho\log\rho\, d\rho = \left(\frac{\rho^2}{2}\log\rho - \frac{\rho^2}{4}\right)_0^1 = -\frac{1}{4},\ \int_0^1 \log\rho\, d\rho = (\rho\log\rho - \rho)_0^1 = -1,$$

il en résulte pour les flèches centrales de la plaque posée et de la plaque encastrée, supportant une charge Q qui y est uniformément distribuée

$$(h''') \qquad f = \frac{3Qa^2}{128\pi a_1 \varepsilon^3}\left(\frac{3a_1 - f}{a_1 - f} + 4\gamma^2\right), \quad f' = \frac{3Qa^2}{128\pi a_1 \varepsilon^3}(1 + 4\gamma^2);$$

ou, si l'on met pour a_1, f, γ^2, d'après les (r'') du nº 16, leurs valeurs $\frac{8}{3}G$,

---

aussi quelconque r_0 du même point (en effaçant $-\gamma^2 \frac{r^2}{r_0^2}$ et $-\gamma^2$ des premières parenthèses où γ se trouve), quand on permute r^2 et r_0^2. On voit qu'une charge à la distance r_0 produit la même dépression d'une plaque mince à la distance r, que la même charge à la distance r produirait à celle r_0, mais pourvu que les charges y fussent distribuées *uniformément*, et non plus *arbitrairement* comme dans le cas particulier de la dépression ou de la charge *centrale*.

G et $\frac{33}{50}\frac{\varepsilon^2}{a^2}$ du cas de contexture isotrope avec le rapport $\iota = \frac{e'}{G}$ supposé $= 1$,

$$(i''') \qquad f = \frac{1}{G}\,\frac{189\,Q\,a^2}{5120\,\pi\,\varepsilon^3}\left(1 + \frac{11}{7}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right), \quad f' = \frac{1}{G}\,\frac{9\,Q a^2}{1024\,\pi\,\varepsilon^3}\left(1 + \frac{33}{5}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right).$$

On aurait trouvé avec non moins de facilité les flèches centrales prises par des plaques si la charge avait été distribuée d'une manière inégale et quelconque sur les divers éléments $d.\pi r_0^2$ de leur superficie; il aurait suffi de multiplier, dans les (g'''), les quantités sous les signes d'intégration $\int_0^1$ par une fonction F (φ) de φ ou de r_0, telle que

$$Q.F\left(\frac{r_0^2}{a^2}\right) d.\frac{r_0^2}{a^2}$$

représentât, au lieu de (f''') $Q d.\frac{r_0^2}{a^2}$, la partie de la charge totale Q supportée par la couronne circulaire $d.\pi r_0^2 = 2\pi r_0 dr_0$ de rayon r_0 et de largeur dr_0 où s'exerce cette charge partielle qui, du reste, *peut y être distribuée d'une manière quelconque, même discontinue.* Les intégrations, analogues à celles de (g'''), auraient toujours, par substitution, fourni les flèches f, f' des cas de simple pose et d'encastrement.

22. On voit que les formules (i''), (j'') des déplacements verticaux des points d'une plaque d'épaisseur finie, soutenue circulairement à une distance r_0 de son centre, et celles (b'''), (d'''), (e''') qu'on en tire, conduisent à la détermination des flèches centrales aussi bien lorsque la charge est distribuée de toutes les manières sur sa superficie, que le font les formules (o''), (t'') du cas extrême d'une charge unique placée au centre.

Toutes ces expressions des flèches centrales f, f', savoir, celles (y''), (z'') du cas d'une charge unique et aussi centrale, (h'''), (i''') du cas de charge uniformément répartie, tirées, comme on a vu, des formules nouvelles et générales (d'''), (e''') des dépressions dues à des charges excentriques de toutes sortes, sont exactement conformes, si l'on y efface les termes en γ^2 ou $\frac{\varepsilon^2}{a^2}$, dont notre analyse actuelle tient compte, à celles que Poisson a trouvées en 1828 (*)

(*) Voyez au t. VIII de l'Académie des sciences de Paris, dans le grand Mémoire de Poisson sur les corps élastiques, au milieu de la page 552, des expressions de f et f' qui se confondent avec les nôtres (particularisées pour les matières isotropes, où l'on suppose égal à 1 le rapport que nous avons appelé ι) en supposant avec Poisson la plaque chargée à la fois d'un poids ϖ concentré au milieu et d'un poids p disséminé uniformément sur toute sa surface, et en y remplaçant k' par $\frac{9}{16k\,\varepsilon^3}$ conformément à la page 547 du même mémoire où k, l, expriment ce que nous avons appelé G, a; enfin, en effaçant deux certaines intégrales $\int_0^l$ comme de valeur insensible, ainsi que Poisson conseille de le faire au haut de la page 553, où il donne aussi pour f, f' d'autres formules coïncidant avec celles de la page 552 quand on y remplace par $\frac{9}{5120\pi\,G}$ ce qu'il appelle h par abréviation.

en les déduisant de l'intégration de la célèbre équation de Lagrange, aux différences partielles du quatrième ordre, de l'équilibre des plaques élastiques, qui sera démontrée ci-après au chapitre V et surtout au § 73, ainsi qu'à la grande Note que nous y avons jointe. Cette équation classique est établie par Poisson au moyen d'hypothèses plus que contestables que nous discuterons au n° 25 de cette Note.

Dans la même note du § 73, nous donnerons à cette équation du quatrième ordre d'autres bases, en rapport avec la constitution en quelque sorte géométrique des plaques minces, mais ne lui ôtant pas le caractère de simple approximation qu'elle présente généralement.

On pourra voir aux nos 30, 31, 32, 33 de cette note du § 73, sous une forme simple, l'établissement des équations et formules y relatives, et l'on trouvera aussi à la fin du texte même du § 76 une expression tirée par Clebsch de l'équation de Lagrange, toute semblable à celle ci-dessus (u'') de la fin de notre n° 15, pour le déplacement vertical ζ (ou w_0) de tout point à une distance r du centre d'une plaque encastrée, et produit par un poids unique appliqué à ce centre; expression qui, comme on a vu, ne contient point la constante γ^2 ou le rapport $\frac{\varepsilon^2}{a^2}$.

23. Nous avons démontré, dans la présente Note, comme on a vu, nos formules d'une manière rigoureuse, ou sans annulations de termes.

Leur parfaite rigueur est subordonnée, il est vrai, comme est celle de toutes les formules ci-dessus d'extension, flexion, torsion des tiges (Note du § 28) à ce que les forces ou les réactions d'appuis et d'encastrements agissent exclusivement sur une certaine surface qui est, pour les plaques, leur cylindre contournant, en s'y distribuant des manières qui sont exprimées en z par les formules du deuxième et du troisième degré (j') n° 9 et (u') n° 10 donnant t_{rz} et t_{rr}, et spécifiées pour $r = a$. Mais, ainsi que nous avons eu bien des fois occasion de le dire, elles donnent des résultats très suffisamment approchés quel que soit le mode d'application et de distribution si la plaque est peu épaisse; et, en tous cas, notre analyse actuelle, outre qu'elle tient compte de termes $\left(\text{ceux en } \gamma^2 \text{ ou } \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)$ dont il n'est nulle question dans l'analyse connue, a l'avantage de ne donner que des résultats où tout a été mis en compte dès le commencement ou sans suppressions faites de prime abord, et dont on n'aperçoit pas *a priori* la portée et le degré d'influence sur les résultats lorsqu'on en opère de ce genre (*).

(*) Nous ne pouvons point passer sous silence, à ce sujet, un *Mémoire sur la répartition des efforts dans les cylindres et les sphères pressés normalement, et dans les plaques circulaires symétriquement chargées*, par M. Brune, ancien élève de l'École polytechnique, professeur à l'École des Beaux-Arts ; mémoire qui a été inséré en septembre 1876 aux Annales des Ponts et Chaussées, p. 227 à 252.

Cet auteur se sert, dans ses calculs, de la théorie de la résistance des tiges à l'extension et à la flexion, telle qu'on l'enseigne dans les écoles, et nullement de la théorie générale et

§ 46. — Flexion produite par des couples de manière que la périphérie de la surface médiane vienne, par de petits déplacements perpendiculaires à son plan, se placer sur une surface donnée.

Dans le cas le plus général, où s'introduit la fonction f du § 39, les conditions qui doivent être satisfaites pour le bord de la plaque sont, d'après les équations (135) de la fin de ce §, p. 504,

---

mathématique de l'élasticité, si ce n'est qu'il lui emprunte le théorème des contractions latérales qui accompagnent toute extension longitudinale de tige ou d'anneau. Il établit d'abord deux équations pour l'équilibre d'éléments de plaque circulaire, limités par deux plans méridiens faisant entre eux un angle infinitésimal $d\alpha$, et par deux cylindres conaxiques à la plaque, ayant pour rayons r et $r+dr$. La première de ces deux équations est destinée à exprimer l'équilibre de translation dans le sens r, de l'élément auquel il suppose une épaisseur, dans le sens z, égale à l'unité ; ce qui revient à lui attribuer une épaisseur dz par laquelle on divise finalement tous les termes; il écrit cette équation (p. 228), $T = F + r\frac{dF}{dr}$, ce qui, avec nos notations, serait :

$$(k''') \qquad t_{\alpha\alpha} = t_{rr} + r\frac{\partial t_{rr}}{\partial r}.$$

Elle peut bien être applicable aux cylindres creux indéfinis ; mais, pour les plaques, cette équation est incomplète, car elle revient à notre première équation (f'), sans son second terme $\frac{\partial t_{zr}}{\partial r}$. Cette omission vient de ce que l'auteur n'a pas tenu compte de la différence des tensions tangentielles, de sens r, sur les faces supérieure et inférieure, $rd\alpha dr$, quoique l'alinéa du bas de sa page 240 semblerait prouver qu'il a aperçu leur inégalité.

La seconde équation, qu'il écrit, page 238,

$$(l''') \qquad m' = m + r\frac{dm}{dr} - rT,$$

où T représente maintenant l'effort tranchant, est exacte : elle suppose que l'élément a toute l'épaisseur 2ε de la plaque, et elle revient à

$$(m''') \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{\alpha\alpha}\, z dz = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rr}\, z dz - r\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rr}\, z dz - r\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rz}\, dz.$$

Elle est analogue à celles qui, dans les tiges, ainsi que dans les plaques où l'on considère des éléments compris entre quatre plans parallèles à des coordonnées rectangles x, y (voyez n° 12 de la note ci-après de la fin du § 73) établissent des relations entre les efforts tranchants et les dérivées des moments ou couples fléchissants par rapport à ces coordonnées. Elle exprime en effet l'équilibre de rotation de l'élément à faces courbes, dont on vient de parler, autour d'une ligne tracée sur le feuillet moyen de la plaque, perpendiculairement au bout du rayon r bissecteur du petit angle $d\alpha$. On voit facilement, en effet, que si $-mrd\alpha$ représente le moment des forces normales t_{rr} qui agissent sur la petite face cylindrique de rayon r et de largeur horizontale $rd\alpha$, un moment $\left(mr + \frac{\partial .mr}{\partial r}dr\right)d\alpha$, de sens contraire, agira sur la face cylindrique opposée, de rayon $r+dr$. D'une autre part, sur les deux faces méridiennes de largeur dr, les forces normales $t_{\alpha\alpha}$ produisent des moments ou couples $m'dr = dr\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{\alpha\alpha}\, zdz$ qui, portés comme des longueurs sur leurs axes de rotation dr (à la manière de Poinsot et Cauchy) et projetés sur l'axe $rd\alpha$ du moment m avec lequel ils font des angles $\frac{\pi}{2} - \frac{d\alpha}{2}$, fournissent des moments composants faisant une somme

$$(174\ a)\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{E'C'\cos p}{2} - \frac{E'}{1+\eta'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos p + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin p\right),\\ Y_1 &= \frac{E'C'\sin p}{2} - \frac{E'}{1+\eta'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos p + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin p\right). \end{aligned}\right.$$

Les forces agissant sur le point (x, y, z) du bord de la plaque ont

---

$m'dr\left(\frac{d\alpha}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right)$; et l'effort tranchant T, agissant sur la plus grande face cylindrique avec un bras de levier dr, fournira, en négligeant les produits du second ordre, un moment $-Trd\alpha dr$. Égalant à zéro la somme de ces moments en leur attribuant des signes convenables, et divisant par $d\alpha dr$, on a bien l'équation (l''') de M. Brune.

Aussi cette équation de moments, écrite sous la forme (m'''), est satisfaite identiquement quand on y met pour $t_{\alpha\alpha}$, t_{rr}, t_{rz} les valeurs trouvées ci-dessus (u') et autres, déduites des solutions (l') du n° 9. Et elle résulte même immédiatement de la première équation (g'), prise complète ou sans omettre son second terme, et multipliée par zdz, puis intégrée de $-\varepsilon$ à ε, car cela donne

$$\frac{1}{r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(t_{rr} - t_{\alpha\alpha})\,zdz + \frac{\partial}{\partial r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial t_{rr}}{\partial r}\,zdz = -\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial t_{rz}}{\partial z}\,zdz,$$

égalité dont le second membre, intégré par parties, devient

$$-(z t_{rz})_{z=\varepsilon} + (z t_{rz})_{z=-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t_{rz}\,dz,$$

trinôme qui se réduit bien à son dernier terme, vu que t_{rz} est supposé nul sur les deux faces $z = -\varepsilon$ et $z = \varepsilon$ de la plaque.

Mais, pour n'avoir pas suffisamment étudié, sans doute, les formules générales de l'élasticité et de composantes de tensions, l'ingénieux professeur se trompe lorsqu'il pense qu'il y a un rapport constant, tel que celui qu'on désigne par E, entre la traction exercée par unité superficielle sur les bases d'un élément prismatique, et la dilatation longitudinale qui en résulte : cette constance du rapport n'a en effet lieu que si toutes les faces latérales sont libres de pression ou tension; car si deux des faces, seulement, de ce prisme ou de cet anneau (supposé à section rectangle) en sont libres, ainsi qu'on peut le supposer pour les faces parallèles aux bases d'une plaque mince, tandis que les deux autres supportent des tensions, telles que celle t_{rr}, le rapport entre les tractions longitudinales et l'allongement dépend aussi de cette traction latérale t_{rr}. Il se trompe encore s'il pense qu'il y a un rapport constant, tel que le $\frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu}$ de Lamé, (ou $\frac{1}{4}$ si $\lambda = \mu$) entre les contractions transversales et la dilatation longitudinale du même élément : ce rapport dépend aussi des pressions latérales, s'il y en a.

Les formules sont donc en partie fausses.

Mais comment, ou par quelles compensations ou éliminations d'erreurs se fait-il que les applications données par M. Brune fournissent, pour le cylindre creux ou la sphère creuse, des formules conformes à celles de Lamé (sauf un coefficient 3 au lieu de 2 dans les expressions de Δr de la page 251), et qu'elles le conduisent, pour les plaques circulaires, non seulement à l'expression (d'') de la flèche centrale déterminée par un poids unique quand la plaque est simplement posée, ainsi qu'aux deux autres que Poisson a données aussi pour le cas de charge uniformément répartie (voir Note du § 73, n°s 30, 31) ; mais même, et tout aussi exactement, aux équations des coupes méridiennes de la plaque fléchie dans ces trois cas dont M. Brune s'est occupé, en ne s'abstenant de donner un calcul que pour le quatrième cas de Poisson (celui où le poids unique agit sur une plaque à bords encastrés) ?

C'est ce qu'il nous paraît difficile de reconnaître, car en mettant dans les équations de M. Brune, à la place de E et de $\frac{1}{4}$, les vraies valeurs des rapports $\frac{t_{\alpha\alpha}}{\partial_\alpha}$ et $-\frac{\partial_r}{\partial_\alpha}$ qui doivent contenir t_{rr} et $t_{\alpha\alpha}$, et en rétablissant dans l'équation d'équilibre le troisième terme qui y manque, on introduit de nouvelles inconnues, ce qui paraît rendre impossible l'aboutissement de son genre de calcul. Nous ne ferons donc pas ici la tentative de cet éclaircissement.

alors, d'après les expressions (134), p. 303, pour composantes, $X_1 z$, $Y_1 z$, et on a déjà vu plus haut que les fonctions X_1, Y_1 ne peuvent pas être choisies arbitrairement. Le problème de déterminer une flexion *arbitraire* de la plaque, par les procédés développés précédemment, ne peut donc être résolu d'une manière générale; mais on peut résoudre un certain nombre de problèmes particuliers remarquables, parmi lesquels je choisirai le suivant :

La flexion de la plaque, produite par des couples, p. 335, *agissant d'une manière déterminée sur ses bords ou sur sa surface latérale, doit être telle que la périphérie de la surface médiane vienne s'appliquer sur une surface donnée arbitrairement, très voisine de la périphérie primitive.*

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface donnée, telle, que la fonction F, pour les coordonnées x, y, z des points de la périphérie de la surface médiane, ait une très petite valeur. Introduisons, au lieu de x, y, z, les coordonnées $(x+u)$, $(y+v)$, $(z+w)$ qu'on a après les déplacements : la condition imposée est que, pour les points de cette périphérie de la surface médiane, on ait

$$F(x+u,\ y+v,\ z+w) = 0.$$

Développons suivant les puissances de u, v, w et négligeons les puissances supérieures, nous aurons :

$$F(x, y, z) + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

équation dont tous les termes sont très petits et comparables, puisque la valeur de F (x, y, z), c'est-à-dire la distance de la périphérie primitive à la surface donnée, est supposée très petite, et en deçà de limites convenables. Pour la surface médiane où $z = 0$, on a, d'après (172) p. 334,

$$u = 0,\quad v = 0,\quad w = f - C'(1-\eta')\frac{x^2+y^2}{4};$$

et l'équation de condition se réduit à

$$(174\,b)\qquad w = f - C'(1-\eta')\frac{x^2+y^2}{4} = -\frac{F(x, y, 0)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=0}}.$$

En d'autres termes, le problème peut être remplacé par le suivant. plus simple :

La flexion de la plaque produite par les couples doit être telle que la périphérie de la surface médiane subisse de petits déplacements donnés, dans une direction perpendiculaire à son plan.

Soit N la fonction de x, y représentant ces déplacements. Alors f doit satisfaire non seulement à la condition générale (128) du § 39,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 ,$$

mais encore à la suivante relative aux points de la périphérie de la section médiane, et qui peut être tirée de la troisième (132), p. 303 :

$$(175)\qquad w=f-C'(1-\eta')\frac{x^2+y^2}{4}=N.$$

Cela peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes ; on peut attribuer à la constante C′ toutes les valeurs possibles, et la fonction f se trouve chaque fois déterminée complètement. *On peut donc toujours amener la plaque dans une position conforme à la condition donnée en appliquant sur son bord des couples comme ceux que produisent les forces* X_1, Y_1 *exprimées par les* (174 *a*), *où l'on aura mis pour* f *sa valeur tirée de* (175) ; *couples équivalents à d'autres tendant à produire des rotations, les uns autour de tangentes, les autres autour de normales à la périphérie de la surface médiane ainsi qu'au cylindre contournant où elle est tracée.*

Je vais examiner le cas particulier où la périphérie est un cercle. Si l'on pose, comme aux §§ 42 et 44,

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,$$

l'expression la plus générale pour f qui soit admissible, est la suivante, dans laquelle nous ne faisons figurer que des puissances positives de r, attendu qu'elle ne doit pas devenir infinie pour $r=0$:

$$(175\ a)\quad f=A+A_1 r\cos\theta+A_2 r^2\cos 2\theta+\ldots+B_1 r\sin\theta+B_2 r^2\sin 2\theta+\ldots$$

Pour se rendre compte de cette forme que nous attribuons à l'expression de f, il suffit de se reporter au problème du § 44, où, en éliminant η' de (158) par différentiation et addition, on trouve, pour ξ, l'équation $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0$, semblable à celle que nous avons pour f, et où l'on a trouvé aussi, pour cette même inconnue, un développement (165) conforme également à celui que nous venons de poser pour f.

Soit maintenant a le rayon de la périphérie ; l'équation de condition

(175) acquiert la forme

$$N = A - \frac{C'(1-\eta')}{4}a^2 + A_1 a\cos\theta + A_2 a^2\cos 2\theta + .. + B_1 a\sin\theta + B_2 a^2 \sin 2\theta + ..$$

On peut imaginer que la fonction donnée N ait été exprimée en fonction de θ. Les formules ou résultats trigonométriques (168 e), (168 f), p. 326, et la méthode connue d'élimination de tous les termes hors un qu'elles conduisent à employer pour en déterminer les coefficients, donneront immédiatement, appliqués comme au même § 44, les valeurs suivantes de ceux de l'expression de f posée tout à l'heure :

$$A = \frac{C'(1-\eta')}{4}a^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N d\theta;$$

$$A_i = \frac{1}{a^i\pi}\int_0^{2\pi} N\cos i\theta d\theta; \quad B_i = \frac{1}{a^i\pi}\int_0^{2\pi} N\sin i\theta d\theta.$$

Le problème est donc résolu.

Au lieu des déplacements u, v, on détermine plus facilement les déplacements mesurés suivant le rayon vecteur r et dans une direction perpendiculaire à ce rayon. D'après (172) et en tenant compte des formules (165), § 44, de changements des quotients différentiels par rapport à x, y, en quotients différentiels par rapport à r et θ, ces déplacements sont :

$$u\cos\theta + v\sin\theta = -z\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{C'(1-\eta')}{2}r\right);$$

$$v\cos\theta - u\sin\theta = -z\frac{\partial f}{r\partial\theta}; \quad w = f - \frac{C'(1-\eta')}{2}r^2 - \frac{\eta''C'}{2}z^2;$$

ou bien, en introduisant les séries ci-dessus,

$$u\cos\theta + v\sin\theta = z\left[\frac{C'(1-\eta')}{2}r - A_1\cos\theta - 2A_2 r\cos 2\theta - \ldots - B_1\sin\theta - 2B_2 r\sin 2\theta - \ldots\right],$$

$$v\cos\theta - u\sin\theta = z\left[A_1\sin\theta + 2A_2 r\sin 2\theta + \ldots - B_1\cos\theta - 2B_2 r\cos 2\theta - \ldots\right],$$

$$w = A + C'\left[\frac{(1-\eta')(a^2-r^2) - 2\eta'' z^2}{4} + A_1 r\cos\theta + A_2 r^2\cos 2\theta + \ldots + B_1 r\sin\theta + B_2 r^2\sin 2\theta + \ldots\right].$$

Les forces capables de produire ces déplacements ont, d'après ce qui précède, les composantes

$$X = X_1 z, \quad Y = Y_1 z,$$

où les valeurs de X_1, Y_1, sont celles des équations (174 a), page 369.

Ici aussi, il est plus commode, au lieu de prendre les composantes des forces parallèlement aux axes, de considérer les composantes dirigées suivant le rayon de la section et suivant la tangente à sa circonférence. Remarquons que, dans le cas présent, p est la même chose que θ, et que pour une fonction K quelconque, on a, d'après (163),

$$\frac{\partial K}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial K}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial K}{\partial r}, \quad -\frac{\partial K}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial K}{\partial y}\cos\theta = \frac{\partial K}{r\partial\theta}.$$

On déduit d'abord de (174 a), en prenant successivement $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{df}{dy}$ pour cette fonction K,

$$X_1 = \frac{E'C'\cos\theta}{2} - \frac{E'}{1+\eta'}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad Y_1 = \frac{E'C'\sin\theta}{2} - \frac{E'}{1+\eta'}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ensuite, ajoutant ces deux expressions multipliées respectivement par $\cos\theta$, $\sin\theta$, puis par $\sin\theta$, $-\cos\theta$, et faisant de nouveau usage des mêmes formules de changement des dérivées par x, y, en dérivées par r, θ,

$$X_1\cos\theta + Y_1\sin\theta = \frac{E'C'}{2} - \frac{E'}{1+\eta'}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}; \quad X_1\sin\theta - Y_1\cos\theta = \frac{E'}{1+\eta'}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{f}{r}\right).$$

En multipliant par z, on aura les composantes cherchées. La première agit dans la direction du rayon et tend à faire tourner autour de la tangente; la seconde, au contraire, agit dans la direction de la tangente et tend à faire tourner autour du rayon. Si on désigne par R et T ces deux composantes, on a, en introduisant la valeur (175 a) de f,

$$R = \frac{E'C'z}{2} - \frac{E'z}{1+\eta'}\Big[2A_2\cos 2\theta + 6A_3 r\cos 3\theta + \ldots + 2B_2\sin 2\theta + 6B_3 r\sin 3\theta + \ldots\Big],$$
$$T = -\frac{E'z}{1+\eta'}\Big[2A_2\sin 2\theta + 6A_3 r\sin 3\theta + \ldots - 2B_2\cos 2\theta - 6B_3 r\cos 3\theta - \ldots\Big].$$

J'ajouterai encore une remarque propre à éclairer ce problème d'une lumière plus vive.

D'après les formules (121 c) du § 39 (page 298) des composantes de tension $\mathfrak{t}_{xx}$, $\mathfrak{t}_{yy}$, jointes à $0 = \mathfrak{d}'\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{d}'\dfrac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{c}\dfrac{\partial w}{\partial z}$ résultant de la supposition $\mathfrak{t}_{zz} = 0$, base principale du présent chapitre, on a, vu notre notation $\mathfrak{a}_1 = 2\mathfrak{f} + \mathfrak{f}' - \dfrac{\mathfrak{d}'^2}{\mathfrak{c}}$,

$$\mathfrak{t}_{xx} + \mathfrak{t}_{yy} = 2(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{f})\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right);$$

d'où, pour la dilatation *cubique*, ou la proportion de l'augmentation du volume,

$$\upsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \left(1 - \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\right) \frac{\mathrm{t}_{xx} + \mathrm{t}_{yy}}{2(\mathrm{a}_1 - \mathrm{f})}.$$

Mais les expressions (174) du § 45, p. 334, donnent $\mathrm{t}_{xx} + \mathrm{t}_{yy} = \mathrm{E}'\mathrm{C}'z$, eu égard à l'équation (175). On a donc pour cette dilatation cubique la première des trois expressions suivantes, qui peut être remplacée à volonté par les deux autres, d'après les relations (z) données au nº 16 *bis* de la Note du § 16, formules (z), page 84,

$$\upsilon = \left(1 - \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\right) \frac{\mathrm{E}'}{2\mathrm{a}_1 - 2\mathrm{f}} \mathrm{C}'z = \left(1 - \frac{\mathrm{d}'}{\mathrm{c}}\right)(1 - \eta')\,\mathrm{C}'z = (1 - \eta' - \eta'')\,\mathrm{C}'z\,.$$

Cette grandeur s'annule avec C′. Cela constitue un caractère particulier des déplacements ne dépendant que de la fonction f, sans C′, ou pour lesquels on a $\mathrm{C}' = 0$; à savoir que *ces déplacements ne sont nulle part accompagnés d'un changement de volume des éléments solides*. Par conséquent, *le problème qui vient d'être traité*, *et qui*, comme nous l'avons vu, *admettait une infinité de solutions*, *n'en admet plus qu'une seule*, *lorsqu'on y ajoute cette condition qu'aucun changement de volume ne doit se produire en aucun point de la plaque*; car la constante C′ laissée arbitraire doit alors disparaître.

Mais, à une valeur quelconque de cette constante, correspondent, dans la plaque, des changements de volume déterminés; changements qui disparaissent dans la surface médiane, mais prennent naissance de part et d'autre en s'accroissant proportionnellement à ce dont on s'en éloigne. Ce qui se trouve d'un des côtés de cette surface présente des contractions croissantes, et, ce qui se trouve de l'autre, des extensions également croissantes (*).

(*) **NOTE FINALE DU § 46.**

SUR L'ÉQUILIBRE DES CORPS MASSIFS SOLLICITÉS EN UN POINT SUPERFICIEL OU INTÉRIEUR.

1. — *Objet de cette Note*. — Dans ces chapitres II et III, il a été présenté, du problème des déformations des corps prismatiques (§§ 26 à 31, et 40 à 46), des solutions qui sont rigoureuses, mais sous la condition expresse que, sur les bases extrêmes des tiges, et sur la surface latérale des plaques, les forces soient appliquées et distribuées de manières spéciales. Si elles le sont d'autres manières, les solutions sont encore utilement employables (Note du § 28), mais seulement comme fournissant des approximations qui sont subordonnées à ce que certaines dimensions soient fort petites par rapport à d'autres.

Il était donc désirable qu'on trouvât plusieurs solutions non sujettes à des restrictions de ce genre, et qui fussent rigoureuses quel que soit le mode de distribution des forces sur les faces des solides auxquels leur action fait subir de petits changements de forme.

Une magnifique solution de ce genre a été donnée en 1853 par Lamé (*Journal de mathématiques*, t. XIX, 1854) pour une sphère pleine ou creuse, sur la surface de laquelle s'exercent des pressions quelconques; solution comprenant, au fond, celles que Lamé et Clapeyron avaient déjà présentées, dans leur célèbre mémoire de 1828, pour le cas où le rayon de la sphère est infini, et qui est celui d'un solide limité par un plan ou par deux plans parallèles. Malheureusement ces solutions, affectées de séries ou d'intégrales quadruples, et de variables auxiliaires à éliminer, ne prêtent guère aux calculs, et on conçoit que Clebsch se soit abstenu de les rapporter. Pareille chose semble pouvoir être dite de l'habile et ingénieuse solution que M. Emile Mathieu est parvenu récemment à donner (Compte rendu, 31 mai 1880, p. 1272) du difficile problème posé et non résolu par Lamé (douzième leçon de 1852), de l'équilibre d'un prisme rectangle supportant des pressions normales sur ses six faces; car, malgré la triple symétrie supposée de leur distribution, cette solution ne peut s'obtenir que par le moyen d'une infinité de séries qui dépendent les unes des autres d'une manière extrêmement complexe.

Nous croyons donc utile de donner les solutions, immédiatement applicables en nombres, que M. Boussinesq n'a publiées jusqu'ici que par de courts extraits (*) et qui, pour des forces distribuées de manières quelconques, font connaître les déformations éprouvées par un sol ou un corps élastique de grandes dimensions; solutions d'une forme extrêmement simple, fécondes en conséquences, et d'autant plus dignes d'être signalées qu'elles révèlent l'usage pouvant être fait, pour les problèmes sur l'élasticité, des potentiels connus, et surtout d'un potentiel nouveau dit logarithmique à trois variables.

Nous transcrivons la note qu'il a bien voulu rédiger et nous remettre à cette intention.

Voici (dit M. Boussinesq) la résolution très simple que j'ai pu effectuer, en 1878 et 1879, de quelques problèmes assez étendus d'équilibre, par l'emploi de certaines fonctions de la famille des potentiels bien classiques d'attraction Newtonienne. Les plus intéressants de ces problèmes concernent la résistance et les déformations d'un sol élastique horizontal, de longueur, largeur et profondeur indéfinies, à la surface duquel s'exercent des pressions tantôt connues, tantôt réparties de manière à faire prendre à leur région d'application une forme (plane ou courbe) connue ; ce qui revient, en d'autres termes, à considérer l'effet produit sur un corps élastique par des trac-

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 20 mai, 9 septembre, 7 octobre, 30 décembre 1878, pages 1260, 402, 519, 1077, et 24 février, 7 avril 1879, pages 375, 741.

tions ou compressions appliquées à une petite partie de sa surface, et le mode de transmission, à son intérieur, des actions ainsi exercées, lorsque d'ailleurs les points du corps un peu éloignés sont maintenus sensiblement en repos, et qu'on se borne à étudier la région directement atteinte, avec son voisinage, endroits d'une étendue totale assez limitée pour que tout s'y passe, à fort peu près, comme si la surface touchée était plane, et les dimensions du corps élastique, indéfinies.

Un autre de ces problèmes, déjà abordé par MM. William Thomson et Tait dans leur *Traité de philosophie naturelle*, mais dont la solution acquiert, par l'emploi des potentiels, son maximum de simplicité et un sens géométrique des plus expressifs, est celui des déplacements que fait naître dans un solide, autour de son point d'application, une force extérieure venant s'exercer au-dedans de ce corps, assez loin de la surface pour que celle-ci n'ait pas d'influence ou pour qu'on puisse supposer le corps indéfini.

Ce sont là, évidemment, des problèmes élémentaires et comme fondamentaux, bien propres à mettre en vue certains caractères essentiels de la manière dont s'y prend, en quelque sorte, l'élasticité pour répartir et modérer les efforts qu'elle transmet de la surface à l'intérieur d'un solide, ou d'une partie quelconque d'un tel corps aux parties voisines.

Avant de les aborder, rappelons brièvement les propriétés, bien connues, des potentiels inverse et direct, et voyons surtout celles de la fonction analogue que j'ai appelée *potentiel logarithmique à trois variables*.

2. *Des potentiels inverse, direct, logarithmique.* — Imaginons une masse de matière (réelle ou fictive), $\int dm$, occupant un certain espace, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du volume élémentaire $d\varpi$ que remplit l'élément quelconque dm de cette matière, ρ la densité $\frac{dm}{d\varpi}$ du même élément dm. Si l'on considère un point quelconque (x, y, z) de l'espace, on pourra prendre sa distance

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

à l'élément dm de la masse, et effectuer soit le quotient $\frac{dm}{r}$, soit le produit $r dm$, puis faire la somme de tous les termes pareils,

$$\int \frac{dm}{r} = \iiint \frac{\rho\, dx_1 dy_1 dz_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

et

$$\int r\, dm = \iiint \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}\, \rho\, dx_1 dy_1 dz_1,$$

correspondant à tous les éléments $dm = \rho\, d\varpi = \rho\, dy_1 dy_1 dz_1$ de la masse donnée.

La première des deux intégrales ainsi obtenues, $\int \frac{dm}{r}$, est dite le *potentiel*

inverse, ou simplement le *potentiel, relatif à la masse* $\int dm$. C'est une fonction de x, y, z, qui, comme on le sait, reste finie et continue (malgré le dénominateur r susceptible de s'y annuler) même quand le point (x, y, z) est pris à l'intérieur de la masse, pourvu que la densité ρ soit finie en (x, y, z), et qui, de plus, peut se différentier une fois sous les signes $\int$ par rapport à x, y, ou z, même dans ce cas où la fonction $\frac{1}{r}$ devient infinie. On sait, en outre, qu'à une deuxième différentiation, la fonction sous les signes $\int$ devient d'un ordre d'infinis trop élevé pour qu'on puisse procéder de la même manière quand le point (x, y, z) est intérieur au corps; mais que ces dérivées secondes s'obtiennent alors par des procédés spéciaux, exposés dans les Cours de mécanique rationnelle; et qu'on trouve, en particulier, pour le *paramètre différentiel* Δ_2 ou $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ du potentiel inverse $\int\frac{dm}{r}$, c'est-à-dire pour la somme

$$\frac{\partial^2\int\frac{dm}{r}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\int\frac{dm}{r}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\int\frac{dm}{r}}{\partial z^2},$$

l'expression simple $-4\pi\rho$, où ρ désigne la densité en (x, y, z) (*). Cette somme se réduit donc à zéro quand le point (x, y, z) est extérieur à la masse $\int dm$; cas où la fonction $\frac{1}{r}$, ne cessant pas d'être finie et continue, non plus que ses dérivées, pour les valeurs qu'on lui attribue, ne donne lieu à aucune difficulté, et où des différentiations sous les signes $\int$ peuvent s'effectuer autant de fois qu'on le veut.

La seconde des intégrales, $\int r\,dm$, a été appelée le *potentiel direct* relatif à la masse $\int dm$. Comme on a évidemment

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}-\frac{(x-x_1)^2}{r^3},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_1}{r},\ \text{etc.},$$

il est clair qu'on peut différentier cette intégrale en x, y, z, deux fois sous les signes $\int$, même pour les points (x, y, z) intérieurs à la masse $\int dm$, sans que les résultats acquièrent, sous ces signes $\int$, des facteurs susceptibles de devenir d'un ordre de grandeur plus élevé que n'est $\frac{1}{r}$; en sorte que les dérivées ainsi calculées restent bien déterminées, comme le potentiel

(*) Voir une démonstration directe et très simple de ce théorème de Poisson dans le volume de 1880 (p. 96 et 97) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, publié par MM. Liouville et Resal.

inverse lui-même $\int \frac{dm}{r}$. On trouve, en opérant de la sorte,

$$\Delta_2 \int r dm, \text{ ou } \frac{\partial^2 \int r dm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \int r dm}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \int r dm}{\partial z^2}$$
$$= \int \left[\frac{3}{r} - \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{r^3} \right] dm = 2 \int \frac{dm}{r} \cdot$$

Donc, le paramètre différentiel Δ_2 du potentiel direct $\int r dm$ égale le double du potentiel inverse $\int \frac{dm}{r}$. Par suite, si l'on prend le Δ_2 de ce résultat, on aura, par le théorème de Poisson, rapporté ci-dessus, $\Delta_2 \Delta_2 \int r dm = -8\pi\rho$, ou bien

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int r dm = -8\pi\rho,$$

formule remarquée par Lamé dans le cas simple où, le point (x, y, z) étant extérieur à la masse $\int dm$, la densité ρ est nulle en ce point, et où, par suite, $\Delta_2 \Delta_2 \int r dm = 0$.

Après avoir rappelé ces propriétés, dont nous n'aurons besoin que pour notre dernier problème, passons à l'étude du *potentiel logarithmique*, auquel nous demanderons, au contraire, la plupart de nos résultats.

Supposons la masse $\int dm$ étalée en couche infiniment mince sur le plan des xy, et soient : x_1, y_1, les coordonnées de la surface $d\sigma$, infiniment petite en tous sens, qu'occupera un élément dm de cette masse ; ρ, ou mieux $\rho(x_1, y_1)$, sa densité par unité d'aire, c'est-à-dire le rapport $\frac{dm}{d\sigma}$, fonction déterminée de x_1, y_1, qui s'annule en dehors de la partie limitée du plan où se trouvera la masse $\int dm$. Considérons, d'autre part, un point quelconque (x, y, z) de l'espace situé du côté des z positifs ; et imaginons qu'on fasse la somme

$$z + r = z + \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2}$$

des deux distances de ce point au plan de la couche et à l'élément dm de celle-ci, puis qu'on multiplie le logarithme népérien de cette somme, $\log(z+r)$, par l'élément dm, et qu'on intègre le résultat pour toute l'étendue de la couche $\int dm$. La fonction ainsi obtenue,

$$(1) \quad \psi = \int \log(z+r)\, dm = \int \log(z+r)\, \rho\, d\sigma = \iint \log\left(z + \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2} \right) \rho(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1,$$

sera précisément le *potentiel logarithmique* dont nous aurons à nous occuper.

Sa valeur se trouvera finie et déterminée à l'intérieur de tout l'espace situé du côté des z positifs jusqu'à une distance donnée quelconque du plan des xy; car $z+r$ y sera partout différent de zéro et aura son logarithme fini. En la différentiant sous les signes $\int$ par rapport à x, y, z et observant que $\frac{\partial r}{dx}=\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_1}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$, il vient

$$(2)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\int\frac{x-x_1}{r(z+r)}dm,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\int\frac{y-y_1}{r(z+r)}dm,\quad \frac{\partial\psi}{\partial z}=\int\frac{dm}{r}.$$

De nouvelles différentiations en x, y, z donnent ensuite :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\displaystyle\int\left[1-\frac{(x-x_1)^2(z+2r)}{r^2(z+r)}\right]\frac{dm}{r(z+r)}, \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\displaystyle\int\left[1-\frac{(y-y_1)^2(z+2r)}{r^2(z+r)}\right]\frac{dm}{r(z+r)}, \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\displaystyle\int\frac{z}{r^3}dm. \end{cases}$$

En faisant la somme, on trouve

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\int\left[2-\frac{(r^2-z^2)(z+2r)}{r^2(z+r)}-\frac{z(z+r)}{r^2}\right]\frac{dm}{r(z+r)}=0\ ;$$

ce qui revient à

$$(4)\qquad \Delta_2\psi \quad \text{ou} \quad \Delta_2\int\log(z+r)\,dm=0.$$

Donc, *le paramètre différentiel* Δ_2 *du potentiel logarithmique est nul* pour tous les points extérieurs à la couche. Observons encore, d'après les formules précédentes : 1° que *la dérivée* $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ *du potentiel logarithmique, suivant une droite normale au plan de la couche* $\int dm$, *égale le potentiel ordinaire ou inverse,* $\int\frac{dm}{r}$, *relatif à cette couche;* 2° que *les dérivées partielles premières, en* x, y, z, *du potentiel logarithmique, sont des fonctions homogènes du degré* -1 *par rapport aux expressions* $x-x_1$, $y-y_1$, z, r, *en sorte qu'elles deviennent, comme* $\frac{1}{r}$, *comparables à l'inverse de la distance au centre de gravité de la couche quand on s'éloigne indéfiniment le long d'une droite quelconque issue de ce centre.*

Voyons maintenant quelles valeurs limites le potentiel ψ, ses deux dérivées première et seconde par rapport à z, et le produit par z de sa dérivée troisième en z atteignent pour $z=0$, c'est-à-dire à l'instant où le point (x, y, z) arrive sur le plan même de la couche. Considérant donc les

formules

$$(5)\quad \psi = \int \log(z+r)\,dm,\quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \int \frac{dm}{r},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\int \frac{z\,dm}{r^3},\quad z\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3} = \int\left(3\frac{z^3}{r^5} - \frac{z}{r^3}\right)dm,$$

supposons qu'on rapporte les divers points de la couche $\int dm$ à des coordonnées polaires, R et ω, qui aient pour pôle le pied de l'ordonnée z menée du point (x, y, z) au plan des xy, ou telles, que

$$x_1 - x = \mathrm{R}\cos\omega,\qquad y_1 - y = \mathrm{R}\sin\omega;$$

et découpons, par suite, la couche, au moyen de cercles concentriques et de rayons vecteurs successifs, en éléments ayant les expressions

$$dm = \rho(x_1, y_1)\,d\sigma = \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega,\ y + \mathrm{R}\sin\omega)\,\mathrm{R}\,d\omega\,d\mathrm{R}.$$

Si nous observons, en outre, que $r^2 = \mathrm{R}^2 + z^2$, et que les intégrations s'étendront bien à toute la couche en faisant varier ω de 0 à 2π et R de 0 à ∞, les formules (5) deviendront

$$(6)\quad \begin{cases} \psi = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega, y + \mathrm{R}\sin\omega)\,\mathrm{R}\log\left(z + \sqrt{\mathrm{R}^2 + z^2}\right)d\mathrm{R}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega, y + \mathrm{R}\sin\omega)\,\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + z^2}}\,d\mathrm{R}, \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega, y + \mathrm{R}\sin\omega)\,\frac{z\mathrm{R}\,d\mathrm{R}}{(\mathrm{R}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ z\dfrac{\partial^3\psi}{\partial z^3} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega, y + \mathrm{R}\sin\omega)\left(3\frac{z^3\mathrm{R}}{(\mathrm{R}^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{z\mathrm{R}}{(\mathrm{R}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)d\mathrm{R}. \end{cases}$$

Nous pouvons poser, dans les deux premières de ces formules (6), $z = 0$. Il vient

$$(7)\quad (\text{pour } z = 0)\ \begin{cases} \psi = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega,\ y + \mathrm{R}\sin\omega)\,(\mathrm{R}\log\mathrm{R})\,d\mathrm{R}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\omega,\ y + \mathrm{R}\sin\omega)\,d\mathrm{R}, \end{cases}$$

expressions finies et déterminées, car on sait que le produit R log R s'annule à la limite $\mathrm{R} = 0$, et, d'autre part, ρ s'annule aussi dès que R dépasse certaines valeurs, c'est-à-dire à d'assez grandes distances tout autour du point $(x, y, 0)$, du moins lorsque l'on admet, comme nous le faisons, que la couche $\int dm$ ne recouvre qu'une étendue de dimensions finies. Quant aux deux dernières formules (6), où paraissent des intégrales ayant, pour $z = 0$, tous leurs éléments nuls, à l'exception de ceux qui se rapportent aux valeurs de x_1 et y_1 infiniment voisines de x et y, remplaçons-y R par une autre variable d'intégration R', telle, que $\mathrm{R} = z\mathrm{R}'$ et que, par suite, $d\mathrm{R} = z\,d\mathrm{R}'$. Nous aurons, en supprimant dans les fractions les facteurs z

communs aux deux termes,

$$(8)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\displaystyle\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^{\infty}\rho(x+zR'\cos\omega,y+zR'\sin\omega)\frac{R'dR'}{(R'^2+1)^{\frac{3}{2}}},\\[2ex] z\dfrac{\partial^3\psi}{\partial z^3}=\displaystyle\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^{\infty}\rho(x+zR'\cos\omega,y+zR'\sin\omega)\left(3\frac{R'dR'}{(R'^2+1)^{\frac{5}{2}}}-\frac{R'dR'}{(R'^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right).\end{cases}$$

Si, actuellement, nous faisons tendre z vers zéro, et si nous observons que

$$\frac{R'dR'}{(R'^2+1)^{\frac{3}{2}}}=d\frac{-1}{(R'^2+1)^{\frac{1}{2}}},\quad 3\frac{R'dR'}{(R'^2+1)^{\frac{5}{2}}}=d\frac{-1}{(R'^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

des intégrations immédiates donneront simplement

$$(9)\qquad(\text{pour } z=0)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-2\pi\rho(x,y),\quad z\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}=0.$$

En résumé, *la fonction ψ et ses deux dérivées première et seconde, dans le sens z normal à la couche, restent finies et déterminées quand z s'annule, ou lorsque le point (x, y, z) atteint la couche même :* en outre, *cette dérivée seconde du potentiel ψ, dans le sens z, y vaut le produit de -2π par la densité superficielle ρ de la couche; et sa propre dérivée en z, multipliée par z, s'y annule.*

Il est clair encore, d'après cela, que les dérivées en x et y du potentiel logarithmique ψ, ou de ses deux premières dérivées en z, restent elles-mêmes finies et déterminées à la surface de la couche, pourvu, du moins, que la densité ρ soit une fonction finie et continue des coordonnées x_1, y_1 du plan des xy.

3. *Équilibre intérieur d'un sol élastique à la surface duquel s'exercent diverses pressions ou tractions.* — Proposons-nous de former, au moyen de la fonction ψ et de ses dérivées, les expressions générales des petits déplacements d'équilibre, u, v, w qu'éprouvent les différents points d'un sol élastique horizontal de longueur, largeur et profondeur indéfinies, quand on exerce certaines pressions ou tractions sur une partie finie de sa surface, partie que nous appellerons la *région d'application* des forces extérieures.

Les molécules du sol, tant superficielles que profondes, infiniment éloignées de cette région d'application, restent évidemment immobiles. Pour plus de précision, on peut dire que leurs déplacements u, v, w sont comparables à l'inverse de la distance au centre de la région d'application considérée. En effet, si l'on conçoit une sphère d'un très grand rayon $\mathfrak{r}$, décrite autour de ce centre, elle découpe le sol suivant une calotte demi-sphérique, à la surface de laquelle s'exercent évidemment des pressions chargées de tenir en équilibre celles que l'on a directement appliquées à la surface supérieure. Or, celles-ci ayant, par hypothèse, leurs composantes totales, suivant les trois axes, finies, il en est de même des pressions appliquées à la calotte et réparties sur toute sa surface $2\pi\mathfrak{r}^2$: en conséquence, ces pressions

sont comparables, par unité d'aire, à $\frac{1}{2\pi\tau^2}$, et les déformations ∂, g qui les ont produites, ou qu'a éprouvées la matière du sol à cette distance τ de la région d'application, sont aussi de l'ordre de $\frac{1}{\tau^2}$. Mais ces déformations s'expriment par des dérivées premières, en x, y, z, des déplacements u, v, w ; en sorte que u, v, w, évidemment nuls pour τ infini et devant avoir leurs dérivées premières de l'ordre de $\frac{1}{\tau^2}$, ne peuvent manquer d'être eux-mêmes comparables à $\frac{1}{\tau}$.

Cela posé, adoptons pour plan des xy la surface même du sol, surface qui restera fixe dans ses parties infiniment éloignées, et, pour axe des z, une verticale menée vers le bas à partir d'un point de la région d'application. De plus, abstrayons, suivant l'usage, le poids propre du sol, ou supposons que l'on adopte pour situations primitives (x, y, z) celles où restent les molécules quand ce poids agit déjà, ce qui n'altère pas d'une manière appréciable l'homogénéité, ni l'isotropie de la matière, du moins aux profondeurs modérées auxquelles nous pourrons nous borner ici. Les équations indéfinies d'équilibre auxquelles nous devrons satisfaire, seront, avec les notations de Lamé (*),

$$(10) \qquad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta_2 u=0,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta_2 v=0,\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta_2 w=0 \quad (^{**}),$$

où θ désigne la dilatation cubique

$$(11) \qquad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Nous aurons de plus à vérifier, aux surfaces limites, certaines conditions, dont les unes, comme on vient de voir, reviennent à exprimer que

(12) u, v, w égalent des quantités de l'ordre $\frac{1}{\tau}$ (à de grandes distances τ de l'origine),

tandis que les autres, relatives à la surface supérieure $z=0$, consisteront à s'y donner directement, en chaque point (x_1, y_1), soit les composantes u, v, w du déplacement moléculaire, soit, à défaut de certaines d'entre

(*) Dans ces notations, applicables aux corps isotropes, les coefficients ou paramètres d'élasticité désignés par λ et μ sont liés à ceux que Clebsch désigne par E, G, η, pour les mêmes corps, par les relations

$$\lambda=\frac{\eta E}{(1+\eta)(1-2\eta)}=G\frac{E-2G}{3G-E},\qquad \mu=G=\frac{E}{2(1+\eta)},$$

que nous avons remplacées, au n° 16 de la Note du § 45, par $\mu=G$, $\lambda=\iota G$.

(**) Ces équations (10) sont identiquement, aux notations près, celles (34e) du texte, p. 112, dans lesquelles on a fait égales à zéro les composantes X, Y, Z des forces extérieures et les inerties $m\frac{\partial^2(u,v,w)}{\partial t^2}$.

elles, les composantes *correspondantes*, p_x, p_y, p_z, de la *pression* qui s'y trouve exercée du dehors et qui est égale et contraire à celle de l'intérieur du sol sur sa surface, composantes admettant, par suite, les expressions

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &p_x, \text{ ou } -T_2, \text{ ou } -t_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\\ &p_y, \text{ ou } -T_1, \text{ ou } -t_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\ &p_z, \text{ ou } -N_3, \text{ ou } -t_{zz} = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}. \ (^*)\end{aligned}\right.$$

Il serait aisé de démontrer, en appliquant ici le procédé employé par Clebsch au § 21 de son livre, que ces diverses équations ou conditions détermineront complétement, dans chaque cas particulier, les trois fonctions u, v, w de x, y, z.

Les équations du problème ainsi établies, imaginons une couche matérielle *fictive*, $\int dm$, ou $\int\int \rho\,(x_1, y_1)\,dx_1 dy_1$, étalée sur une certaine partie de la surface $z = 0$ du sol, et, considérant le potentiel logarithmique $\psi = \int \log(z + r)dm$ qui lui est relatif, tâchons de composer, avec ses dérivées, trois types d'intégrales des équations (10) et (12). Il nous suffira, pour cela, de prendre :

1° Soit

$$(14)\quad u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\ v = -\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\ w = -\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + 2\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

2° Soit

$$(14\ bis)\quad u = \frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad w = \frac{\partial\psi}{\partial z};$$

3° Soit enfin

$$(14\ ter)\quad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad w = 0.$$

En effet, si nous considérons d'abord les valeurs (14), et si nous observons, d'une part, que l'équation (4), $\Delta_2\psi = 0$, donne $\Delta_2\dfrac{\partial\psi}{\partial z} = 0$, d'autre part, que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

en sorte qu'on a

$$\Delta_2\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = z\Delta_2\frac{\partial\psi}{\partial z} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

(*) Les équations (13) sont identiquement celles (34 *c*) du texte, page 111.

nous trouverons, pour ces valeurs (14) de u, v, w,

$$\theta, \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\Delta_2\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2};$$

et, de plus,

$$\Delta_2 u=-\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=-2\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial x},$$

$$\Delta_2 v=-2\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial y},$$

$$\Delta_2 w=-\frac{\partial}{\partial z}\Delta_2\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\Delta_2\frac{\partial\psi}{\partial z}=-2\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}.$$

Par suite, les équations indéfinies (10) se trouveront identiquement satisfaites. Et les conditions (12) le seront aussi; car, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ étant une fonction homogène du degré -1 en $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, z, son produit par z est aussi homogène mais du degré zéro, et les dérivées premières en x, y, z de ce produit sont homogènes du degré -1 par rapport aux mêmes variables, d'après un théorème bien connu sur les fonctions homogènes : donc, toutes les parties des expressions (14) de u, v, w, se trouvant du degré -1 en $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, z, r, deviendront bien de l'ordre de $\frac{1}{r}$ ou de $\frac{1}{\tau}$, à une distance très grande, τ, de l'origine.

Quant aux expressions (14 *bis*) et (14 *ter*), qui, vu la relation $\Delta_2\psi=0$, donnent identiquement $\theta=0$, $\Delta_2(u,v,w)=0$ et qui sont également homogènes du degré -1 en $x-x_1$, $y-y_1$, z, r, il est évident qu'elles vérifient aussi les équations (10) et (12).

Voyons maintenant ce que ces trois types d'intégrales, (14), (14 *bis*), (14 *ter*), donnent, à la surface $z=0$, pour les déplacements u, v, w, et pour les composantes (13) de la pression exercée du dehors sur le sol. Si nous observons 1° que, d'après les formules (7), les valeurs de ψ et de $\frac{\partial\psi}{\partial z}=\int\frac{dm}{r}$ restent finies à la limite $z=0$, ainsi, par suite, que leurs dérivées en x et y, 2° que, de plus, d'après (9), $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ et $z\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}$ y égalent respectivement $-2\pi\rho(x,y)$ et zéro, nous aurons, après quelques réductions évidentes, les formules qui suivent :

1° Avec les valeurs (14),

(pour $z=0$)

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&u=0,\quad v=0,\quad w=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int\frac{dm}{r},\\&p_x=-\frac{2\mu^2}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dm}{r},\quad p_y=-\frac{2\mu^2}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{dm}{r},\\&p_z=-2\mu\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{dm}{r}-4\pi\mu\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\rho(x,y);\end{aligned}\right.$$

2° Avec les valeurs (14 *bis*),

$$(15\ bis)\ \begin{cases} (\text{pour } z=0) \\ u=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \quad v=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad w=\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=\displaystyle\int\frac{dm}{r}, \\ p_x=-2\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dm}{r}, \quad p_y=-2\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\frac{dm}{r}, \quad p_z=-2\mu\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\frac{dm}{r}=4\pi\mu\rho(x,y); \end{cases}$$

3° Enfin, avec les valeurs (14 *ter*),

$$(15\ ter)\ \begin{cases} (\text{pour } z=0) \\ u=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w=0, \\ p_x=\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\frac{dm}{r}, \quad p_y=-\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dm}{r}, \quad p_z=0. \end{cases}$$

Donc, le potentiel logarithmique ψ nous fournit, pour le problème proposé, trois types bien distincts d'intégrales, contenant, chacun, une fonction arbitraire des coordonnées de tous les points de la surface $z=0$, savoir, la densité par unité d'aire, $\rho(x_1, y_1)$, de la couche matérielle fictive qu'on y conçoit étalée. Le premier type se rapporte au cas où les composantes horizontales, u, v, des déplacements sont nulles à la surface; la composante normale p_z de la pression extérieure y est, au contraire, quelconque, car elle vaut, en chaque point, le produit du facteur constant $4\pi\mu\dfrac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ par la fonction arbitraire $\rho(x, y)$. Le deuxième type, (14 *bis*), correspond au cas où les composantes horizontales tant des déplacements éprouvés à la surface, que de la pression extérieure qui s'y trouve exercée, égalent les dérivées respectives en x et y de deux fonctions des coordonnées x, y des divers points de cette surface : la composante normale p_z de la pression extérieure peut y être encore choisie à volonté, puisqu'elle est le produit de $4\pi\mu$ par $\rho(x, y)$. Enfin, le troisième type répond au cas où la surface n'éprouve ni déplacement vertical w, ni *dilatation* $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$, positive ou négative : les composantes verticales des déplacements et de la pression extérieure y sont nulles toutes les deux.

En superposant ces trois types d'intégrales, pris, chacun, avec un potentiel logarithmique relatif à une couche $\int dm$ différente, on obtiendra évidemment, pour u, v, w, un système plus complet de valeurs, qui contiendra trois fonctions arbitraires des coordonnées, x_1, y_1, de la surface, savoir, les densités des trois couches fictives ainsi imaginées. Or les intégrales générales cherchées du problème devaient précisément contenir trois fonctions arbitraires de ces coordonnées, pour qu'on pût se donner, aux divers points

de la surface, les valeurs de u ou de p_x, de v ou de p_y, de w ou de p_z.

4. *Cas où le sol ne supporte que des pressions (ou tractions) normales.* — On peut aussi combiner linéairement, de deux manières différentes, les deux premiers types, (14), (15) et (14 *bis*), (15 *bis*), pris avec un même potentiel ψ, pour en déduire deux autres types propres à remplacer ceux-là, et dans l'un desquels les composantes horizontales, p_x, p_y, de la pression extérieure s'annulent partout, tandis que, dans l'autre, la composante verticale p_z égale zéro, et les composantes horizontales p_x, p_y sont les deux dérivées en x et y d'une même fonction, contrairement à ce qui arrive pour le troisième type, (14 *ter*), (15 *ter*), où p_z est nul aussi, mais où p_x et p_y vérifient la relation $\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} = 0$, et non la condition d'intégrabilité $\frac{\partial p_x}{\partial y} = \frac{\partial p_y}{\partial x}$.

Bornons-nous ici à la première combinaison indiquée, qui résout le problème de l'équilibre d'un sol élastique horizontal supportant des pressions données, p_z, exclusivement verticales. Il suffit, pour l'obtenir, d'ajouter chacune à chacune les expressions (14) et (14 *bis*) de u, v, w, après avoir multiplié les premières, (14), par $\frac{1}{4\pi\mu}$, et les secondes, (14 *bis*), par $\frac{-1}{4\pi(\lambda+\mu)}$. En effet, les valeurs (15), (15 *bis*) de p_x, p_y, p_z s'ajouteront elles-mêmes, respectivement multipliées aussi, comme on voit, par ces mêmes facteurs constants, et l'on aura

$$(16) \qquad p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \rho(x, y).$$

Appelons P la pression totale (positive ou négative) exercée sur le sol et, par suite, $d\mathrm{P}$ la pression, $p_z d\sigma$, que supporte un élément quelconque $d\sigma$ de la surface. On voit, par la troisième équation (16), que l'élément $dm = \rho(x, y)\, d\sigma$, de la couche fictive par rapport à laquelle on prend le potentiel ψ, sera numériquement égal à la force extérieure $p_z d\sigma$ ou $d\mathrm{P}$, s'exerçant sur cet élément. Si donc on imagine que la pression P, éprouvée par la surface, soit due au poids d'une mince couche d'un sable très lourd, reposant sur cette surface, et si l'on convient de mettre, pour la masse de chaque grain de ce sable, son propre poids, que supporte entièrement la surface sous-jacente, *la matière par rapport à laquelle on devra prendre le potentiel ψ ne sera autre que cette couche elle-même, constituant la charge effective du sol.*

Comme on aura, de la sorte,

$$\psi = \int \log(z + r)\, d\mathrm{P}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \int \frac{d\mathrm{P}}{r}, \qquad z\frac{\partial \psi}{\partial z} = \int \frac{z}{r}\, d\mathrm{P} = \frac{\partial \int r\, d\mathrm{P}}{\partial z},$$

les valeurs trouvées pour les déplacements u, v, w seront :

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\partial^2 \int r\,d\mathrm{P}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\,\frac{\partial}{\partial x}\int \log(z+r)\,d\mathrm{P}\,,\\
v &= -\frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\partial^2 \int r\,d\mathrm{P}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\,\frac{\partial}{\partial y}\int \log(z+r)\,d\mathrm{P}\,,\\
w &= -\frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{\partial^2 \int r\,d\mathrm{P}}{\partial z^2} + \frac{2\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\int \frac{d\mathrm{P}}{r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Elles égalent — et on le savait d'ailleurs par avance — les sommes des déplacements élémentaires qu'on aurait observés si le sol n'avait eu à supporter à la fois qu'un seul des éléments $d\mathrm{P}$ de sa charge totale, c'est-à-dire si la pression extérieure s'était trouvée réduite à celle, $d\mathrm{P}$, qui s'exerce sur un élément $d\sigma = dx_1 dy_1$ de la surface, et qui est elle-même infiniment petite du second ordre comme le produit $dx_1 dy_1$.

Voyons donc ce que seraient ces valeurs de u, v, w les plus simples possibles, relatives au cas où les intégrales $\int \log(z+r)\,d\mathrm{P}$, $\int r\,d\mathrm{P}$, $\int \frac{d\mathrm{P}}{r}$ ne contiendraient que leur élément correspondant à l'élément unique, $d\sigma$, de la surface, sur lequel s'exercerait une pression (ou traction) donnée $d\mathrm{P}$. En prenant alors pour origine le point d'application de cette force extérieure, de manière à avoir simplement $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et en observant que les dérivées, en x, y, z, de r et de $\log(z+r)$ vaudront respectivement $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ et $\frac{x}{r(z+r)}$, $\frac{y}{r(z+r)}$, $\frac{1}{r}$, il viendra :

$$
(18) \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{x}{r(z+r)}\right] = \frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left(\frac{z}{r^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{r+z}\right)\frac{x}{r}\,,\\
v &= -\frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{y}{r(z+r)}\right] = \frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left(\frac{z}{r^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{r+z}\right)\frac{y}{r}\,,\\
w &= -\frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{r}\right] = \frac{d\mathrm{P}}{4\pi\mu}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on observe que $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$ peuvent s'écrire $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}$ et $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}$, on reconnaît que les déplacements produits par la pression élémentaire $d\mathrm{P}$ se font dans les plans verticaux menés suivant cette force, et de la même manière dans tous : ce qui était évident *à priori*. De plus, la composante *horizontale*, U, de ces déplacements, comptée positivement en s'éloignant de l'axe de symétrie (c'est-à-dire de la force $d\mathrm{P}$), et leur

composante verticale w, ont les valeurs

$$(19)\quad U=\frac{dP}{4\pi\mu}\left(\frac{z}{r^2}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r+z}\right)\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}},\qquad w=\frac{dP}{4\pi\mu}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r}+\frac{z^2}{r^3}\right).$$

Appelons α l'angle, toujours compris entre zéro et 90°, que le rayon r, mené de l'origine au point quelconque (x, y, z) du sol, fait avec la pression dP, ou, plus exactement, avec l'axe des z dirigé vers le bas. Nous aurons $z = r\cos\alpha$, et, si nous rappelons que

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},\quad \cos\alpha\sin\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2},\quad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha,$$

les valeurs précédentes de U, w deviendront aisément

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned} U&=\frac{dP}{4\pi\mu r}\left(\cos^2\alpha+\cos\alpha-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{dP}{8\pi\mu r}\left(\sin 2\alpha-\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right),\\ w&=\frac{dP}{4\pi\mu r}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2\alpha\right)=\frac{dP}{8\pi\mu r}\left(\frac{3\lambda+5\mu}{\lambda+\mu}+\cos 2\alpha\right).\end{aligned}\right.$$

L'enfoncement et la contraction qu'éprouvent des cercles concentriques ou conaxiques tracés, les uns, à la surface, autour du point pressé, les autres, à l'intérieur, sur des cônes de révolution ayant pour sommet ce point et pour axe la pression exercée, sont donc régis par des lois très simples, dont la première consiste dans leur proportionnalité inverse à la distance r au sommet. Le déplacement vertical w, partout de même sens que la force dP, est d'autant plus petit, à d'égales distances r du point d'application de cette force, que l'angle α est plus grand, ou qu'on est plus loin de la droite suivant laquelle elle s'exerce. Quant au déplacement horizontal U, il est nul sur cette dernière droite, par raison de symétrie, mais positif (quand la pression dP l'est elle-même), pour des valeurs assez peu grandes de α, c'est-à-dire dans la partie sous-jacente, la plus comprimée et qui, par suite, se détend dans les sens latéraux, comme on pouvait le prévoir. Cette partie se termine au cône qui a son sommet au point pressé et dont les génératrices font, avec son axe vertical, l'angle α pour lequel U s'annule, c'est-à-dire celui que définit l'équation

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned} &\cos^2\alpha+\cos\alpha-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=0,\\ \text{ou}\quad &\cos\alpha=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}}}.\end{aligned}\right.$$

Hors de ce cône, la matière est, au contraire, comme attirée par la pression dP : U s'y trouve négatif. Ainsi, à la surface, ou pour $\alpha = 90°$, des cercles concentriques tracés autour du point pressé éprouvent, vers ce point, un

retrait, — U, égal à $\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{dP}{r}$. En même temps, ces cercles s'enfoncent de la quantité $w=\frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{dP}{r}$.

Il est à peine nécessaire d'ajouter ici que les formules (18), (19), (20) ne s'appliqueraient plus si la distance, r, du point (x, y, z) à l'origine devenait comparable à $\sqrt{d\sigma}$, c'est-à-dire aux dimensions de la très petite surface $d\sigma$ sur laquelle s'exerce la pression considérée dP. En effet, dans ces formules, les intégrales $\int \log(z+r)\,dP$, $\int \frac{dP}{r}$, etc., sont supposées réductibles à un seul de leurs éléments, de sorte que dP est toujours censé y tendre vers zéro avant que r ne s'annule lui-même. Quand donc r devient comparable à $\sqrt{d\sigma}$, il faut décomposer $d\sigma$ en éléments infiniment plus petits encore, et calculer u, v, w par les formules générales (17). Comme tous les termes y sont comparables au quotient des diverses aires en lesquelles on aura décomposé $d\sigma$ par une distance de l'ordre de r ou de $\sqrt{d\sigma}$, les valeurs intégrales de u, v, w seront comparables à l'aire totale, $d\sigma$, divisée par $\sqrt{d\sigma}$, ou comparables aux dimensions de l'élément de surface $d\sigma$. Donc, les déplacements u, v, w produits par la force dP ne deviennent pas infiniment grands pour $r=0$, malgré le dénominateur r qui s'annule alors dans les formules (20) : c'est, au contraire, l'influence du numérateur dP qui l'emporte dans ces expressions et qui les rend infiniment petites même en ce point.

Si les formules (18) ou (20) doivent être remplacées par les expressions plus complexes (17) quand le point (x, y, z) n'est distant de la région d'application $d\sigma$ que de quantités comparables aux dimensions de cette région, il est clair, à l'inverse, que dans le cas où la région d'application σ des actions extérieures sera finie, mais où l'on ne considérera que des points (x, y, z) assez éloignés de cette région, les formules simples (20) pourront être substituées, sans erreur sensible, aux expressions (17), sauf à changer dP en $\int dP$ ou P : en d'autres termes, on pourra supposer tous les éléments dP de la *charge* réunis en un même point, lorsque cela reviendra à ne les déplacer que très peu par rapport à la distance où ils sont des parties du sol dont on étudie les déplacements.

5. *Des formes que prend la surface, quand une certaine pression totale s'y exerce à l'intérieur d'une région déterminée, où on la répartit de différentes manières.* — Le plus important des résultats trouvés ci-dessus paraît être celui qui concerne la forme prise par la surface du sol, c'est-à-dire les enfoncements w produits, aux divers points (x, y) de cette surface, par une charge, $\int dP$, qui s'y trouve distribuée comme on voudra. Ces enfoncements sont égaux à $\frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{dP}{r}$ lorsqu'il n'y a qu'un seul élément dP de charge, déposé à une distance r du point (x, y), et ils vaudraient, par

suite,

$$(22) \qquad w = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \int \frac{dP}{r}$$

pour une charge quelconque. Dans un mémoire étendu, sur le sujet qui nous occupe, terminé depuis le mois de juin 1879 et qui, je l'espère, paraîtra prochainement au *Journal de mathématiques pures et appliquées* ou en un volume distinct, j'ai effectué le calcul de w pour un certain nombre de cas. Je me contenterai d'indiquer ici les résultats les plus intéressants auxquels je suis parvenu (*).

1° Voici, d'abord, l'enfoncement, w, que produit, à la distance $\mathfrak{r}$ d'un point donné de la surface, une pression dP, répartie uniformément sur toute la bande annulaire comprise entre deux cercles décrits, autour de ce point donné comme centre, avec des rayons infiniment peu différents, R et R $+ d$R. Il est exprimé par la formule

$$(23) \left\{ \begin{aligned} w &= \frac{(\lambda + 2\mu)\, dP}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{\mathfrak{r}^2 - R^2 \sin^2\omega}} \\ &= \frac{(\lambda + 2\mu)\, dP}{4\pi\mu(\lambda + \mu)\mathfrak{r}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{R^2}{\mathfrak{r}^2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{R^4}{\mathfrak{r}^4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \frac{R^{2n}}{\mathfrak{r}^{2n}} + \ldots \right], \end{aligned} \right.$$

quand le point où a lieu cet enfoncement w se trouve en dehors de la *circonférence d'application* de la pression dP, c'est-à-dire quand on a $\mathfrak{r} > R$; et il est exprimé par une formule analogue, où $\mathfrak{r}$ et R échangeraient simplement leurs rôles, quand, au contraire, le point considéré se trouve situé à l'intérieur de la circonférence d'application, ou que $\mathfrak{r}$ est $<$ R. Ainsi, étant tracées sur la surface deux circonférences concentriques, l'une de rayon $\mathfrak{r}$, l'autre de rayon R, l'enfoncement produit sur la première, par l'effet d'une pression dP répartie uniformément le long de la seconde, égale l'enfoncement produit sur la seconde par une même pression dP répartie uniformément le long de la première (**).

2° Quand une pression finie, égale en tout à 1 ou prise pour unité, s'exerce sur une région d'application circulaire de rayon R_1 et se trouve distribuée pareillement tout autour du centre, de manière que sa valeur, par unité d'aire, à une certaine distance R de celui-ci, soit une fonction de la forme $\rho = f(R^2)$, cette pression est décomposable en parties $dP = 2\pi\rho\, R dR$

(*) Dans le même mémoire, intitulé *Recherches sur l'application des potentiels à la théorie de l'équilibre intérieur des solides élastiques, etc.*, le lecteur trouvera, entre autres choses que je n'ai pu détailler ici, une étude des potentiels direct et logarithmique à trois variables, bien plus complète que celle du n° 2.

(**) J'ai reconnu qu'un fait analogue se produit pour une plaque circulaire mince, horizontale, appuyée ou encastrée sur tout son contour, et que sollicitent deux charges égales, réparties uniformément, chacune, tout le long d'une circonférence concentrique au contour : l'abaissement (ou la flèche) que cause l'une de ces charges, aux points où est appliquée l'autre, égale l'abaissement provenant de celle-ci aux points que sollicite la première. Cette curieuse loi de réciprocité, qui établit un singulier rapprochement entre une plaque mince et un sol d'épaisseur indéfinie, résulte, comme il a été dit à une sous-note de la page 364 ci-dessus, des formules (d''') et (e''') du n° 17 de la Note du § 45, page 360, dans lesquelles on néglige les termes en γ^2.

s'exerçant sur des bandes annulaires infiniment étroites et dont les effets se superposent. L'enfoncement w, produit à une distance $\mathfrak{r}$ du même centre, se calcule donc par des formules qui se déduisent de (23) et qui sont les suivantes :

(24) (pour les points intérieurs au cercle d'application, ou pour $\mathfrak{r} < R_1$)

$$w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\int_{R=\mathfrak{r}}^{R=0} \frac{\rho}{\sin^2\omega}\, d\sqrt{\mathfrak{r}^2 - R^2\sin^2\omega} + \int_{R=\mathfrak{r}}^{R=R_1} \rho\, d\sqrt{R^2 - \mathfrak{r}^2\sin^2\omega} \right];$$

(24 *bis*) (pour les points extérieurs à ce cercle, ou pour $\mathfrak{r} > R_1$)

$$w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sin^2\omega} \int_{R=R_1}^{R=0} \rho\, d\sqrt{\mathfrak{r}^2 - R^2\sin^2\omega}\,.$$

Quand $\rho = f(R^2)$ est une fonction entière de R^2, chaque intégration par rapport à R se fait de suite, en y adoptant le radical $\sqrt{\mathfrak{r}^2 - R^2\sin\omega^2}$ ou $\sqrt{R^2 - \mathfrak{r}^2\sin^2\omega}$ comme variable; et, si l'on développe, par la formule du binôme, les radicaux que contiennent les résultats, l'intégration par rapport à ω s'effectue elle-même en série convergente. Mais on pourrait encore obtenir w en série par des intégrations directes, convenablement effectuées, terme à terme, sur le troisième membre de (23) ou sur l'expression analogue qui s'en déduit en permutant $\mathfrak{r}$ et R.

La moyenne des valeurs de w dans toute la région d'application et la valeur de w sur le bord de cette région sont données par les formules

(24 *ter*)

$$\text{Moy. de } w \text{ (dans cer. } \pi R_1^2) = \frac{2(\lambda+2\mu)R_1}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1-\cos^2\omega} \int_{\cos\omega}^{1} f\left(R_1^2 \frac{1-\alpha^2}{1-\cos^2\omega}\right)\alpha^2 d\alpha,$$

$$(\text{Pour } \mathfrak{r} = R_1) \qquad w = \frac{(\lambda+2\mu)R_1}{\pi\mu(\lambda+\mu)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1-\cos^2\omega} \int_{\cos\omega}^{1} f\left(R_1^2 \frac{1-\alpha^2}{1-\cos^2\omega}\right) d\alpha,$$

expressions exactement intégrables sous forme finie, toutes les fois que f est une fonction entière.

3° Quand ρ ou $f(R^2) = \frac{1}{\pi R_1^2}$, c'est-à-dire quand la pression totale se trouve uniformément répartie sur toute l'étendue du cercle donné, de rayon R_1, les valeurs de w sont :

(25) (pour $\mathfrak{r} < R_1$)

$$w = \frac{\lambda+2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\mathfrak{r}^2}{R_1^2}\sin^2\omega\right)^{\frac{1}{2}} d\omega$$

$$= \frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{R_1} \left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\mathfrak{r}^2}{R_1^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\mathfrak{r}^4}{R_1^4} - \cdots \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \frac{\mathfrak{r}^{2n}}{R_1^{2n}} - \cdots \right];$$

$$(25\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &\text{(pour } v > R_1) \\ w &= \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{R_1^2 \sin^2\omega}{v^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \frac{v^2 d\omega}{R_1^2 \sin^2\omega} \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{v} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{R_1^2}{v^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{R_1^4}{v^4} + \dots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) \frac{R_1^{2n}}{v^{2n}} + \dots\right]. \end{aligned} \right.$$

Au centre et au bord de la région d'application, ces formules donnent :

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\text{(pour } v = 0) \qquad w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \frac{\pi}{2R_1}, \\ &\text{(pour } v = R_1) \qquad w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{R_1}. \end{aligned} \right.$$

La valeur moyenne de w dans toute la région d'application est, d'ailleurs,

$$(26\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &\text{(pour } v < R_1) \\ &\text{valeur moyenne de } w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \frac{4}{3R_1}. \end{aligned} \right.$$

Donc, une distribution uniforme de la pression sur toute l'étendue d'un cercle fait prendre à ce cercle une forme concave, dans laquelle la *flèche*, c'est-à-dire l'excès de l'enfoncement du centre sur celui du bord, vaut la fraction $1 - \frac{2}{\pi}$ $\left(\text{ou environ } \frac{9}{25}\right)$ de l'enfoncement même du centre, et la fraction $\frac{\pi}{2} - 1$ $\left(\text{ou environ } \frac{3}{5}\right)$ de l'enfoncement du bord.

Comme $\frac{4}{3}$ ou $1,3333\dots$ dépasse $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = 1,2854\dots$ du $\frac{1}{28}$ environ de sa valeur, l'enfoncement moyen (26 *bis*) est un peu supérieur à la moyenne des deux enfoncements au centre et sur le bord, moyenne qui exprimerait sa valeur si l'on assimilait à la forme d'un paraboloïde celle que prend alors, en se creusant, la région d'application des forces.

4° Quand p ou $f(R^2) = \frac{2}{\pi R_1^4}(R_1^2 - R^2)$, c'est-à-dire quand la pression, maxima au centre, est distribuée paraboliquement, le long des rayons émanés du centre, jusqu'au bord du cercle $R = R_1$, où elle s'annule, l'en-

foncement w s'exprime par les formules suivantes :

(pour $r < R_1$)

$$(27)\quad \begin{cases} w = \dfrac{4(\lambda+2\mu)}{3\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{1}{R_1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\dfrac{r^2\sin^2\omega}{R_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}d\omega \\ = \dfrac{2(\lambda+2\mu)}{\pi\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{1}{R_1}\left[\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\dfrac{r^2}{R_1^2}+\dfrac{1}{1.3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\right)^2\dfrac{r^4}{R_1^4}+\dfrac{1}{3.5}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\right)^2\dfrac{r^6}{R_1^6}+\dots\right. \\ \left.+\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2\dfrac{r^{2n}}{R_1^{2n}}+\dots\right], \end{cases}$$

(pour $r > R_1$)

$$(27\ bis)\quad \begin{cases} w = \dfrac{4(\lambda+2\mu)}{3\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{3}{2}\dfrac{R_1^2\sin^2\omega}{r^2}-1+\left(1-\dfrac{R_1^2\sin^2\omega}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\dfrac{r^4 d\omega}{R_1^4\sin^4\omega} \\ = \dfrac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{R_1^2}{r^2}+\dfrac{1}{3.4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\right)^2\dfrac{R_1^4}{r^4}+\dots\right. \\ \left.+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2\dfrac{R_1^{2n}}{r^{2n}}+\dots\right]. \end{cases}$$

Au centre et au bord de la région d'application, ces formules se réduisent à celles-ci :

$$(28)\quad \begin{cases} (\text{pour } r=0) \quad w = \dfrac{\lambda+2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\,\dfrac{2\pi}{3R_1}, \\ (\text{pour } r=R_1) \quad w = \dfrac{\lambda+2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\,\dfrac{8}{9R_1}. \end{cases}$$

La première relation (24 *ter*) donne, en même temps,

$$(28\ bis)\quad \begin{cases} (\text{pour } r<R_1) \\ \text{Valeur moyenne de } w = \dfrac{16}{15}\,\dfrac{\lambda+2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\,\dfrac{4}{3R_1}. \end{cases}$$

Donc, quand la pression varie paraboliquement du centre au bord de la région d'application, en s'annulant sur le bord, la forme prise par cette région devient plus concave que dans le cas d'une distribution uniforme, ainsi qu'on pouvait le prévoir. La flèche de la concavité est à celle qui se serait produite pour une distribution uniforme dans le rapport $\dfrac{\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}}{\frac{\pi}{2}-1}=2{,}112.$

La profondeur totale w du creux égale, au centre, les $\frac{4}{3}$ de ce qu'elle était

lors d'une distribution uniforme, et se trouve au contraire, sur le bord, un peu moindre que dans ce cas, savoir les $\frac{8}{9}$ de ce qu'elle y était. Aussi, d'après les formules (26 *bis*) et (28 *bis*), l'enfoncement moyen, dans tout le cercle πR_1^2, ne dépasse-t-il que d'un quinzième sa valeur relative au cas d'une distribution uniforme.

Du bord au centre, w grandit respectivement, pour la distribution uniforme et pour la distribution parabolique, dans les rapports de 4 à 2π et de 4 à 3π.

5° En ajoutant les deux expressions précédentes de ρ, $\rho = \frac{1}{\pi R_1^2}$ et $\rho = \frac{2}{\pi R_1^4}(R_1^2 - R^2)$, ainsi que les valeurs correspondantes (25) et (27), (25 *bis*) et (27 *bis*), (26) et (28), (26 *bis*) et (28 *bis*) de w, après les avoir multipliées respectivement par deux constantes $1-k$ et k dont la somme vaille 1, on obtient de nouveaux modes de répartition dans lesquels, la charge totale étant toujours 1, la partie $1-k$ de cette charge est distribuée uniformément, et l'autre partie, k, paraboliquement avec décroissance du centre au bord.

Le plus intéressant de ces modes est celui pour lequel on a $k = -1$, $\rho = \frac{2R^2}{\pi R_1^4}$, c'est-à-dire où la pression, nulle au centre, croît paraboliquement le long des rayons, jusqu'à la distance R_1 tout autour. Alors, on trouve pour w, en séries convergentes, les valeurs générales

$$(29)\quad \begin{cases} \text{(pour } r < R_1) \\ w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{R_1^2} - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{r^4}{R_1^4} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{r^6}{R_1^6} - \dots \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{2n-3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\frac{r^{2n}}{R_1^{2n}} - \dots\right], \end{cases}$$

$$(29\ bis)\quad \begin{cases} \text{(pour } r > R_1) \\ w = \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{R_1^2}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{R_1^4}{r^4} + \dots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\frac{R_1^{2n}}{r^{2n}} + \dots\right]; \end{cases}$$

tandis que, au centre et au bord de la région d'application, il vient simplement

$$(30)\quad \begin{cases} \text{(pour } r = 0) \quad w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\frac{\pi}{3R_1}, \\ \text{(pour } r = R_1) \quad w = \frac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\frac{10}{9R_1}. \end{cases}$$

L'abaissement moyen éprouvé par cette région est

(50 *bis*) $\left\{ \begin{array}{c} (\text{pour } \varepsilon < R_1) \\ \text{valeur moyenne de } w = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)} \dfrac{56}{45R_1}. \end{array} \right.$

Comme $\frac{\pi}{3} = 1,0472...$ et que $\frac{10}{9} = 1,1111...$, la profondeur de la dépression est, au centre, un peu plus faible qu'au bord de la région d'application; en sorte que l'influence du plus grand nombre des pressions, dP, qui agissent de près sur le centre pour l'abaisser, est largement compensée par leurs faibles valeurs. La différence entre ces deux profondeurs n'égale que la fraction $\dfrac{\frac{10}{9} - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2} - 1} = 0,1119...$, ou $\frac{1}{9}$ environ, de ce qu'elle serait pour un mode de distribution uniforme : aussi, la surface directement comprimée s'écarte-t-elle beaucoup moins de la forme plane, lors d'une distribution parabolique croissante du centre au bord, que lors d'une répartition égale. Toutefois, *au dedans de la région d'application et à une faible distance du bord, w est un peu plus grand qu'au bord même; et ce fait s'étend à toute région d'application, limitée par un contour convexe sur lequel la pression par unité d'aire est finie.* Donc, dans la distribution parabolique dont il s'agit, la surface comprimée ne reste pas absolument plane; mais elle se creuse sensiblement sur le pourtour et se bombe vers le milieu.

Effectivement, la valeur moyenne de w dans toute l'étendue de la région d'application est, aux valeurs de w sur le contour et au centre de la même région, dans les rapports de $\frac{56}{45} = 1,2444...$ à $\frac{10}{9} = 1,1111..$ et à $\frac{\pi}{3} = 1,0472..$ L'excès de cette moyenne sur l'abaissement du centre vaut la fraction $\dfrac{1,2444 - 1,0472}{1,2444}$ ou environ $\frac{1}{6}$ de l'abaissement moyen lui-même, ce qui prouve bien qu'on est, encore, assez loin de la forme plane.

6° Quand on veut que le cercle d'application des pressions extérieures ne cesse pas, tout en s'abaissant, d'être plan et horizontal, il faut disposer la charge donnée, qui vaut 1 en tout, d'après la formule

(31) $$\rho \text{ ou } f(R^2) = \frac{1}{2\pi R_1 \sqrt{R_1^2 - R^2}};$$

en d'autres termes, il faut la distribuer uniformément sur toute la surface d'une demi-sphère ayant pour base le cercle effectif d'application, et concevoir ensuite que chaque portion de la charge ainsi répartie soit déposée sur le sol à l'endroit où elle se projette verticalement. L'expression de w est

$$(32)\qquad (\text{pour } \varepsilon < R_1)\quad w = \frac{\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1} = \frac{\lambda+2\mu}{\pi^2\mu(\lambda+\mu)}\frac{\pi^2}{8R_1},$$

$$(32\ bis)\qquad (\text{pour } \varepsilon > R_1)\quad w = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{R_1}\ \text{arc sin}\ \frac{R_1}{\varepsilon}.$$

Comme $\frac{\pi^2}{8} = 1,2337..$, et que $\frac{4}{3} = 1,3333....$, l'abaissement w commun à toute la région comprimée est légèrement inférieur, du $\frac{1}{12}$ environ de sa valeur, à la moyenne (26 *bis*) des enfoncements qu'on aurait observés dans toute cette région lors d'une distribution uniforme de la charge.

7° Plus généralement, si la région d'application est une ellipse, et qu'on demande un mode de distribution pour lequel cette région reste plane et horizontale, il suffit de disposer la charge, sur toute l'aire convexe d'un demi-ellipsoïde ayant cette ellipse pour base et pour section principale, proportionnellement à la distance, en chaque point, de cet ellipsoïde à un autre infiniment voisin, concentrique, semblable et semblablement placé, puis d'appliquer chaque portion de la charge ainsi répartie sur l'endroit du sol où elle se projette verticalement. L'équation de l'ellipse étant, par exemple, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on trouve

$$(33)\qquad \rho = \frac{1}{2\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Un système quelconque de parallèles équidistantes divise l'ellipse en bandes également chargées quoique d'aires fort inégales.

L'expression correspondante de w est,

(34) 1°, pour les points (x, y) intérieurs à l'ellipse donnée,

$$w = \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\int_0^\infty \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2+\nu^2)(b^2+\nu^2)}},$$

(34 *bis*) 2°, pour les autres points de la surface du sol,

$$w = \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\int_\nu^\infty \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2+\nu^2)(b^2+\nu^2)}},$$

expression où la limite inférieure ν de l'intégrale égale la racine positive de l'équation

$$(35)\qquad \frac{x^2}{a^2+\nu^2} + \frac{y^2}{b^2+\nu^2} = 1.$$

8° Une remarque générale, à laquelle on est conduit par les résultats précédents et par quelques autres encore que l'on trouvera dans le mémoire indiqué, c'est que des pressions données, s'exerçant sur le sol ou sur la surface d'un corps à l'intérieur d'une aire définie, sont loin d'imprimer à leurs points d'application des déplacements ayant entre eux, aux divers en-

droits, les mêmes rapports que ces pressions, contrairement à une hypothèse qu'on fait quelquefois. Par exemple, pour une répartition uniforme, nous avons trouvé des enfoncements décroissant, du centre au bord, dans le rapport de 8 à 5 environ. Pour le cas (réciproque) d'un enfoncement uniforme, la pression exercée sur l'unité d'aire a grandi, du centre au bord, dans les proportions, bien plus grandes encore, qu'indique la formule (31), savoir de $\frac{1}{2\pi R_1^2}$ à ∞. Et quand on admet que la pression décroît paraboliquement depuis le centre jusqu'au bord, où elle s'annule, l'enfoncement w décroît aussi, mais seulement dans le rapport de 3π à 4 ou de 12 à 5 environ, non jusqu'à zéro. Il n'y a donc pas même une proportionnalité approchée, aux divers points, entre la pression par unité d'aire, $\frac{dP}{d\sigma}$ ou ρ, et le déplacement éprouvé w. Du reste, une telle proportionnalité exigerait l'annulation de w immédiatement au dehors de la région d'application, là où w, exprimé comme ailleurs par $\frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\int\frac{dP}{r}$, est presque aussi grand que sur le bord même.

6. *Comment se distribue la pression exercée à la surface, lorsqu'elle est produite par le contact d'un corps dur de forme connue.* — J'ai supposé, dans le numéro précédent, qu'on se donnait les pressions exercées aux divers points de la surface et qu'on cherchait la forme et la position prises par celle-ci ou, ce qui revient au même, les déplacements w qu'éprouvent tous ses points dans le sens qui lui est normal. Mais, comme il a été dit au n° 5 (p. 383), le problème de l'équilibre ne serait pas moins déterminé, si l'on se donnait, sur des parties désignées quelconques de la surface, le déplacement w au lieu de ρ ou p_3. Supposons, par exemple, qu'on demande de faire acquérir à la région comprimée, pour ordonnées verticales w, celles qu'expriment les formules (24), (25), (27), (29), (32), (34) : alors les pressions exercées, p_3 (par unité d'aire), devront nécessairement être prises égales aux valeurs correspondantes de ρ,

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho = f(R^2), &\quad = \frac{1}{\pi R_1^2}, \quad = \frac{2(R_1^2 - R^2)}{\pi R_1^4}, \quad = \frac{2R^2}{\pi R_1^4}, \\ &= \frac{1}{2\pi R_1\sqrt{R_1^2 - R^2}}, \quad = \frac{1}{2\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, se donner w sur toute la surface comprimée, c'est se donner à la fois : 1° le déplacement vertical de l'un des points, comme, par exemple, l'enfoncement w_0 éprouvé par le centre, 2° et, de plus, l'excédant $w_0 - w$, lequel définit la forme, ainsi que l'orientation (ou mieux les deux inclinaisons suivant les x et les y), prises par la surface.

Imaginons actuellement que l'on connaisse, d'une part, la pression totale

exercée P, d'autre part, la forme et les inclinaisons que doit recevoir la surface comprimée, c'est-à-dire l'excès (positif ou négatif), $w_0 - w$, de l'abaissement du centre sur celui de tout autre point, et que l'on demande le mode de distribution de la pression P ainsi que l'abaissement w_0 du centre. On cherchera d'abord quelles pressions p_z, positives ou négatives, produiraient, aux divers points de la région d'application donnée, des enfoncements égaux à $w - w_0$; problème déterminé, comme on vient de voir. Soit P_0 la somme des pressions ainsi définies, qui donnent à la région comprimée la forme et les pentes qu'on veut qu'elle prenne, mais sans déplacer aucunement son centre. En retranchant de la pression donnée P cette somme P_0, on sera évidemment ramené, vu la forme linéaire des équations, à un problème plus simple, où il s'agira de répartir ou d'employer la pression en excédant, $P - P_0$, sur la région d'application donnée, de manière à imprimer à celle-ci des déplacements ayant leur composante verticale w_0 constante dans toute son étendue (puisque les différences $w_0 - w$ auront déjà acquis leurs valeurs définitives). Or ce nouveau problème est également déterminé, par le fait même qu'il l'est dans le cas inverse où l'on se donne w_0 et où l'on cherche $P - P_0$. En effet, vu encore la forme linéaire des équations, les déplacements u, v, w en tous les points du corps, ainsi que leurs dérivées, et, par suite, les valeurs de p_x, p_y, p_z, varieront partout dans un même rapport quelconque, si l'on fait grandir ou décroître dans ce rapport le déplacement w sur la partie de la surface où on se le donne, c'est-à-dire si l'on fait varier arbitrairement w_0; et il n'y a qu'une valeur de w_0 pour laquelle la pression totale correspondante égale $P - P_0$.

Ainsi, quand on connaît la forme et la disposition que doit prendre la surface comprimée, ainsi que la grandeur de la pression totale exercée, le problème n'admet encore qu'une solution; et il se dédouble en deux plus simples, dans lesquels on se donnerait l'abaissement w éprouvé par chaque point de la région d'application.

Or ce problème est justement celui qui se présente quand on demande comment doit se distribuer, entre les divers points de sa base d'appui, le poids d'un corps dur et poli, posé sur un sol élastique horizontal, ou comment un tel corps, modérément poussé par une force normale contre un solide élastique de dimensions beaucoup plus grandes que les siennes, presse ce dernier aux divers endroits de la surface de contact. En effet, dans l'un et l'autre cas, la base du corps dur conserve sensiblement sa forme (donnée) et la région directement comprimée du sol ou du corps élastique, bien plus flexible par hypothèse, se moule sur cette base. De plus, à cause du poli supposé, ou de l'absence de frottements, les pressions supportées par le sol ou corps élastique lui sont normales, c'est-à-dire se réduisent à la composante p_z; et l'on connaît, en somme, la pression totale exercée, tant en grandeur qu'en position, ainsi que la forme prise par la surface de contact. Nous admettons, pour plus de simplicité, dans la figure que forment la surface de contact et le point d'application de la pression P, une symétrie suffisante pour qu'il n'y ait à s'occuper d'aucune rotation, c'est-à-dire pour que le

mode d'inclinaison ou de disposition de la surface de contact soit parfaitement connu (*).

Donc, en traitant la question abordée ici, on se trouvera avoir résolu, pour les cas les plus simples et par conséquent les plus intéressants, le célèbre problème de philosophie naturelle relatif aux pressions qu'exercent l'un sur l'autre deux corps en contact, ou relatif, notamment, à la manière dont le poids d'un corps, supporté par un sol horizontal, se distribue entre les divers éléments de sa base d'appui, problème posé depuis un siècle par d'Alembert et Euler, mais qui, à ma connaissance, avait résisté jusqu'à ce jour aux efforts des géomètres.

Si, en particulier, la pression totale P vaut un (ou est choisie pour unité) et que la formule donnée de $w-w_0$, définissant la forme que prend sa surface d'application primitivement plane, se trouve être une de celles qui ont été calculées au n° précédent et auxquelles correspondent les expressions (24), (25), (27), (29), (32), (34) de w, ou des combinaisons linéaires de celles-là, les modes cherchés de répartition de la pression seront forcément ceux qu'expriment les valeurs de ρ prises alors pour point de départ et reproduites dans la formule (36), ou des combinaisons linéaires de ces valeurs : la pression s'y trouvera donc distribuée, suivant les cas, uniformément, paraboliquement, etc.

Par exemple, quand un disque circulaire solide, posé sur un sol horizontal élastique, reçoit des poids dont la résultante (y compris le sien propre) passe par son centre, la base de ce disque exerce sur le sol des pressions réparties d'après la formule (31) : la *charge* s'y distribue de telle manière que, si, d'un point situé à une distance infinie au-dessus du disque, on la regarde se projeter, en perspective, sur une calotte demi-sphérique ayant pour base la base même du disque, elle sera uniformément répartie à la surface de la calotte. La pression *par unité d'aire* croît donc quand on passe du centre du cercle de contact à sa circonférence, où elle deviendrait même infinie si le disque n'y fléchissait pas et que les limites d'élasticité du sol n'y fussent pas dépassées. Il ne saurait en être autrement dans l'hypothèse d'une parfaite horizontalité conservée par le sol jusqu'au bord même du disque ; car, d'après ce qui a été dit un peu après la formule (30 *bis*) p. 395, il suffit, pour toute forme convexe du contour de la région d'application, que la pression p_z ou ρ (par unité d'aire) reste finie sur ce contour pour que l'enfoncement w diminue à mesure qu'on en

(*) S'il n'en était pas ainsi, l'expression de $w_0 - w$ comprendrait, outre une partie connue, dépendant de la forme du corps dur en contact avec le solide élastique, un binôme tel que $py - qx$, correspondant à deux des trois petites rotations inconnues qu'éprouverait ce corps autour des trois axes, savoir, aux deux rotations p, q, effectuées autour des axes des x et des y parallèles à la surface. Et ces deux inconnues p, q, qui fixent les *inclinaisons* de la base, se détermineraient par les conditions que le point d'application de la résultante P eût ses deux coordonnées x, y égales à deux quantités connues.

En résumé, l'expression de w contient une partie, $w_0 + qx - py$, que ne définit pas la forme du corps dur, et qui, variant avec la force P, dépend bien des trois constantes arbitraires qu'il faut pour qu'on puisse se donner à volonté cette force en grandeur et en position.

approche, lorsqu'on est sur le point de l'atteindre en venant de l'intérieur. Donc, la forme plane exigerait, pour être maintenue jusqu'au bord même, une pression (exercée par l'arête vive) supérieure à toutes celles que peuvent comporter les degrés de résistance du sol élastique et du disque placé au-dessus. En réalité, celui-ci y fléchit sensiblement, sur une largeur d'autant plus petite que le corps est plus dur en comparaison du sol, et, par le fait même, les pressions, rapportées à l'unité d'aire, y sont bien moindres que ne l'indique la formule (31). Il y a donc, sur le contour, une zone étroite, ne supportant de toutes manières [même avec le mode de distribution (31)] qu'une fraction insignifiante du poids total et, par suite, sans influence appréciable en dehors d'elle, où les pressions sont réparties autrement que d'après cette formule simple (31). Bien loin d'y grandir jusqu'à l'infini, la pression par unité d'aire y tend au contraire vers zéro à mesure qu'on s'approche du bord, puisqu'elle est nulle dès qu'on sort de la surface de contact.

Une telle zone, siège de *perturbations locales* ou d'un état spécial plus complexe que celui de l'ensemble, s'observe aux limites de la région d'application, toutes les fois que la pression p_z se trouverait y passer brusquement, sans ces perturbations, d'une valeur plus ou moins considérable à la valeur nulle qu'elle a hors du contour. L'ingénieur et le physicien en observent, du reste, d'analogues dans une infinité de cas, par exemple aux extrémités des tiges et sur le bord des plaques, là où l'état physique varie aussi rapidement dans le sens des grandes dimensions que dans le sens des petites (contrairement à ce que suppose, au fond, la théorie classique de ces corps).

7. *Équilibre d'élasticité d'un solide indéfini, sollicité dans une certaine étendue par des forces extérieures données.* — Revenons maintenant aux deux types d'intégrales (14) et (14 *bis*), auxquels nous devons tous les résultats précédents, et rattachons-les à un type unique, plus général, qui nous conduise à la solution d'autres problèmes. Si nous observons que $z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ ou $z\displaystyle\int\frac{dm}{r}$ n'est autre chose que $\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int r\,dm$, et aussi, comme nous l'avons vu dans la première partie du n° 2, que $\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ ou $\displaystyle\int\frac{dm}{r}=\frac{1}{2}\Delta_2\int r\,dm$, les équations (14) pourront s'écrire

$$(37)\quad u=-\frac{\partial^2\displaystyle\int r\,dm}{\partial x\,\partial z},\quad v=-\frac{\partial^2\displaystyle\int r\,dm}{\partial y\,\partial z},\quad w=-\frac{\partial^2\displaystyle\int r\,dm}{\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\Delta_2\int r\,dm,$$

et elles seront de la forme

$$(38)\qquad u=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z},\quad v=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},\quad w=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\Delta_2\varphi,$$

où φ désignera le potentiel direct $\displaystyle\int r\,dm$. Quant au second type, (14 *bis*), il

est aussi compris dans la même forme (38), mais en y posant

(38 *bis*) $$\varphi = \int [r - z \log(z+r)]\, dm,$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \frac{x - x_1}{r + z} dm\ ,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \frac{y - y_1}{r + z} dm\ ,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \int \log(z+r) dm = -\psi\ ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \int \frac{dm}{r} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\ ,$$

et en observant que le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2 \varphi$ est alors nul. Par suite, toute combinaison linéaire des deux types (14) et (14 *bis*), par exemple, le type (17), rentre encore dans la même forme (38).

Voyons donc, en appelant φ une fonction *quelconque* de x, y, z, ce que deviennent les équations indéfinies les plus générales de l'équilibre d'un solide isotrope et homogène,

(39) $$(\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u + X = 0,\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta_2 v + Y = 0,\ (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta_2 w + Z = 0,$$

où X, Y, Z désignent les composantes de l'action extérieure s'exerçant *sur l'unité de volume*, quand on y porte les valeurs (38) de u, v, w. Ces valeurs donnent d'abord

(40) $$\theta \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z}\ ;$$

et elles transforment ensuite, immédiatement, les équations (39) en celles-ci

(41) $$X = 0\ ,\quad Y = 0\ ,\quad Z = -\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Delta_2 \Delta_2 \varphi\ .$$

Donc, *les expressions* (38) *de u, v, w satisfont aux équations indéfinies de l'équilibre, pourvu qu'il s'exerce sur la masse du corps, par unité de volume, des forces extérieures parallèles à l'axe des z et égales en chaque point à* $-\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Delta_2 \Delta_2 \varphi$.

Si l'on prend pour φ, comme dans le premier type (37), le potentiel direct $\int r dm$, relatif à une matière fictive $\int dm$, mais en supposant celle-ci disséminée dans un espace fini à trois dimensions, avec une densité $\rho\,(x, y, z)$ au point quelconque (x, y, z), et non plus étalée en couche mince sur le plan des xy, l'expression $\Delta_2 \Delta_2 \varphi$ vaudra $-8\pi\rho(x, y, z)$, d'après ce qu'on a vu dans la première partie du nº 2, et l'on aura

$$Z = 8\pi\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \rho\,(x, y, z)\ ;$$

en sorte que cette force Z pourra être une fonction arbitraire de x, y, z, pourvu qu'on prenne pour la densité $\rho\,(x, y, z)$ de la masse fictive l'expression $\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{Z}{8\pi\mu}$. Par suite, la partie, dm, de cette masse, qui remplit un vo-

lume élémentaire quelconque $d\varpi$ de l'espace, égalera le produit du facteur constant $\frac{1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}$ par la force extérieure $Zd\varpi = dF$ effectivement appliquée à la partie du corps occupant le même élément de volume.

En résumé, *quand un corps élastique est sollicité, dans une certaine partie de sa masse, par une action extérieure*, F, *composée de forces élémentaires* dF *parallèles à l'axe des* z, *si l'on appelle*

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

les distances d'un point quelconque (x, y, z) *de l'espace aux divers points d'application donnés* (x_1, y_1, z_1) *de ces forces* dF, *on aura des expressions des petits déplacements* u, v, w *qui satisferont aux équations indéfinies de l'équilibre en prenant, vu les formules* (37) *où* $\Delta_2 \int r dm = 2\int \frac{dm}{r}$,

$$(42)\quad u = \frac{-1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 \int r dF}{\partial x \partial z},\quad v = \frac{-1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 \int r dF}{\partial y \partial z},\quad w = \frac{-1}{8\pi\mu}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 \int r dF}{\partial z^2} + \frac{1}{4\pi\mu}\int \frac{dF}{r}.$$

Or, *ces expressions vérifient également les conditions, aux limites, qu'on a dans le cas d'un solide indéfini dont les points infiniment éloignés seraient maintenus fixes*. En effet, on verrait, en raisonnant comme il a été fait au commencement du n° 3, que ces conditions reviennent à prendre u, v, w de l'ordre de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ aux très grandes distances $\mathfrak{r}$ de l'origine. Et c'est justement ce qui a lieu avec les expressions (42), lesquelles, ne contenant sous les signes $\int$ que des dérivées partielles secondes de r en x, y, z, sont du degré -1 par rapport à $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, car r est homogène du premier degré en $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, et, par suite, ses dérivées premières sont aussi homogènes, mais du degré zéro, et ses dérivées secondes, homogènes du degré -1. Enfin, comme le procédé de démonstration indiqué après les formules (13) prouve que cet ensemble de conditions, soit indéfinies, soit aux limites, détermine complètement u, v, w, *les formules* (42) *sont bien celles qui résolvent le problème de l'équilibre d'un solide indéfini, sollicité dans sa masse par des forces extérieures ayant toutes une même direction donnée, choisie pour celle des* z.

Et le cas d'un corps indéfini, supportant dans certaines parties de sa masse des forces (X, Y, Z) absolument quelconques, se ramène immédiatement au précédent; car il suffit d'y superposer trois systèmes analogues de valeurs de u, v, w, correspondant aux cas où les forces extérieures se réduisent soit à leurs composantes X, soit à leurs composantes Y, soit à leurs composantes Z.

MM. William Thomson et Tait, aux n°s 730 et 731 de leur beau *Traité de philosophie naturelle*, étaient parvenus par une autre voie, beaucoup plus pénible, à la solution de ce problème. Ils avaient obtenu, au lieu des formules (42), celles-ci,

$$(43)\quad\begin{cases} u=\dfrac{\lambda+\mu}{24\pi\mu(\lambda+2\mu)}\displaystyle\int r^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}dF, \\ v=\dfrac{\lambda+\mu}{24\pi\mu(\lambda+2\mu)}\displaystyle\int r^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}dF, \\ w=\dfrac{1}{24\pi\mu(\lambda+2\mu)}\displaystyle\int\left[(\lambda+\mu)r^2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}+2\frac{2\lambda+3\mu}{r}\right]dF, \end{cases}$$

qui sont bien moins simples, mais qui reviennent au même lorsqu'on y exprime les dérivées de $\frac{1}{r}$ en fonction des dérivées de r, en observant aussi, par exemple, que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r^3}=-\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}$$

et que

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2=\frac{(z-z_1)^2}{r^3}=\frac{1}{r}-\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}.$$

8. *Des déplacements d'équilibre que produit, dans le voisinage de son point d'application, une force isolée, s'exerçant à l'intérieur d'un solide élastique.* — Parmi les conséquences des formules (42), je ne signalerai ici que les plus simples, celles qui concernent le cas d'une seule force dF, ayant pour région d'application un volume infiniment petit en tous sens situé à l'origine des coordonnées, et où, par suite, les intégrales $\int r\,dF$, $\int\frac{dF}{r}$ se réduisent à l'élément unique $r\,dF$, $\frac{dF}{r}$, avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Soit alors α l'angle, compris entre 0° et 180°, que fait avec l'axe des z, c'est-à-dire avec la force donnée, le rayon r tiré de l'origine à un point quelconque du corps, et supposons qu'on ait mené le plan des xz par ce point en prenant de son côté les x positifs, de manière que les déplacements, évidemment pareils tout autour de la force dF qui les a fait naître, admettent en ce point deux composantes seulement, l'une, w, dans le sens de la force, l'autre, $U=u$, dans le sens normal qui s'en éloigne. Comme on aura

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}=-\frac{xz}{r^3}=-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}=-\frac{\sin 2\alpha}{2r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}=\frac{\sin^2\alpha}{r}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2r},$$

les valeurs de U et w seront :

$$(44)\quad\begin{cases} U=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{dF}{8\pi\mu}\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{dF}{16\pi\mu r}\sin 2\alpha, \\ w=-\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{dF}{8\pi\mu}\dfrac{\sin^2\alpha}{r}+\dfrac{dF}{4\pi\mu}\dfrac{1}{r}=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\dfrac{dF}{16\pi\mu r}\left[\dfrac{3\lambda+7\mu}{\lambda+\mu}+\cos 2\alpha\right]. \end{cases}$$

Pour les molécules réparties sur une sphère de rayon r décrite autour du point d'application de la force $d\text{F}$ comme centre, les petits déplacements éprouvés se composent donc : 1° d'une translation commune $\frac{d\text{F}}{4\pi\mu}\frac{1}{r}$, suivant la direction de la force; 2° d'un déplacement, $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{8\pi\mu}\frac{\sin\alpha}{r}$, effectué dans le sens dont les deux cosinus directeurs sont $\cos\alpha$, $-\sin\alpha$, c'est-à-dire le long de la tangente menée à la sphère, à partir de chaque molécule, dans le plan de la force $d\text{F}$ et suivant la direction qui fait un angle obtus avec $d\text{F}$: *ce glissement de chaque molécule sur la surface même de la couche sphérique vaut la projection sur sa direction, c'est-à-dire sur la tangente considérée, d'une droite fixe, dirigée en sens contraire de la force et égale à* $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{8\pi\mu r}$. Ainsi, *chaque couche sphérique, d'un rayon donné r, ayant pour centre le point d'application de la force* $d\text{F}$, *avance parallèlement à celle-ci, tout en conservant sa forme et son rayon, de la quantité* $\frac{d\text{F}}{4\pi\mu r}$; *seulement, comme on a*

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{8\pi\mu r}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}\sin 2\alpha,$$

$$-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{8\pi\mu r}\sin^2\alpha=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}\cos 2\alpha,$$

les particules qui constituent la couche éprouvent à sa surface un léger recul, composé de la translation $-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}$, *en sens contraire de la force, et d'un autre déplacement, égal à cette translation, mais effectué suivant la direction qui fait avec celle de la force l'angle*, 2α, *dont la bissectrice est le prolongement du rayon r aboutissant à la molécule.*

Ce dernier mouvement, seul propre aux diverses particules de la couche, aurait pour effet d'éparpiller uniformément, sur toute une circonférence de rayon $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}$, celles qui appartiennent à la section demi-circulaire faite dans la couche par un plan mené suivant l'axe des z et limité à cet axe, si l'on supposait toutes ces molécules réunies d'abord en un même point quelconque, qui serait le centre de la circonférence où elles viendraient ainsi se placer; en effet, α croissant uniformément de 0 à π dans la section demi-circulaire considérée, l'angle 2α croîtrait aussi uniformément de zéro à 2π. La valeur moyenne que w y reçoit, c'est-à-dire celle de $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{d\text{F}}{16\pi\mu r}\cos 2\alpha$, pour toutes les particules de la couche sphérique, exprime le transport éprouvé dans le sens de la force $d\text{F}$, lors de cet éparpillement, par le centre de gravité de la couche supposée d'une épaisseur primitive uniforme dr. Comme le nombre de ses molécules pour lesquelles α a une certaine valeur est proportionnel à $\sin\alpha$, c'est-à-dire au rayon $r\sin\alpha$

du petit cercle de la couche le long duquel ces molécules sont rangées, la moyenne en question sera celle du produit $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{16\pi\mu r}\cos 2\alpha \sin\alpha$, pour α variable de 0 à π, divisée par la valeur moyenne simultanée de $\sin\alpha$, ou, encore, le quotient des deux intégrales

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{16\pi\mu r}\int_0^\pi \cos 2\alpha \sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{16\pi\mu r}\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\cos^3\alpha\right)_0^\pi = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{24\pi\mu r},$$

et

$$\int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = -\left(\cos\alpha\right)_0^\pi = 2\ .$$

Ainsi, dans le mouvement d'éparpillement considéré, le centre de gravité de la couche éprouve un recul, c'est-à-dire un transport vers les z négatifs, égal à $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{48\pi\mu r}$. Ce mouvement se composant avec le recul $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{16\pi\mu r}$, commun à toute la couche, pour produire les glissements totaux de sa matière sur sa surface sphérique, il en résulte que, *par l'effet de ces glissements, le centre de gravité de la couche se porte en arrière de son centre de figure de la quantité* $\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{12\pi\mu r}$. Vu donc la translation en avant $\frac{dF}{4\pi\mu r}$ du centre de figure lui-même, le déplacement moyen éprouvé par la matière de la couche, dans le sens de la force dF, est la différence de ces deux quantités, différence égale à $\frac{2\lambda+5\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{12\pi\mu r}$. En la multipliant par le volume primitif $4\pi r^2 dr$ de la couche, intégrant de $r=0$ à $r=r$ et divisant le résultat par le volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ de la sphère massive que limite la couche, il viendra enfin, pour la valeur du déplacement moyen imprimé, dans le sens de la force, à toute la matière de cette sphère, $\frac{2\lambda+5\mu}{\lambda+2\mu}\frac{dF}{8\pi\mu r}$, quantité un peu supérieure au déplacement même, $\frac{dF}{4\pi\mu r}$, du centre de figure de cette sphère, qui, comme on a vu, conserve sa forme et son rayon.

ADDITION A LA NOTE FINALE DU § 46.

De la transmission, dans un solide élastique en équilibre, d'une pression exercée sur une très petite partie de sa surface.

Parmi les questions concernant la manière dont les actions exercées à la surface des solides en équilibre se transmettent dans leur intérieur, une des plus simples, et même la première qui se présente à l'esprit, est celle des pressions qu'on fait naître dans un corps, lorsqu'on le touche en un de ses points, ou plus exactement sur une très petite partie de sa surface, tandis que les parties éloignées de celle-là sont maintenues immobiles. La pression ainsi exercée n'ayant d'effets sensibles que dans le voisinage de sa région d'application, c'est-à-dire dans une étendue totale où la surface ne s'écarte pas, d'une manière appréciable, d'un de ses plans tangents, tout se passe, à fort peu près, comme si le corps, limité d'un côté par le plan dont il s'agit, était indéfini suivant tous les autres sens, et rendu fixe en tous ses points indéfiniment distants de celui qui est directement comprimé, ou auquel on peut supposer réduite la région d'application.

Les formules qui résolvent ce problème sont donc celles du n° 4 de la note qui précède (p. 586). En particulier, si l'on adopte le point d'application de la pression élémentaire exercée dP pour origine, et la normale suivant laquelle cette pression est dirigée pour axe des z, les formules (18), p. 587, exprimeront les petits déplacements d'équilibre u, v, w. Or si l'on considère, dans le corps, des couches de matière parallèles à sa surface, rien n'est plus simple que de calculer, au moyen des valeurs de u, v, w, la pression qu'exerce chacune de ces couches sur celle qui la supporte ou qui est contiguë et plus profonde. En désignant par p_x, p_y, p_z les trois composantes par unité d'aire, en un point quelconque, de cette pression, les formules (15), p. 585, donneront, après substitution des valeurs de u, v, w et tous calculs faits

$$p_x = \frac{3dP}{2\pi}\frac{z^2}{r^4}\frac{x}{r}, \quad p_y = \frac{3dP}{2\pi}\frac{z^2}{r^4}\frac{y}{r}, \quad p_z = \frac{3dP}{2\pi}\frac{z^2}{r^4}\frac{z}{r}.$$

Donc, *la pression normale* dP, *exercée en un point de la surface, se transmet, de chaque couche à la suivante, sous la forme de pressions obliques, dirigées exactement à l'opposé de ce point, et égales, par unité d'aire, à* $\frac{3dP}{2\pi}\frac{z^2}{r^4}$, *c'est-à-dire proportionnelles à la pression extérieure donnée* dP *et en raison composée inverse du carré de la distance* r *au même point et du carré du rapport de cette distance à la profondeur* z *de la couche.*

••

Il faut, pour l'équilibre d'un cylindre d'un très grand rayon décrit autour de la force extérieure $d\text{P}$ comme axe, que cette pression $d\text{P}$, en se transmettant de couche en couche, garde son intensité totale ; car les pressions appliquées aux deux bases du cylindre doivent à elles seules se neutraliser, celles qui le sont à sa surface convexe étant, par unité d'aire, comparables à l'inverse du carré de son rayon et n'ayant par suite, sur toute la surface convexe, qui est seulement de l'ordre du même rayon, qu'une résultante négligeable. Et, en effet, sur la couche située à la profondeur z, l'intensité totale de la pression exercée est $2\pi\int_z^\infty p_z r dr$, vu que celle que supporte, en tout, une couronne élémentaire, ayant pour rayon intérieur $\sqrt{r^2-z^2}$ et pour largeur $d\sqrt{r^2-z^2}$, vaut le produit de p_z par l'aire

$$2\pi\sqrt{r^2-z^2}\,d\sqrt{r^2-z^2}=\pi d(r^2-z^2)=2\pi r dr$$

de la couronne, produit qui n'est autre que $2\pi p_z r dr$, où le rayon $\sqrt{r^2-z^2}$ peut varier de zéro à l'infini, et par suite, r, de z à ∞. Or, en substituant à p_z sa valeur $\frac{3d\text{P}}{2\pi}\frac{z^3}{r^5}$, l'intégration donne bien

$$2\pi\int_z^\infty p_z r dr = d\text{P}z^3\left(-\frac{1}{r^3}\right)_z^\infty = d\text{P}.$$

Les formules trouvées pour p_x, p_y, p_z ne contiennent aucun coefficient d'élasticité : en sorte que *la transmission des pressions à partir de la surface, sur les couches de matière qui lui sont parallèles, se fait de la même manière dans tous les solides isotropes.* Il n'en serait plus de même sur des couches ayant d'autres directions.

Observons que les valeurs ci-dessus de p_x, p_y, p_z ne s'appliquent qu'à des distances r de la surface directement touchée très grandes par rapport à ses dimensions. Pour les points qui en sont voisins, il faut, comme on a dit vers le haut de la page 389, décomposer cette surface en une infinité d'éléments, sur chacun desquels s'exercera une certaine fraction, infiniment petite, de la pression donnée $d\text{P}$, et former les expressions totales de u, v, w, p_x, p_y, p_z, par voie d'intégration, en ajoutant respectivement leurs valeurs partielles, relatives à ces diverses pressions élémentaires, et que fourniront les formules précédentes. En observant que ces formules reviennent à celles-ci

$$p_x=\frac{z}{2\pi}\frac{d^3\log(z+r)\,d\text{P}}{dx\,dz^2},\quad p_y=\frac{z}{2\pi}\frac{d^3\log(z+r)\,d\text{P}}{dy\,dz^2},$$

$$p_z=\frac{1}{2\pi}\left[z\frac{d^3(\log(z+r)\,d\text{P}}{dz^3}-\frac{d^2\log(z+r)\,d\text{P}}{dz^2}\right],$$

on aura

$$p_x=\frac{z}{2\pi}\frac{d^3\psi}{dx\,dz^2},\quad p_y=\frac{z}{2\pi}\frac{d^3\psi}{dy\,dz^2},\quad p_z=\frac{1}{2\pi}\left[z\frac{d^3\psi}{dz^3}-\frac{d^2\psi}{dz^2}\right].$$

ψ désignant le potentiel logarithmique $\int \log(z+r)\,dP$. A une distance infiniment petite z de la surface, ces trois formules donneront, vu les relations (9) de la page 381,

$$p_x = -z\frac{d\rho(x,y)}{dx}, \quad p_y = -z\frac{d\rho(x,y)}{dy}, \quad p_z = \rho(x,y)$$

où $\rho(x,y)$ désigne, comme on voit, la fonction arbitraire de x et y qui représente, par unité d'aire, les pressions appliquées à la surface.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES CORPS ÉLASTIQUES, DONT QUELQUES-UNES DES DIMENSIONS SONT TRÈS PETITES (INFINIMENT PETITES)

CHAPITRE IV

TIGES MINCES

---

§ 47. — Bases générales de la théorie des corps dont une ou deux dimensions sont très petites.

C'est à Kirchhoff que l'on doit la théorie rigoureuse de la déformation des corps élastiques dont une ou deux des dimensions deviennent très petites. Il en a développé les principes dans son Mémoire *de l'équilibre et du mouvement d'une tige élastique infiniment mince* (Journal de Crelle, 1860, vol. 56). Dans ce qui va suivre, sa méthode sera exposée avec quelques modifications, et bornée, comme il a été fait dans toute la première partie, à l'étude des corps dont l'élasticité, supposée la même dans tous les sens tranversaux, ne présente des différences que pour le sens de la longueur des tiges ou pour celui de l'épaisseur des plaques.

On a déjà dit ci-dessus (§ 15), que si un corps a des dimensions très petites dans une direction donnée quelconque, on ne peut plus admettre que les déplacements de tous ses points restent petits dans l'espace, même en supposant très petits tous les déplacements qui sont relatifs à l'intérieur d'un parallélépipède élémentaire quelconque; déplacements dont les proportions dépendent des six *déformations* élémentaires désignées par ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}. Imaginons le corps entier divisé en petites parties; par exemple, une tige, en une série de tronçons ou petites tiges ayant chacune pour section transversale la section très petite de la tige donnée, et pour longueurs les éléments de son axe longitudinal; une plaque, divisée en petits prismes dont la hauteur soit l'épaisseur très petite de la plaque et dont les

sections transversales soient les éléments superficiels de sa section moyenne. Dans l'un comme dans l'autre cas, ces diverses parties peuvent ne subir en elles-mêmes que de très petites déformations, mais les déplacements relatifs des points des éléments séparés peuvent s'ajouter de manière que le déplacement, dans l'espace, d'un certain nombre d'entre eux, devienne très important.

Mais les petits déplacements intérieurs eux-mêmes peuvent acquérir alors un caractère un peu différent de celui qu'ils ont dans les exemples considérés jusqu'ici. Dans une tige dont les dimensions transversales sont finies, les flexions ou torsions restent toujours très petites, attendu que les constantes, telles que les moments d'inertie des sections, auxquelles ces flexions ou torsions sont inversement proportionnelles, peuvent, multipliées par les coefficients d'élasticité E ou G, donner des produits très grands. Cela n'a plus lieu lorsque les dimensions deviennent très petites dans une certaine direction ; car cette petitesse des dimensions introduit dans les formules de très petits facteurs, de l'ordre de grandeur des dimensions elles-mêmes ; par conséquent les constantes, dont les inverses déterminent les déplacements, peuvent recevoir de très grandes valeurs sans que les déplacements relatifs des points *de chaque élément* cessent d'être très petits ; et l'on ne peut plus appliquer aux corps entiers les équations qui ont été trouvées en négligeant les carrés et les produits des déplacements, ainsi que de leurs quotients différentiels. Mais ces équations précédemment établies sont encore applicables aux déplacements intérieurs des *éléments* en lesquels nous venons de supposer les corps décomposés.

L'application de ces équations à des éléments très petits donne l'occasion de faire usage d'un principe énoncé par Kirchhoff et de l'exactitude duquel on peut facilement se convaincre. Ce principe, qui forme l'une des bases essentielles de sa théorie, est le suivant :

Les déplacements relatifs des divers points d'un corps de dimensions très petites ne dépendent que des forces qui agissent sur sa surface, et non de celles qui agissent sur son intérieur, si l'on admet que ces dernières ne sont pas extraordinairement grandes pour l'unité de volume par rapport aux premières pour l'unité de surface.

On peut établir ce principe par la considération suivante. Admettons que l'intensité des forces agissant sur la face extérieure, ou sur la surface enveloppe du corps, rapportée à l'*unité superficielle*, et celle des forces agissant sur l'intérieur, rapportée à l'*unité de volume*, soient comparables. La grandeur totale de la force agissant sur la surface du petit corps est proportionnelle à cette surface, et reçoit, en tout cas, un

facteur qui est de l'ordre de grandeur de cette même surface, divisée par l'unité superficielle, tandis que la grandeur de la force agissant à l'intérieur reçoit un facteur qui est de l'ordre de grandeur du volume, divisé par l'unité de volume. Si donc les dimensions du petit corps sont des quantités du premier ordre de petitesse, la surface sera du second ordre, et le volume, du troisième. Le facteur géométrique correspondant aux forces appliquées à l'extérieur est, par suite, d'un ordre de petitesse moins élevé que celui des forces appliquées à l'intérieur, si ces dernières ne sont pas, par unité de volume, très grandes en intensité, relativement aux premières, estimées par unité de superficie. L'action à l'intérieur devient ainsi très petite comparativement à l'autre et peut être négligée. Le même principe a déjà été mis en usage au commencement de cet ouvrage, lorsque l'on a considéré les déplacements internes d'un élément, comme dépendant seulement des tensions agissant sur sa surface, et non des forces agissant sur son intérieur. Ce qui a été appliqué alors à des corps de dimensions *infiniment petites* est étendu ici aux corps dont les dimensions sont *très petites;* et, toujours d'après ce même principe, on néglige les grandeurs qui contiennent des puissances supérieures des petites dimensions par rapport à celles qui contiennent les puissances de degré inférieur de ces mêmes dimensions.

Les états intérieurs des éléments dépendent donc seulement des forces qui agissent sur leurs surfaces. Supposons qu'aucune force ne soit appliquée sur la surface libre d'un corps; il n'y aura, pour déterminer les états intérieurs de chacun de ses éléments, que les tensions provenant des éléments voisins. Alors, l'action des forces appliquées sur l'intérieur ne sera plus négligeable ; car imaginons un morceau de dimensions finies détaché du corps, les tensions qui unissent ce morceau aux parties voisines sont en relation nécessaire avec les forces appliquées à son intérieur, et auxquelles elles doivent faire équilibre.

§ 48. — Tige mince (ressort, fil de métal) primitivement rectiligne mais ayant une section transversale de forme quelconque. Considération des éléments ou tronçons très courts solidaires entre eux, dans lesquels on peut la concevoir divisée.

Je vais d'abord m'occuper des corps dont deux dimensions sont très petites par rapport à la troisième, par conséquent des tiges minces. Je considérerai, en premier lieu, les tiges originairement rectilignes et ayant partout la même section transversale. On a déjà supposé

ci-dessus de pareilles tiges formées, dans le sens de leur longueur, de petits tronçons ou cylindres dont la surface latérale ne supporte aucune action extérieure, et qui ne sont soumis, à l'intérieur, qu'à des forces susceptibles d'être négligées ; mais sur les bases planes desquels agissent les forces élastiques émanant des tronçons voisins.

On a traité précédemment le problème consistant à déterminer l'état d'équilibre d'un prisme ou cylindre, étant donnés les composantes et les moments des forces appliquées à ses faces extrêmes. Les formules obtenues n'étaient rigoureusement exactes que pour une certaine répartition des forces engendrant ces composantes et ces moments ; mais leur défaut de rigueur, quand les répartitions sont différentes, est manifestement d'autant plus grand que la section transversale est plus grande ; et il devient petit jusqu'à disparaître si la section transversale elle-même diminue jusqu'à s'évanouir comme dans le cas qui nous occupe (*). Quelle que soit alors en réalité la répartition des tensions sur la section transversale, on pourra, sauf des différences qui sont d'ordre supérieur de petitesse, les supposer réparties comme l'indiquent les formules données par les solutions du *problème de Saint-Venant*. On peut donc immédiatement appliquer ces formules aux petits déplacements qui se produisent à l'intérieur des éléments considérés.

Ce sont les équations (65) de la première partie, page 150, qui serviront de point de départ ; il faut seulement y faire

$$b = 0,$$

comme on l'a démontré au § 24, équation (70 a), page 156. Prenons pour origine des coordonnées la position occupée, après le déplacement, par le centre de gravité de l'une des sections transversales limitant l'élément ; et pour axe des z positifs la tangente à la courbe que forme alors la ligne des centres de gravité des sections transversales. Dans les équations (65) dont il s'agit, u, v, w doivent donc s'annuler pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$: et comme, d'ailleurs, d'après sa définition donnée par l'équation (64 c), page 149, Ω doit aussi s'annuler pour ces mêmes valeurs, il en résulte

$$a' = 0, \quad a'' = 0, \quad c = 0.$$

Pour le point de l'axe dont les coordonnées sont 0, 0, dz, les déplacements u et v doivent aussi s'annuler puisque ce point doit rester sur l'axe des z ; il s'en suit que

$$b' = 0, \quad b'' = 0.$$

(*) Nous nous référons à l'avis exprimé aux nos 6, 7 et commencement du no 8 de la note du § 28, relativement à cette raison, ainsi qu'à celles que Clebsch donne ci-après au § 49.

Enfin, prenons pour axe des x la tangente, au point d'origine, à la courbe formée par la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe des z, de la position, après le déplacement, d'un axe principal d'inertie de la base ou section d'extrémité. L'axe des y aura alors, naturellement, une direction analogue par rapport à l'autre axe principal. Ces deux conditions s'expriment en posant

$$a_0 = 0\,;$$

car, les points placés sur les axes principaux, très près de l'origine, et dont les coordonnées sont

$$\begin{array}{ccc} dx, & 0, & 0, \\ 0, & dy, & 0, \end{array}$$

éprouvent les déplacements respectifs

$$\begin{array}{ll} u = -\eta a\,dx, & v = 0, \\ u = 0, & v = -\eta a\,dy\,; \end{array}$$

de sorte que, même après le déplacement, la projection du premier point sur la section transversale reste sur l'axe des x, et celle du second sur l'axe des y. De cette manière, la position géométrique du système d'axes coordonnées est parfaitement déterminée. Dans la situation naturelle de la tige, ce même système des coordonnées, si on le suppose fixé invariablement au premier élément, est placé de telle sorte que l'axe des z coïncide avec l'axe de la tige, et que les axes des x et des y sont les axes principaux de la section transversale extrême de l'élément considéré. Les expressions des déplacements, à l'intérieur de ce même élément, deviennent alors :

$$(176)\left\{\begin{aligned} u &= -\eta\left(ax + a_1\frac{x^2-y^2}{2} + a_2xy\right) - \eta z\left(b_1\frac{x^2-y^2}{2} + b_2xy\right) + b_0yz - a_1\frac{z^2}{2} - b_1\frac{z^3}{6}, \\ v &= -\eta\left(ay + a_1xy + a_2\frac{y^2-x^2}{2}\right) - \eta z\left(b_1xy + b_2\frac{y^2-x^2}{2}\right) - b_0zx - a_2\frac{z^2}{2} - b_2\frac{z^3}{6}, \\ w &= z(a + a_1x + a_2y) + \frac{z^2}{2}(b_1x + b_2y) + \Omega - b_1xy^2 - b_2x^2y\,; \end{aligned}\right.$$

et les tensions sont exprimées par :

$$(176a)\left\{\begin{aligned} & t_{xx} = 0, \qquad t_{yy} = 0, \qquad t_{xy} = 0, \\ & t_{zz} = E[(a + a_1x + a_2y) + z(b_1x + b_2y)], \\ & t_{zx} = G\left\{b_0y - b_1\left[\frac{\eta x^2}{2} + \left(\frac{E}{2G} - \frac{3\eta}{2}\right)y^2\right] - \left(\frac{E}{G} - \eta\right)b_2xy + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}, \\ & t_{zy} = G\left\{-b_0x - b_2\left[\frac{\eta y^2}{2} + \left(\frac{E}{2G} - \frac{3\eta}{2}\right)x^2\right] - \left(\frac{E}{G} - \eta\right)b_1xy + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right\}. \end{aligned}\right.$$

La position géométrique du système des axes coordonnées est choisie ici un peu autrement que dans les études antérieures, mais cela ne modifie évidemment en rien les expressions des tensions.

Ces équations ne sont applicables que pour de très petites valeurs de x, y, z, car la section transversale n'occupe qu'un très petit espace sur le plan des xy; de sorte que les coordonnées x et y sont toujours très petites; et comme les valeurs ci-dessus ne s'appliquent qu'à un petit tronçon de la tige, la coordonnée z elle-même sera toujours très petite aussi.

Avant tout, il importe d'être bien fixé sur l'ordre des diverses grandeurs qui entrent dans les formules précédentes. Désignons par ε un nombre qui soit de l'ordre des dimensions transversales de la tige, x, y, z seront de l'ordre de ε. D'après les formules (86) du § 29, p. 194, les quantités a, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 s'expriment par les composantes et par les moments de rotation des forces qui agissent sur la section transversale extrême de l'élément, et qui, en général, sont tous du même ordre, ou du moins ne tombent pas à un ordre de petitesse supérieur à un certain ordre déterminé et commun à tous.

Si, pour plus de simplicité, nous supposons la section transversale symétrique par rapport à ses axes principaux d'inertie qui sont parallèles aux x et aux y, comme il en résulte

$$\int x^3 d\sigma = 0\,, \quad \int y^3 d\sigma = 0\,, \quad \int x^2 y d\sigma = 0\,, \quad \int x y^2 d\sigma = 0\,,$$

toute la partie du premier membre de la dernière équation (86) qui est affectée de b_1 et de b_2 s'évanouit, c'est-à-dire que les torsions *accompagnant les flexions* des prismes à sections non symétriques, ou provenant des forces transversales *ne faisant pas couples*, sont nulles, et comme Ω se réduit à sa partie $b_0 B_0$, l'on a, si l'on pose pour l'abréviation et l'analogie

$$(177) \qquad \mathrm{E}\mathfrak{z}^2 = \mathrm{G}\left[\varkappa^2 + \lambda^2 - \frac{1}{\sigma}\int\left(x\frac{\partial B_0}{\partial y} - y\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)d\sigma\right], \qquad (*)$$

(*) Cette égalité (177), ainsi que l'expression (178) $\mathrm{E}\mathfrak{z}^2\sigma b_0 = C'$, sont ce qui définit $\mathfrak{z}$. C'est une quantité linéaire, ou du premier degré géométriquement, analogue à $\varkappa$ et à λ, que Clebsch introduit pour donner de la symétrie à ses équations ultérieures. Les lignes $\varkappa$, λ sont des *rayons de gyration*, longueurs telles que leurs carrés, multipliés par la superficie σ d'une section transversale d'une tige, donnent les deux moments d'inertie *principaux* (le plus grand et le plus petit) de cette section autour de droites qui y sont tracées par son centre de gravité, en sorte que les produits $\mathrm{E}\varkappa^2\sigma$, $\mathrm{E}\lambda^2\sigma$ sont ce par quoi il faut multiplier les *courbures* ou les inverses $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$, des rayons de courbure des projections de sa fibre moyenne (primitivement droite et devenue courbe) sur deux plans passant par la tangente

les six formules suivantes :

$$(178)\quad \begin{cases} a = \dfrac{C}{E\sigma}, & b_0 = -\dfrac{C'}{E\varepsilon^2\sigma}, \\ a_1 = -\dfrac{B'}{E\lambda^2\sigma}, & b_1 = \dfrac{A}{E\lambda^2\sigma}, \\ a_2 = \dfrac{A'}{E\varkappa^2\sigma}, & b_2 = \dfrac{B}{E\varkappa^2\sigma}, \end{cases}$$

Dans ces formules, les rayons d'inertie ou de gyration, $\varkappa$, λ sont du premier ordre, ε est également du premier ordre, comme nous allons le voir en examinant les fonctions B_0, en même temps que les autres fonctions B_1, B_2 qui entrent dans l'expression de Ω.

Cette expression est [§ 24, (68 *a*), (70 *a*)] de la forme

$$(178\ a)\qquad \Omega = b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2,$$

dans laquelle les fonctions B doivent, en chaque point de la section

---

à cette fibre et par les axes principaux de cette section, pour avoir les moments, autour des deux mêmes axes, des forces élastiques de la matière de la tige mises en jeu *par sa flexion*. Eh bien, de même, l'auteur appelle ε une ligne dont le carré multiplié par la superficie σ de la section et par le même coefficient ou module d'élasticité longitudinale E de la matière de la tige, supposée d'égale contexture dans tous les sens transversaux, donne ce par quoi il faut multiplier la torsion b_0 (ou l'arc d'un rayon = 1 dont une section a tourné devant une autre, rapporté à l'unité de leur distance), pour avoir le moment des forces élastiques de la matière de la tige, mises en jeu par la torsion qu'elle éprouve.

Si la section de tout prisme qu'on tord restait plane, comme l'ont pensé beaucoup d'auteurs, mais ce qui n'est vrai que lorsque son contour est circulaire, on aurait simplement $\varepsilon^2 = \frac{G}{E}(\varkappa^2 + \lambda^2)$. Le terme entre crochets affecté d'une intégrale dans l'expression (177) de $E\varepsilon^2$ est dû au *gauchissement*, nécessairement pris par toute section de tige tordue quand cette section n'est pas un cercle; ainsi qu'on l'a prouvé à la Note finale du § 31.

Quand la section σ est une ellipse (auquel cas le plan de la section se courbe en paraboloïde hyperbolique), il a été trouvé à ce § 31, p. 209, et exprimé surtout au n° 9 de sa Note finale citée, p. 219, qu'on a pour le moment de torsion

$$M_z\ (\text{ou} - C') = G\frac{\psi}{l}\frac{1}{4\pi^2}\frac{\sigma^4}{I_0},\ \text{où}\ I_0 = \sigma(\varkappa^2 + \lambda^2).$$

En comparant cette expression à celle (178) de b_0 qui est la même chose que $\frac{\psi}{l}$, on a, pour la section elliptique,

$$\varepsilon^2 = \frac{G}{E}\frac{1}{4\pi^2}\frac{\sigma^2}{\varkappa^2+\lambda^2} = \frac{1}{39,48}\frac{G}{E}\frac{\sigma^2}{\varkappa^2+\lambda^2};$$

et il résulte de ce qui a été rapporté au même n° 9 de la Note du § 31 que cette formule, exacte pour les sections en forme d'ellipse, peut être adoptée approximativement pour des sections de formes différentes et très variées.

transversale, satisfaire à ces équations qui sont celles (69) du § 24, p. 154.

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2}=0;$$

et, en chaque point de la périphérie, aux suivantes qui sont celles (70), même page 154.

$$\frac{\partial B_0}{\partial x}\cos p+\frac{\partial B_0}{\partial y}\sin p=x\sin p-y\cos p,$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial x}\cos p+\frac{\partial B_1}{\partial y}\sin p=\left[\eta\frac{x^2}{2}+\left(\frac{E}{G}-5\eta\right)\frac{y^2}{2}\right]\cos p+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)xy\sin p,$$
$$\frac{\partial B_2}{\partial x}\cos p+\frac{\partial B_2}{\partial y}\sin p=\left[\eta\frac{y^2}{2}+\left(\frac{E}{G}-5\eta\right)\frac{x^2}{2}\right]\sin p+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)xy\cos p.$$

Dans ces équations, posons

$$x=\varepsilon x', \quad y=\varepsilon y'.$$

Puisque x et y sont partout de l'ordre de ε, x' et y' sont des *nombres finis*. L'équation de la section transversale se transforme en une équation en x' et y' qui ne représente rien autre chose qu'une figure semblable à la section transversale, dont les dimensions sont augmentées dans le rapport de ε à 1 ; et, par conséquent, une figure de dimensions finies, puisque les dimensions de la section non grandie étaient de l'ordre de ε. Dans ce passage d'une équation à l'autre, les quantités $\cos p$, $\sin p$, restent de grandeur finie. Nous obtenons donc, pour la périphérie, les équations :

$$\frac{\partial B_0}{\varepsilon\partial x'}\cos p+\frac{\partial B_0}{\varepsilon\partial y'}\sin p=\varepsilon(x'\sin p+y'\cos p)$$
$$\frac{\partial B_1}{\varepsilon\partial x'}\cos p+\frac{\partial B_1}{\varepsilon\partial y'}\sin p=\varepsilon^2\left\{\left[\eta\frac{x'^2}{2}+\left(\frac{E}{G}-5\eta\right)\frac{y'^2}{2}\right]\cos p+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)x'y'\sin p\right\}$$
$$\frac{\partial B_2}{\varepsilon\partial x'}\cos p+\frac{\partial B_2}{\varepsilon\partial y'}\sin p=\varepsilon^2\left\{\left[\eta\frac{y'^2}{2}+\left(\frac{E}{G}-5\eta\right)\frac{x'^2}{2}\right]\sin p+\left(\frac{E}{G}-\eta\right)x'y'\cos p\right\}$$

où toutes les grandeurs, à l'exception de ε, sont finies.

Les équations générales auxquelles doivent satisfaire B_0, B_1, B_2, ne sont nullement changées par cette substitution, à la seule différence

près que x et y sont remplacées par x' et y'. Le facteur ε disparaît de toutes ces équations en posant :

$$B_0 = \varepsilon^2 B'_0 \;, \qquad B_1 = \varepsilon^3 B'_1 \;, \qquad B_2 = \varepsilon^3 B'_2 \;;$$

et nous pouvons par conséquent considérer B'_0, B'_1, B'_2, comme des grandeurs qui conservent une valeur finie dans toute l'étendue de la section transversale. Par conséquent, nous voyons que B_0 est de l'ordre de ε^2 et que B_1 et B_2 sont de l'ordre de ε^3; et, d'après ce qu'on vient de dire, les quotients différentiels de B_0 sont aussi de l'ordre de ε^2.

On voit que ε est effectivement du premier ordre, comme nous l'avions dit, puisque tous les termes de ε^2 sont du second ordre.

Si maintenant l'on réduit les expressions de u, v, w, au moyen des équations (178), en négligeant les termes qui, d'après ce qu'on vient de dire, seraient d'ordre supérieur de petitesse, il reste :

$$(179)\quad \left\{\begin{aligned} E\sigma \,.\, u &= -\eta A' \frac{xy}{\varkappa^2} + B' \frac{\eta(x^2-y^2)+z^2}{2\lambda^2} - C' \frac{yz}{\varepsilon^2}\,, \\ E\sigma \,.\, v &= \eta B' \frac{xy}{\lambda^2} + A' \frac{\eta(x^2-y^2)+z^2}{2\varkappa^2} + C' \frac{xz}{\varepsilon^2}\,, \\ E\sigma \,.\, w &= -B' \frac{xz}{\lambda^2} + A' \frac{yz}{\varkappa^2} - C' \frac{B_0}{\varepsilon^2}\;; \end{aligned}\right.$$

équations qui ne contiennent plus que les moments de rotation, et qui sont devenues complètement indépendantes des composantes A, B, C. Si on veut considérer le cas où la composante C, agissant dans la direction de l'axe de l'élément, aurait une grandeur d'ordre supérieur à celui des autres forces, il faudrait ajouter à ces équations les termes

$$(179\,a)\qquad -\eta C x\;, \qquad -\eta C y\;, \qquad \eta C z\,.$$

Dans le cas où ce seraient les forces A, B qui deviendraient d'une grandeur prépondérante, les termes à ajouter deviendraient

$$(179\,b)\quad \left\{\begin{aligned} &-\eta z\left(A\,\frac{x^2-y^2}{2\lambda^2} + B\,\frac{xy}{\varkappa^2}\right) - A\,\frac{z^3}{6\lambda^2}\,, \\ &-\eta z\left(A\,\frac{xy}{\lambda^2} + B\,\frac{y^2-x^2}{2\varkappa^2}\right) - B\,\frac{z^3}{6\varkappa^2}\,, \\ &\frac{z^2}{2}\left(\frac{Ax}{\lambda^2} + \frac{By}{\varkappa^2}\right) + \frac{AB_1}{\lambda^2} + \frac{BB_2}{\varkappa^2} - A\,\frac{xy^2}{\lambda^2} - B\,\frac{x^2y}{\varkappa^2}\;; \end{aligned}\right.$$

ce qui donne lieu à des considérations particulières.

§ 49. — Conditions auxquelles doivent satisfaire les divers éléments pour former une tige continue.

Lorsque l'on a ainsi trouvé les équations qui peuvent représenter les états intérieurs d'un élément ou tronçon appartenant au corps considéré, c'est-à-dire les déplacements u, v, w de ses points dans les sens des trois axes qui lui sont particuliers, et les composantes des tensions suivant les mêmes sens, il reste à rechercher lesquels de ces états sont compatibles avec la condition que les divers éléments forment un corps continu. L'étude suivante donne la solution de cette question, et, en même temps, détermine la forme que prend la tige après les déplacements de tous ses points.

Rapportons à un système de coordonnées rectangulaires *fixes*, appelées x', y', z', les points des divers éléments ou tronçons dans lesquels nous avons partagé la tige; et désignons par ξ, η, ζ les valeurs de ces coordonnées au point que nous avons choisi tout à l'heure pour origine des petites coordonnées x, y, z des autres points de l'élément considéré en particulier. Ces valeurs ξ, η, ζ sont différentes pour les divers éléments, et la série des points ($x'=\xi$, $y'=\eta$, $z'=\zeta$) constitue la ligne des centres de gravité des sections transversales de la tige déformée. Nous supposons que cette ligne était primitivement droite; et si nous désignons ensuite par s la distance, à l'une des extrémités de la tige, du point dont les coordonnées x', y', z' sont maintenant ξ, η, ζ, nous pouvons considérer ξ, η, ζ comme des fonctions de s.

Les coordonnées x', y', z' d'un point quelconque d'un tronçon se détermineront par la considération suivante. Comme le point dont il s'agit avait les coordonnées x, y, z par rapport aux axes primitifs dont l'origine mobile possède actuellement les coordonnées ξ, η, ζ, et comme il a maintenant, par l'effet des déplacements et par rapport aux axes primitifs et mobiles, les coordonnées

$$x+u\ ,\qquad y+v\ ,\qquad z+w\ ,$$

menons à partir de cette même origine, et vers ce point particulier, une ligne brisée formée d'une droite de longueur $x+u$ prise sur l'axe des x, puis d'une droite de longueur $y+v$ menée parallèlement à l'axe des y, puis d'une droite de longueur $z+w$ menée parallèlement à l'axe des z; cette ligne brisée se terminera évidemment au point (x, y, z) devenu ($x+u$, $y+v$, $z+w$); et les coordonnées nou-

velles x', y', z' de ce point, par rapport au système des axes fixes se composeront des coordonnées ξ, η, ζ de l'origine des x, y, z, augmentées des projections de cette ligne brisée sur chacun des trois axes nouveaux des x' y' z'.

Désignons donc par α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que forme avec les axes fixes des x', y', z', l'axe des x, variable d'un élément à l'autre; désignons de même par α_2, β_2, γ_2, et enfin par α, β, γ (sans indices) les cosinus des angles que forment respectivement avec les mêmes axes fixes, celui des y et celui des z; c'est-à-dire faisons

$$\begin{aligned}
&\cos(x,x')=\alpha_1\ , \quad &&\cos(x,y')=\beta_1\ , \quad &&\cos(x,z')=\gamma_1\ ,\\
&\cos(y,x')=\alpha_2\ , \quad &&\cos(y,y')=\beta_2\ , \quad &&\cos(y,z')=\gamma_2\ ,\\
&\cos(z,x')=\alpha\ , \quad &&\cos(z,y')=\beta\ , \quad &&\cos(z,z')=\gamma\ ;
\end{aligned}$$

les coordonnées x', y', z' auront les expressions

$$(179\,c)\qquad \left\{\begin{aligned}
x' &= \xi+\alpha_1(x+u)+\alpha_2(y+v)+\alpha(z+w)\ ,\\
y' &= \eta+\beta_1(x+u)+\beta_2(y+v)+\beta(z+w)\ ,\\
z' &= \zeta+\gamma_1(x+u)+\gamma_2(y+v)+\gamma(z+w)\ .
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant la tige dans son ensemble. Non seulement les coordonnées ξ, η, ζ, mais encore les cosinus α, α_1, α_2.... γ sont variables d'un tronçon à un autre et doivent par suite être considérés comme fonctions de s. Remarquons que nous pouvons passer d'un point de la tige à un autre point voisin, dans la direction de l'axe, de deux manières différentes : premièrement, en considérant le second point comme faisant partie du même tronçon que le premier, et situé par conséquent dans la direction de l'axe des z à une très petite distance, ce qui revient à changer z en $z+dz$; secondement, en considérant le second point comme faisant partie d'un autre tronçon, et occupant, dans celui-ci, une position absolument semblable à celle qu'occupe le premier point dans le premier tronçon; alors z n'est pas changé, mais s est changé en $s+ds$. Par la première opération x' y' z' deviennent

$$x'+\frac{\partial x'}{\partial z}dz\ , \qquad y'+\frac{\partial y'}{\partial z}dz\ , \qquad z'=\frac{\partial z'}{\partial z}dz\ ,$$

et par la seconde, ils deviennent

$$x'+\frac{\partial x'}{\partial s}ds\ , \qquad y'+\frac{\partial y'}{\partial s}ds\ , \qquad z'+\frac{\partial z'}{\partial s}ds\ .$$

Mais on a évidemment $dz = ds$, car ces deux quantités expriment la distance réelle des deux points considérés. La continuité de la tige sera manifestement assurée si les deux manières de passer d'un point à un autre, qui viennent d'être indiquées, donnent toujours le même résultat, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial s}, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial s}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial s}.$$

On aura donc exprimé les relations nécessaires pour assurer la continuité de la tige si on différentie successivement par rapport à z et par rapport à s, les expressions ci-dessus (179 c) de x', y', z' et si on égale les résultats. On doit observer que s entre non seulement dans ξ, η, ζ, α, α_1,.... définies au commencement de ce §, mais peut aussi figurer dans les constantes a, b, a_1,.... qui entrent dans les expressions (176) page 411, des déplacements u, v, w; en sorte qu'on doit différentier les u, v, w par rapport à s tout comme par rapport à z. Les trois égalités qu'on vient de poser, en y substituant les (179 c), et en remarquant que ξ, η, ζ, ainsi que les α, β, γ, α_1,...., constants dans un même tronçon, ne doivent être différentiés que par rapport à s et nullement par rapport à z, donnent ainsi les suivantes :

$$(180)\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \alpha \frac{\partial w}{\partial s} \\ \qquad + \frac{d\xi}{ds} + (x+u)\frac{d\alpha_1}{ds} + (y+v)\frac{d\alpha_2}{ds} + (z+w)\frac{d\alpha}{ds}; \\ \beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \beta \frac{\partial w}{\partial s} \\ \qquad + \frac{d\eta}{ds} + (x+u)\frac{d\beta_1}{ds} + (y+v)\frac{d\beta_2}{ds} + (z+w)\frac{d\beta}{ds}; \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \gamma \frac{\partial w}{\partial s} \\ \qquad + \frac{d\zeta}{ds} + (x+u)\frac{d\gamma_1}{ds} + (y+v)\frac{d\gamma_2}{\partial s} + (z+m)\frac{d\gamma}{ds}. \end{cases}$$

Ces équations se simplifient beaucoup au moyen des considérations suivantes.

Les neuf cosinus α, β, γ.... ne sont pas indépendants les uns des autres; car, α, β, γ sont les cosinus des angles que forme une certaine direction déterminée avec les axes des x', y', z'; de même α_1, β_1, γ_1 sont les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par une se-

conde direction, et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ par une troisième. On a, entre les cosinus relatifs à une même direction les relations suivantes :

$$(181) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \ , \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \ , \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \ . \end{cases}$$

De plus, ces trois directions sont celles des axes x, y, z et sont, par conséquent, perpendiculaires les unes des autres; on a donc, en considérant successivement les angles formés par deux de ces directions :

$$(182) \quad \begin{cases} \alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma = 0 \ , \\ \alpha\,\alpha_1 + \beta\,\beta_1 + \gamma\,\gamma_1 = 0 \ , \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Enfin, il existe aussi des relations entre les ξ, η, ζ et ces cosinus. En effet, la direction (α, β, γ) coïncide avec l'élément de la ligne des centres de gravité, élément dont les projections sur les axes des x', y', z' sont représentées par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ et dont la longueur primitive était ds. Si cet élément s'est allongé de $\partial\, ds$, ∂ étant une quantité très petite du premier ordre, les projections de l'élément sur les trois axes peuvent s'exprimer par

$$\alpha ds\,(1 + \partial) \ , \qquad \beta ds\,(1 + \partial) \ , \qquad \gamma ds\,(1 + \partial) \ ;$$

et l'on a par conséquent les rapports :

$$(183) \quad \frac{d\xi}{ds} = \alpha\,(1 + \partial) \ , \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta\,(1 + \partial) \ , \quad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma\,(1 + \partial) \ .$$

En différentiant maintenant par rapport à s les équations (181) qui expriment des relations entre les cosinus, on a les suivantes :

$$(184) \quad \begin{cases} \alpha_1 \dfrac{d\alpha_1}{ds} + \beta_1 \dfrac{d\beta_1}{ds} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma_1}{ds} = 0, \\ \alpha_2 \dfrac{d\alpha_2}{ds} + \beta_2 \dfrac{d\beta_2}{ds} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_2}{ds} = 0, \\ \alpha \dfrac{d\alpha}{ds} + \beta \dfrac{d\beta}{ds} + \gamma \dfrac{d\gamma}{ds} = 0. \end{cases}$$

En différentiant de même les équations (182) qui expriment d'autres relations entre les cosinus, et en introduisant, pour simplifier, trois

nouvelles notations, r_1, r_2, r dont on verra plus loin la signification géométrique, on a

$$(185)\quad \begin{cases} \alpha_2 \dfrac{d\alpha}{ds} + \beta_2 \dfrac{d\beta}{ds} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma}{ds} = -\left(\alpha \dfrac{d\alpha_2}{ds} + \beta \dfrac{d\beta_2}{ds} + \gamma \dfrac{d\gamma_2}{ds}\right) = r_1, \\ \alpha \dfrac{d\alpha_1}{ds} + \beta \dfrac{d\beta_1}{ds} + \gamma \dfrac{d\gamma_1}{ds} = -\left(\alpha_1 \dfrac{d\alpha}{ds} + \beta_1 \dfrac{d\beta}{ds} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma}{ds}\right) = r_2, \\ \alpha_1 \dfrac{d\alpha_2}{ds} + \beta_1 \dfrac{d\beta_2}{ds} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma_2}{ds} = -\left(\alpha_2 \dfrac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \dfrac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_1}{ds}\right) = r. \end{cases}$$

Si maintenant l'on multiplie les équations (180) posées tout à l'heure entre les quotients différentiels de u, v, w, d'abord par α_1, β_1, γ_1, puis par α_2, β_2, γ_2, puis par α, β, γ, et si l'on additionne chaque fois, on obtient, en tenant compte des équations (181), (182), (183), (184), (185), les formules plus simples suivantes, en retranchant 1 des deux membres de la dernière :

$$(186)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial s} + r(y+v) - r_2(z+w), \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial s} + r_1(z+w) - r(x+u), \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial s} + r_2(x+u) - r_1(y+u) + \partial. \end{cases} \quad (*)$$

(*) M. Boussinesq, dans un remarquable mémoire déjà cité à la Note finale du § 28 : *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres*, présenté à l'Académie le 3 avril 1871 (*Comptes rendus*, t. LXXII, p. 407), et inséré au journal de M. Liouville, donne, à propos de l'examen qu'il fait de la théorie de M. Kirchhoff sur les tiges, une démonstration plus simple et plus directe des formules (186), qui dispense de la considération des axes fixes ou extérieurs x', y', z' et qui met plus en évidence la signification de ces formules.

Elle se fonde sur ce que x, y, z
(a) et $x+u$, $y+v$, $z+w$

étant, avant et après les déplacements, les coordonnées d'une molécule dans le système d'axes des x, y, z dont l'origine O est à la distance s de l'extrémité de la tige, les coordonnées de la même molécule dans un système d'axes ayant leur origine O_1 à une distance $OO_1 = ds$ de l'autre, auront été, avant les déplacements :

$$x,\quad y,\quad z - ds,$$

et seront, après les déplacements, en appelant ∂ la proportion de la dilation éprouvée :

$$(b)\ x + u - \frac{\partial u}{\partial z}ds + \frac{\partial u}{\partial s}ds,\quad y + v - \frac{\partial v}{\partial z}ds + \frac{\partial v}{\partial s}ds,\quad z - ds(1+\partial) + w - \frac{\partial w}{\partial z}ds + \frac{\partial w}{\partial z}ds;$$

puis, à égaler ces secondes coordonnées à ce qu'on trouve en transformant les premières ($x+u$, $y+v$, $z+w$) d'un système d'axes dans l'autre.

Pour cette transformation, il faut connaître les cosinus des angles des directions x, y, z, avec celles, que nous appellerons x_1, y_1, z_1, des coordonnées du second système. Comme

Si maintenant les formules (179) du § 48, p. 415 doivent représenter des déplacements réellement possibles d'éléments appartenant à un corps continu, elles doivent satisfaire à ces équations, à cela près de quantités d'ordre supérieur de petitesse.

Nous pouvons encore remarquer que u, v et w sont toujours très petits par rapport à x, y, z, et que la différentiation de ces quantités par rapport à z aura pour résultat d'abaisser d'un degré l'ordre de leur petitesse; ce qui n'aura pas lieu, en général, dans la différentiation par rapport à s; de sorte que les quotients différentiels, par rapport à s peuvent, en général, être négligés vis-à-vis des quotients différentiels par rapport à z. Les formules (186) se réduisent, ainsi, aux suivantes :

$$(186\ b)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= ry - r_2 z\ , \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= r_1 z - rx\ , \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= r_2 x - r_1 y + \partial\ . \end{aligned}\right. \quad (^*)$$

elles en diffèrent infiniment peu, on a, à cela près de quantités très petites du second ordre

$$\cos(x_1, x) = 1\ ,\quad \cos(y_1, y) = 1\ ,\quad \cos(z_1, z) = 1\ ,$$

et les six autres cosinus des angles de x_1, y_1, z_1 avec x, y, z, sont infiniment petits et proportionnels à la distance $00_1 = ds$ des deux origines. Faisons donc

$$\cos(y, z_1) = r_1\, ds,\quad \cos(z, x_1) = r_2\, ds\ ,\quad \cos(x, y_1) = r\, ds.$$

En exprimant que $0_1 y_1$, $0_1 z_1$ sont perpendiculaires l'un à l'autre, ou que l'unité de longueur portée sur $0_1 y_1$ à partir de 0_1 donne zéro lorsqu'on la projette sur $0_1 z_1$, on a :

$$\cos(y_1 x)\cos(x z_1) + \cos(y_1 y)\cos(y z_1) + \cos(y_1 z)\cos(z z_1) = 0$$

qui se réduit, en effaçant les quantités du second ordre, à

$$\cos(z_1\, y) + \cos(y_1 z) = 0\,;$$

et comme on obtient deux relations semblables en exprimant la perpendicularité de z_1 sur x_1, de x_1 sur y_1, l'on a, pour les trois derniers cosinus

$$\cos(y_1, z) = -\, r_1\, ds\ ,\quad \cos(z_1, x) = -\, r_2\, ds\ ,\quad \cos(x_1, y) = -\, r\, ds.$$

Ayant ainsi les neuf cosinus des angles des axes partant de 0_1 sur les axes partant de 0, on peut, comme à l'ordinaire, exprimer les coordonnées nouvelles (b) en fonction des anciennes (a), en projetant sur les directions des nouvelles la distance $0_1 M$ remplacée par la ligne brisée formée par l'ensemble de ses projections $x+u$, $y+v$, $z-ds+w$ sur les directions des anciennes coordonnées. La troisième coordonnée fournit ainsi l'équation

$$z - ds(1+\partial) + w - \frac{\partial w}{\partial z}ds + \frac{\partial w}{\partial s}ds = -(x+u)\, r_2\, ds + (y+v)\, r_1 ds + z - ds + w\,;$$

ou, en réduisant, la troisième des équations (185) dont les deux premières s'obtiennent de même en supprimant les termes affectés de ds^2.

(*) Le raisonnement que vient de faire l'auteur est très valable quant à la possibilité de supprimer u, v, w devant x, y, z dans les parenthèses des équations (186). Il ne l'est pas, ou il manque de clarté quant à la suppression de $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$. Et l'on peut en dire autant du raisonnement fait par M. Kirchhoff lui-même pour motiver cette suppression, car il

Si l'on compare leurs coefficients avec ceux des valeurs de u, v, w irées des équations (179), § 48 page 415, on obtient :

$$(187) \quad \begin{cases} r_1 = -\dfrac{A'}{E\sigma\varkappa^2}, \\ r_2 = -\dfrac{B'}{E\sigma\lambda^2}, \\ r = -\dfrac{C'}{E\sigma\tilde{z}^2}. \end{cases}$$

Aucun terme de la valeur de $\frac{\partial w}{\partial z}$, ainsi déduite de la troisième (179), ne correspond au terme ∂ qui, en général, est d'ordre supérieur de petitesse. Mais si l'on suppose que la composante longitudinale C des forces soit très grande par rapport aux moments A′, B′, C′; et si, en conséquence, l'on ajoute les termes (179 *a*) aux expressions (179), comme nous avons dit qu'il fallait alors le faire, on a :

$$(187\,a) \qquad \partial = \frac{C}{\sigma E}.$$

---

dit (§ 2 du Mémoire cité) : « u, v, w étant infiniment petits vis-à-vis de $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$, supposé que $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ ne soient pas infiniment grands vis-à-vis de u, v, w, alors ces quotients différentiels selon s sont infiniments petits vis-à-vis de ceux selon z. »

Voici, je pense, comment on peut y suppléer, et rendre la véritable pensée de M. Kirchhoff, suivi par Clebsch dans tout ce qui est ici exposé.

Le petit déplacement relatif u (ou v, ou w) d'un point (x, y, z) d'un tronçon, ou l'excès du déplacement absolu de ce point sur celui du centre $(x=0, y=0, z=0)$ de la base du tronçon auquel il appartient, est supposé varier d'une manière continue ou nulle part brusque, d'un bout à l'autre de la tige. Si donc l est la longueur de celle-ci, $\frac{\partial u}{\partial s}$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{u_l - u_0}{l}$, u_l et u_0 étant les valeurs de u aux points qui sont, dans les deux tronçons extrêmes $s=0$, $s=l$, les homologues de celui (x, y, z) du tronçon proposé, ou ayant les mêmes petites coordonnées locales. Quant à $\frac{\partial u}{\partial z}$, si λ est la longueur du tronçon auquel le même point appartient, il sera de l'ordre de grandeur de $\frac{u_\lambda - u_0}{\lambda}$, u_λ et u_0 étant les valeurs de u aux points homologues de la base $z=\lambda$ et de la base $z=0$ de ce tronçon. Les numérateurs de ces deux fractions sont du même ordre de grandeur, savoir l'ordre de la grandeur de u lui-même qui s'annule au centre de la première base de chaque tronçon. Le dénominateur de la première est infiniment ou incomparablement plus grand que le dénominateur de la seconde. Donc les $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial s}$ sont incomparablement plus petits que les $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial z}$ et peuvent être effacés devant ceux-ci.

La considération des termes (179 *b*), page 415 qui dépendent des composantes transversales A, B supposées prépondérantes, n'est possible que dans l'hypothèse où les quotients différentiels de u, v, w par rapport à s sont du même ordre de grandeur que u, v, w. Si l'on admet, de plus, que dans les expressions de $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$, les termes $\frac{\partial r_1}{\partial s}$, $\frac{\partial r_2}{\partial s}$ deviennent très grands par rapport aux valeurs de r_1 et de r_2, on obtient, en conservant dans les équations (186) les termes correspondant à $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$,

$$\text{(187 } b\text{)} \qquad \frac{\partial r_2}{\partial s} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}\sigma\lambda^2}, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial s} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}\sigma\varkappa^2}.$$

Ce résultat a une signification simple. Il montre que la tige doit être sollicitée, en général, à recevoir une forme telle que les composantes latérales des forces ne deviennent disproportionnément grandes pour aucune des sections transversales. S'il n'est pas possible que la tige acquière en tous ses points une forme satisfaisant à cette condition, il y aura certains endroits pour lesquels les forces A, B, perpendiculaires à l'axe de l'élément, deviendront très grandes, et pour lesquels, par conséquent, l'un des quotients différentiels $\frac{\partial r_1}{\partial s}$, $\frac{\partial r_2}{\partial s}$, ou les deux à la fois, acquerront une très grande valeur. Pour voir la signification géométrique de ce fait, il suffit de remarquer que l'on a, d'après les expressions (179) donnant u et v :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{E}\sigma\lambda^2} = -r_2, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{E}\sigma\varkappa^2} = r_1.$$

On a déjà dit, au § 38, que les premiers membres des égalités qu'on vient d'écrire *représentent, à de très petites quantités près, les inverses des rayons de courbure des projections de la ligne des centres de gravité sur les deux plans passant par l'axe de l'élément, et respectivement par les deux axes principaux de la section transversale. C'est donc cette signification que possèdent, abstraction faite du signe, les quantités* r_1, r_2. Et, dans le voisinage des points dont il vient d'être question, un de ces rayons de courbure, au moins, doit changer très rapidement de valeur, puisque l'un des deux quotients différentiels $\frac{\partial r_1}{\partial s}$, $\frac{\partial r_2}{\partial s}$, au moins, devient très grand.

On peut trouver immédiatement aussi la signification géométrique

de r. On a déjà vu au § 27, page 168, que l'angle de torsion d'une tige de longueur l est exprimé par $b_0 l$. Dans le cas présent, l a pour valeur la longueur ds d'un élément, et l'on a

$$b_0 = -\frac{C'}{E\sigma\vartheta^2} = r. \qquad (^*)$$

la quantité désignée par r *a donc une signification telle que* rds *représente la* torsion *de l'élément* ds.

§ 50. — Conditions d'équilibre de la tige.

Pour déterminer complètement la forme affectée par la tige, nous allons établir les conditions de l'équilibre extérieur d'un élément de longueur ds, soumis aux forces émanant des éléments voisins ainsi qu'aux forces extérieures agissant sur l'intérieur de cet élément, et qui toutes ensemble maintiennent l'équilibre de la tige.

Dans la première partie de ce livre, nous avons (§ 28, notations 78 a et 78 b, page 170) désigné par A, B, C les composantes totales, et par A′, B′, C′ les moments de rotation totaux des forces agissant sur la base extrême d'une tige. Nous appliquerons les mêmes désignations aux forces agissant ici sur une des bases extrêmes d'un tronçon de tige, de longueur infiniment petite ds, les composantes étant prises suivant les axes mobiles x, y, z et les moments étant pris autour des mêmes axes, dont les deux premiers x, y sont tracés sur cette base par son centre de gravité, pris (§ 48, page 410) pour leur origine ; et le troisième, des z, lui est perpendiculaire.

Pour trouver les composantes parallèles aux axes fixes des x', y', z', nous projetterons sur chacun de ceux-ci les trois composantes A, B, C parallèles aux autres, x, y, z, et nous aurons, en additionnant les projections sur chacun des axes nouveaux :

Pour la composante totale parallèle à l'axe des x', des diverses forces agissant sur la base considérée du tronçon de tige :

$$A\cos(x,x') + B\cos(y,x') + C\cos(z,x') = A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha;$$

pour celle qui est parallèle à l'axe des y' :

$$A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta\ ;$$

et pour celle qui est parallèle à l'axe des z' :

$$A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma\ .$$

(*) Voyez § 48, note de l'équation (177), page 412, la définition de la quantité linéaire ϑ.

De même les moments de rotation autour de parallèles à ces trois mêmes axes fixes, tirées par l'origine des autres, ou par le centre de gravité de la base ou section, sur ou à travers laquelle agissent les forces dont nous nous occupons, seront toujours, d'après la signification des α, β, γ......,

$$(187\ c)\quad \left\{\begin{array}{ll} A'\alpha_1 + B'\alpha_2 + C'\alpha, & \text{autour de la parallèle aux } x', \\ A'\beta_1 + B'\beta_2 + C'\beta, \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{aux } y', \\ A'\gamma_1 + B'\gamma_2 + C'\gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{aux } z'. \end{array}\right.$$

Des composantes et des moments semblables agiront sur la seconde base extrême du tronçon, mais avec des signes contraires, et aussi avec des valeurs légèrement différentes, résultant de la substitution à s de $s + ds$, puisque ds est la hauteur ou longueur infiniment petite du tronçon considéré.

A toutes ces forces sur ou à travers les bases du tronçon, il convient de joindre les forces extérieures agissant (comme la pesanteur) à son intérieur. Si nous désignons par $X'dxdyds$, $Y'dxdyds$, $Z'dxdyds$, les composantes de ces forces extérieures parallèlement au système d'axes fixes, et s'exerçant sur un élément parallélépipède infiniment petit $dxdyds$ du corps ou de son tronçon, les sommes de ces composantes, étendues au tronçon entier dont le volume est $\sigma\, ds$, seront alors :

$$Uds\ ,\qquad Vds\ ,\qquad Wds\ ;$$

où U, V et W désignent les intégrales doubles

$$(187\ d)\quad U = \iint X'dxdy\ ,\qquad V = \iint Y'dxdy\ ,\qquad W = \iint Z'dxdy\ ,$$

étendues à toute la section transversale $\sigma = \iint dxdy$ de la tige.

Égalons maintenant à zéro les sommes des composantes dirigées suivant chacun des trois axes fixes, et effaçons les parties des composantes agissant en sens contraire qui ont les mêmes grandeurs ; nous aurons, en divisant par ds, ces trois premières équations d'équilibre qui sont celles des composantes, prises respectivement

$$(188)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{suivant les } x', & \dfrac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha) + U = 0\ , \\ \ldots\ \text{les } y', & \dfrac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta) + V = 0\ , \\ \ldots\ \text{les } z', & \dfrac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma) + W = 0\ . \end{array}\right.$$

Nous aurons les trois autres équations d'équilibre en additionnant de même les moments autour des parallèles aux trois axes fixes des x', y', z', tirées par le centre de gravité de la première base du tronçon, et en égalant à zéro les trois sommes obtenues. Indépendamment des moments, dont les valeurs $A'\alpha_1 + B'\alpha_2 + C'\alpha, \ldots$ ont été écrites ci-dessus, nous devons observer que les composantes, telles que A, B, des forces, donnent lieu chacune à un couple, car ces composantes sont appliquées à chacune des extrémités du tronçon de longueur ds, dans des directions opposées, avec des valeurs égales à cela près de différences infiniment petites. Les deux forces C, qui sont dirigées l'une et l'autre suivant l'axe du tronçon, et par conséquent à une différence près d'ordre supérieur, dans la même direction, ne donnent pas lieu à un couple.

Les moments des deux premiers couples sont :

$$Ads, \quad \text{autour de l'axe des } y,$$
$$-Bds, \quad \text{autour de l'axe des } x;$$

car si, comme précédemment, on suppose que, vu du côté de l'axe autour duquel le moment est pris, un couple positif doit tendre à produire une rotation dirigée dans le sens de la marche des aiguilles d'une montre, pour quelqu'un qui adossé à cet axe regarderait son origine, et si on se rappelle que, vue de l'axe positif des x, l'aiguille d'une montre se dirigerait de l'axe positif y à l'axe positif z, on voit que les axes des couples ci-dessus sont dirigés suivant l'axe des y positifs, et suivant l'axe des x négatifs.

Les moments composants, par rapport aux axes fixes des x', y', z' seront par conséquent :

$$(188\,a) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_2 Ads, & \beta_2 Ads, & \gamma_2 Ads, \\ -\alpha_1 Bds, & -\beta_1 Bds, & -\gamma_1 Bds, \end{array} \right.$$

A ces couples (187 c) et (188 a), nous devons joindre ceux qui proviennent des forces extérieures agissant sur l'intérieur de l'élément.

D'après les notations établies plus haut, les moments totaux de ces forces ne sont autre chose que les sommes des moments des forces $X'dxdyds$, $Y'dxdyds$, $Z'dxdyds$, autour de lignes menées parallèlement aux axes fixes des x', y', z' par l'origine des coordonnées mobiles du tronçon, c'est-à-dire par le point $x' = \xi$, $y' = \eta$, $z' = \zeta$, centre de gravité de l'une de ses deux bases. Les points d'application de ces trois forces agissant sur l'élément parallélépipède $dxdyds$ du tronçon infiniment court $\sigma\,ds$ peuvent être placés en un point quelconque du vo-

lume, infiniment petit en tous sens, de cet élément, par exemple à l'angle de sa base dont les coordonnées mobiles sont $x, y, 0$; car le choix de tout autre point n'augmenterait qu'infiniment peu les bras de levier ; on peut donc considérer ces points d'application comme placés tous sur cette base pour laquelle $z = 0$ dans le système des coordonnées x, y, z qui a pour origine le point $x' = \xi$, $y' = \eta$, $z' = \zeta$ (commencement du § 49).

Les trois moments de rotation dont il s'agit sont donc :

$$ds \iint [Z'(y' - \eta) - Y'(z' - \zeta)]\, dxdy \text{ , autour de la parallèle aux } x',$$
$$ds \iint [X'(z' - \zeta) - Z'(x' - \xi)]\, dxdy \text{ , ... aux } y',$$
$$ds \iint [Y'(x' - \xi) - X'(y' - \eta)]\, dxdy \text{ . . . . aux } z';$$

ou, si l'on y met pour $x' - \xi$, $y' - \eta$, $z' - \zeta$ leurs valeurs (179c) (page 417) $\alpha_1(x + u) + \alpha_2(y + v) + \alpha(z + w)$; $\beta_1(x + u)$..... en faisant $z = 0$, et négligeant les déplacements u, v, w devant x, y, z, on a :

$$ds \iint [Z'(\beta_1 x + \beta_2 y) - Y'(\gamma_1 x + \gamma_2 y)]\, dxdy \text{ ,}$$
$$ds \iint [X'(\gamma_1 x + \gamma_2 y) - Z'(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]\, dxdy \text{ ,}$$
$$ds \iint [Y'(\alpha_2 x + \alpha_1 y) - X'(\beta_1 x + \beta_2 y)]\, dxdy \text{ ,}$$

où les intégrales doivent être étendues à la section transversale tout entière.

Si on introduit les notations

$$(188\,b) \quad \begin{cases} U_1 = \iint X' x\, dxdy \text{ ,} & U_2 = \iint X' y\, dxdy \text{ ,} \\ V_1 = \iint Y' x\, dxdy \text{ ,} & V_2 = \iint Y' y\, dxdy \text{ ,} \\ W_1 = \iint Z' x\, dxdy \text{ ,} & W_2 = \iint Z' y\, dxdy \text{ ,} \end{cases}$$

on obtient, pour ces moments, les formes plus simples :

$$(188\,c) \quad \begin{cases} (\beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 - \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2)\, ds \text{ ,} \\ (\gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 - \alpha_1 W_1 - \alpha_2 W_2)\, ds \text{ ,} \\ (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 - \beta_1 U_1 - \beta_2 U_2)\, ds \text{ .} \end{cases}$$

Et si maintenant on égale à zéro les sommes des moments (187 c), (188 a), (188 c) autour des mêmes droites, en effaçant les parties de celles du premier groupe qui viennent de forces appliquées en sens opposés sur les deux bases du tronçon, et dont les moments se détruisent, puis si l'on divise par ds, on a ces trois autres équations, qui sont celles d'équilibre de rotation autour de parallèles aux x', y', z' tirés par le point $x' = \xi$, $y' = \eta$, $z' = \zeta$:

$$(189)\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{ds}(A'\alpha_1 + B'\alpha_2 + C'\alpha) + A\alpha_2 - B\alpha_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 - \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 = 0\,, \\ \frac{d}{ds}(A'\beta_1 + B'\beta_2 + C'\beta) + A\beta_2 - B\beta_1 + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 - \alpha_1 W_1 - \alpha_2 W_2 = 0\,, \\ \frac{d}{ds}(A'\gamma_1 + B'\gamma_2 + C'\gamma) + A\gamma_2 - B\gamma_1 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 - \beta_1 U_1 - \beta_2 U_2 = 0\,. \end{array}\right.$$

Les équations (188) et (189) donnent les six conditions d'équilibre du tronçon infiniment court dont il s'agit. Supposons effectuées les différentiations qui y sont indiquées, et multiplions les équations de chaque système, d'abord par α_1, β_1, γ_1, puis par α_2, β_2, γ_2, puis α, β, γ, et additionnons chaque fois en ayant égard aux équations (185) page 420 donnant les doubles valeurs trinômes de r_1, r_2, r, et aux relations (181) et (182) entre les cosinus α, β, γ, α_1, ..., le système (188) donnera pour les équations d'équilibre de composantes suivant les x', y', z',

$$(190)\quad\left\{\begin{array}{l} \frac{dA}{ds} + (rB - r_2 C) + \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W = 0\,, \\ \frac{dB}{ds} + (r_1 C - rA) + \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W = 0\,, \\ \frac{dC}{ds} + (r_2 A - r_1 B) + \alpha U + \beta V + \gamma W = 0\,. \end{array}\right.$$

Pour construire de même les équations résultant du système (189), il faut remarquer que les additions indiquées de produits par $\alpha_1 = \cos(x', x)$, $\alpha_2 = \cos(x', y)$, $\alpha = \cos(x', z)$, $\beta_1 = \cos(y', x)$,...... des composantes et sommes de composantes de forces ou de moments suivant les x', y', z' qui entrent dans les équations (188) comme dans celles (189), reviennent à en déduire les sommes des composantes des mêmes forces et des mêmes couples suivant les axes mobiles des x, y, z, ou, au demeurant, à faire un changement de coordonnées ou de directions de décompositions. Cette remarque donne le moyen d'écrire immédiatement les termes des équations définitives, qui doi-

vent provenir des forces extérieures agissant sur l'intérieur des éléments; ce qui conduit à des formes plus simples. En décomposant ainsi les forces $X'dxdyds$, $Y'dxdyds$, $Z'dxdyds$ parallèlement aux axes x, y, z, on obtient manifestement les composantes :

$$(\alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z')\, dxdyds$$
$$(\alpha_2 X' + \beta_2 Y' + \gamma_2 Z')\, dxdyds$$
$$(\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z')\, dxdyds.$$

Les sommes des moments des couples procédant de ces forces dans le tronçon ϖds, pris par rapport aux axes, des x, y, z, sont les suivantes :

$$ds \iint (\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z')\, ydxdy = (\alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2)\, ds,$$
$$- ds \iint (\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z')\, xdxdy = -(\alpha U_1 + \beta V_1 + \gamma W_1)\, ds.$$
$$ds \iint [(\alpha_2 X' + \beta_2 Y' + \gamma_2 Z')\, x - (\alpha_1 X' + \beta_1 Y' + \gamma_1 Z')\, y]\, dxdy =$$
$$= (\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 - \alpha_1 U_2 - \beta_1 V_2 - \gamma_1 W_2)\, ds.$$

Les équations (189), en les multipliant et les additionnant comme il est dit plus haut, donnent les suivantes où les premiers termes proviennent de réduction faites, comme pour les équations (190), en tenant compte des équations (185) qui définissent r_1, r_2, r, ainsi que des relations des cosinus (181) et (182), et où les derniers termes, affectés des U, V, W, sont obtenus au moyen des considérations que nous venons de présenter :

$$(191) \quad \begin{cases} \dfrac{dA'}{ds} + B'r - C'r_2 - B + \alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{dB'}{ds} + C'r_1 - A'r + A - \alpha U_1 - \beta V_1 - \gamma W_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{dC'}{ds} + A'r_2 - B'r_1 + \alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 - \alpha_1 U_2 - \beta_1 V_2 - \gamma_1 W_2 = 0. \end{cases}$$

Au reste, si l'on avait exécuté sur les termes en U, V, W, U_1,.... des équations (189) les mêmes opérations que sur les termes en A, B, C, A', B', C', c'est-à-dire si on les avait multipliés comme ceux-ci successivement par α_1, β_1, γ_1 puis par α_2, β_2, γ_2, puis par α, β, γ en ajoutant chaque fois les produits ainsi donnés par les trois équations, on aurait trouvé toujours les termes en U, V,..... des équations (191), mais moyennant qu'on se fût servi, pour simplifier les résultats de ces mul-

tiplications et additions, des relations connues suivantes entre les neuf cosinus α, β.....

$$(192)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2\gamma - \gamma_2\beta, & \beta_1 = \gamma_2\alpha - \alpha_2\gamma, & \gamma_1 = \alpha_2\beta - \beta_2\alpha, \\ \alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1, & \beta_2 = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1, & \gamma_2 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1, \\ \alpha = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, & \beta = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, & \gamma = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2. \end{cases} \quad (*)$$

Les équations (190) et (191) peuvent être appliquées partout à la place des équations (188) et (189), et elles en tiennent parfaitement lieu.

Si maintenant on observe que les quantités (187 *d*) U, V, W,..... dépendent en général des ξ, η, ζ définis au commencement du § 49, et par conséquent aussi des α, β,..... ; et si, au moyen des équations (187) on exprime les A′, B′, C′ en fonction de r_1, r_2, r qui sont aussi, par définition, des fonctions de α, β.....; si, ensuite, l'on considère qu'au moyen de leurs six relations (181), (182), les neuf quantités α, β,.... peuvent s'exprimer par trois d'entre elles seulement, on voit que les équations d'équilibre ci-dessus, soit sous la forme (188), (189), soit sous la forme (190), (191), forment un système à six inconnues qui sont les trois composantes A, B, C, et les trois des neuf cosinus α, β,.... en fonction desquels tous les autres ont été exprimés. Je montrerai, au moyen de quelques exemples, comment on doit faire usage de ces équations.

§ 51. — Examen des cas où les extrémités de la tige, seulement, sont sollicitées par des forces ou par des couples.

Considérons le cas où les extrémités de la tige, seulement, sont soumises à des forces ou à des couples, et où aucune force, émanant de l'extérieur, n'agit sur son intérieur. Alors les composantes et moments U, V, W, U_1...., W_2 de ces forces s'annulent, et les équations (188), se réduisant à $\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha) = 0$,....., sont immédiatement intégrables; elles donnent, K, L, T désignant des constantes arbitraires, dont la dernière représente évidemment une *tension* longitudinale de la tige :

$$(193)\quad A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha = K, \quad A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta = L, \quad A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma = T.$$

(*) Ces relations (192) entre les cosinus des angles de deux systèmes d'axes rectangulaires sont démontrées dans la seconde partie de la mécanique analytique de Lagrange (section IX, n° 6). On en trouve aussi au Journal de M. Liouville, t. IX, 1844, p. 270, une démonstration tirée très directement des relations plus connues et presque évidentes (181) et (182).

Les premiers membres de ces équations ne représentent rien autre chose que les composantes totales, parallèlement aux axes fixes x', y', z', des forces agissant sur une section transversale quelconque σ. Ces composantes étant constantes, il s'en suit que *la résultante des forces qui se produisent dans une section transversale a partout la même grandeur et la même direction, en quelque sens que les diverses sections transversales puissent être dirigées par suite de la flexion de la tige.*

On en tire, au moyen de multiplications par α_1, β_1, γ_1..... suivies d'additions :

$$(193\ a)\quad A = K\alpha_1 + L\beta_1 + T\gamma_1;\quad B = K\alpha_2 + L\beta_2 + T\gamma_2;\quad C = K\alpha + L\beta + T\gamma.$$

Si dans les équations (189) page 428, on introduit ces valeurs des composantes A, B, C, et si on remplace, en même temps, les moments A′, B′, C′ par leurs valeurs $A' = -E\sigma\varkappa^2 r_1$, $B' = -E\sigma\lambda^2 r_2$, $C' = -E\sigma\mathfrak{z}^2 r$, tirées de (187) p. 422, on a trois équations dont on déduit, au moyen de multiplications par α_1, β_1, γ_1 puis par α_2..... suivies d'additions, et en ayant égard aux équations (185) qui définissent r_1, r_2, r, en α_1, α_2,..., ce système remarquable :

$$(194)\quad \left\{\begin{aligned} &\varkappa^2 \frac{dr_1}{ds} + (\lambda^2 - \mathfrak{z}^2)\, r_2 r + \frac{1}{E\sigma}(K\alpha_2 + L\beta_2 + T\gamma_2) = 0\ , \\ &\lambda^2 \frac{dr_2}{ds} + (\mathfrak{z}^2 - \varkappa^2)\, r r_1 - \frac{1}{E\sigma}(K\alpha_1 + L\beta_1 + T\gamma_1) = 0\ , \\ &\mathfrak{z}^2 \frac{dr}{ds} + (\varkappa^2 - \lambda^2)\, r_1 r_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

qui, comme le remarque Kirchhoff, est exactement identique à celui auquel conduit le problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe. L'assimilation se fait immédiatement en mettant, au lieu de s, le temps, en désignant par $\varkappa^2$, λ^2, $\mathfrak{z}^2$, les rayons principaux d'inertie du corps par rapport au point fixe, et par α, β, γ,.... les cosinus des angles formés, avec un système fixe de coordonnées, par les axes d'un système invariablement lié au corps (*).

(*) On trouve en effet, par exemple, dans le *Cours de Mécanique* fait en 1853 par Duhamel à l'École polytechnique, t. II, n° 110. p. 170, ces équations (3) du mouvement de rotation, autour d'un point fixe, d'un corps solide dont A, B, C sont les moments d'inertie principaux, équations où p, q. r sont les composantes de la rotation autour des x, y, z et L, M, N, des quantités dépendant des forces extérieures appliquées au corps quand il y en a :

$$A\frac{\partial p}{\partial t} = (B - C)\,qr + L;\quad B\frac{\partial q}{\partial t} = (C - A)\,rp + M;\quad C\frac{\partial r}{\partial t} = (A - B)\,pq + N.$$

Le problème des déformations finies à double courbure d'une tige droite est donc résoluble exactement dans des cas analogues à ceux de la solution exacte du problème de la rotation d'un solide. On en verra plus loin des exemples.

Il faut remarquer que, dans les équations (194) les grandeurs $\varkappa^2$, λ^2, ϑ^2 sont des quantités très petites du second ordre. Pour que ces équations (194) puissent être satisfaites, il faut donc, de deux choses l'une :

Ou bien les expressions

$$K\alpha_2 + L\beta_2 + T\gamma_2 , \qquad K\alpha_1 + L\beta_1 + T\gamma_1 ,$$

sont partout très petites, K, L, T restant de grandeur modérée ; dans ce cas les composantes de la force qui agit sur l'extrémité, prises selon les axes principaux d'une section transversale quelconque, sont donc très petites, c'est-à-dire que toutes les sections transversales se tiennent, à peu de chose près, perpendiculaires à la force appliquée à l'extrémité, et que toute la tige est alors à peu près droite, dirigée parallèlement à cette force.

Ou bien il peut y avoir des conditions extérieures rendant cette condition impossible pour certains points de la tige ; par exemple, pour un ressort ou un fil élastique (*einer Feder*), qui, en certains de ses points devrait faire un angle fini avec la direction de cette force. En ces points exceptionnels, il arrive forcément que la courbure change très rapidement, et que, par suite, quelques-uns des termes qui, dans les équations (194) sont multipliés par $\varkappa^2$, λ^2, ϑ^2, deviennent très grands ; de cette manière, ces équations restent possibles même pour les points où les composantes ci-dessus cessent d'être très petites. Il peut encore arriver que K, L, T soient très petits ; alors il n'y a aucun point exceptionnel, et les équations (194) peuvent être vérifiées en tous les points.

Un cas fort intéressant est celui où K, L, T disparaissent, c'est-à-dire où la tige n'est soumise qu'à des couples, et nullement à des forces de traction. Les composantes A, B, C sont alors nulles en chaque point de la tige, et chacun de ses éléments est seulement courbé sans être étendu. Dans ce cas, les équations (194) deviennent semblables à celles qui expriment la rotation d'un corps dont on abstrait la pesanteur, ou bien d'un corps qui tourne autour de son centre de gravité, car elles se réduisent à

$$(194\,a)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varkappa^2 \frac{dr_1}{ds} + (\lambda^2 - \vartheta^2)\, r_2 r = 0 , \\ &\lambda^2 \frac{dr_2}{ds} + (\vartheta^2 - \varkappa^2)\, r r_1 = 0 , \\ &\vartheta^2 \frac{dr}{ds} + (\varkappa^2 - \lambda^2)\, r_1 r_2 = 0 . \end{aligned} \right.$$

Ces équations présentent une particularité remarquable : elles ne

contiennent que les rotations r_1, r_2, r, et elles sont tout à fait indépendantes des coefficients α_1, β_1, γ_1, α_2,... Le problème peut donc être divisé en deux parties ; la première consistant à déterminer r, r_1, r_2, au moyen des équations ci-dessus, et la seconde ayant pour objet la recherche des coefficients α, β.... après que l'on aurait trouvé la valeur des r, r_1, r_2.

La solution de la première partie du problème s'obtient en multipliant les équations (194 a) respectivement par r_1, r_2, r, et en additionnant les résultats, puis en les multipliant par $\kappa^2 r_1$, $\lambda^2 r_2$, $\varpi^2 r$, et en additionnant de nouveau. On obtient les deux équations suivantes qui sont intégrables :

$$\kappa^2 r_1 \frac{dr_1}{ds} + \lambda^2 r_2 \frac{dr_2}{ds} + \varpi^2 r \frac{dr}{ds} = 0 \; ,$$

$$\kappa^4 r_1 \frac{dr_1}{ds} + \lambda^4 r_2 \frac{dr_2}{ds} + \varpi^4 r \frac{dr}{ds} = 0 \; ;$$

et dont l'intégration donne, h et m désignant deux constantes arbitraires,

$$(195) \quad \begin{cases} \kappa^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 + \varpi^2 r^2 = h^2, \\ \kappa^4 r_1^2 + \lambda^4 r_2^2 + \varpi^4 r^2 = m^2. \end{cases}$$

Si maintenant, au moyen de ces équations, on exprime deux des quantités r en fonction de la troisième et si l'on introduit le résultat dans l'une des équations (194 a), écrites ensemble

$$(195\,a) \qquad ds = \frac{\kappa^2\,dr_1}{(\varpi^2 - \lambda^2) r_2 r} = \frac{\lambda^2\,dr_2}{(\kappa^2 - \varpi^2) r r_1} = \frac{\varpi^2\,dr}{(\lambda^2 - \kappa^2) r_1 r_2},$$

on obtient ds exprimé en fonction de l'une des grandeurs r, et, par intégration, s en fonction des mêmes quantités. En résolvant par rapport à r l'équation ainsi obtenue, on a r exprimé en s, et en opérant de la même manière sur chacune des deux autres équations (195 a), on a, en fonction de s, les expressions de r, r_1, r_2. La théorie des fonctions elliptiques sert à déterminer les résultats définitifs (*).

Si nous supposons trouvées les quantités r, nous pourrons, de la manière suivante, résoudre la seconde partie du problème.

(*) Voyez analogiquement, même *Cours de Mécanique* de Duhamel, le n° 120, où le solide, tournant autour d'un point, n'est sollicité par aucune force extérieure, et où on obtient, équation (23), p. 183, $dt = dr$ divisé par le produit des deux radicaux recouvrant des trinômes du second degré en r.

Empruntons au système (184), (185) les trois équations

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \beta \frac{d\beta}{ds} + \gamma \frac{d\gamma}{ds} = 0, \quad \alpha_1 \frac{d\alpha}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{ds} = -r_2, \quad \alpha_2 \frac{d\alpha}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{ds} = r_1.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par α, α_1, α_2, puis par β, β_1, β_2, puis par γ, γ_1, γ_2, et additionnons chaque fois, nous aurons :

$$(196) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1, \qquad \frac{d\beta}{ds} = r_1\beta_2 - r_2\beta_1, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1.$$

Par la combinaison d'autres équations prises dans le système (184), (185), nous obtiendrons, tout à fait de la même manière :

$$(197) \qquad \frac{d\alpha_1}{ds} = r_2\alpha - r\alpha_2, \qquad \frac{d\beta_1}{ds} = r_2\beta - r\beta_2, \qquad \frac{d\gamma_1}{ds} = r_2\gamma - r\gamma_2,$$

et

$$(197\,a) \qquad \frac{d\alpha_2}{ds} = r\alpha_1 - r_1\alpha, \qquad \frac{d\beta_2}{ds} = r\beta_1 - r_1\beta, \qquad \frac{d\gamma_2}{ds} = r\gamma_1 - r_1\gamma.$$

Les premières équations des trois groupes (196), (197) et (197 *a*) forment ensemble un système de trois équations ne contenant que les α, ou les cosinus des angles des axes fixes x', y', z' avec l'axe x d'inertie d'une section σ; de même les trois secondes forment un système qui ne contient que ceux β, faits avec l'axe d'inertie y; et, les dernières, un système qui ne contient que ceux γ faits avec l'axe particulier des z, ou avec l'élément ds. On peut satisfaire à l'un de ces systèmes, au dernier par exemple, en posant

$$(198) \qquad \gamma_1 = \frac{\kappa^2 r_1}{m}, \qquad \gamma_2 = \frac{\lambda^2 r_2}{m}, \qquad \gamma = \frac{\epsilon^2 r}{m};$$

car, par cette hypothèse, les équations de ce troisième système se transforment identiquement en celles (194 *a*); et d'un autre côté, à cause de la deuxième équation (194), les grandeurs γ_1, γ_2, γ ellesmêmes satisfont à

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2 = 1;$$

équation qui n'est pas une de celles (181) ni (182), données comme relations entre les neuf cosinus, mais qui peut en être analytiquement déduite (*) et qui exprime d'ailleurs une condition devant comme

(*) Voir le Mémoire de 1844 *sur les relations entre les cosinus*, etc., cité en note à propos des relations (192), p. 430.

celles (181) être remplie, puisque γ_1, γ_2, γ représentent les cosinus des angles que forme l'axe fixe des z' avec les trois axes rectangulaires des x, y, z, qui sont liés à l'élément de la tige. Sans doute, l'hypothèse exprimée par les équations (198) donne une direction déterminée à l'axe z' dont la position avait d'abord été supposée tout à fait arbitraire, mais cette restriction n'ôte rien à la généralité de la solution. Il suffit, pour l'étude de la question, d'admettre la possibilité de la direction donnée par cette hypothèse.

Si les γ sont connus, on peut, par les relations suivantes, déterminer les α et les β :

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 - \gamma_1^2, & \alpha_1\alpha + \beta_1\beta &= -\gamma_1\gamma, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1 - \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha + \beta_2\beta &= -\gamma_2\gamma, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1 - \gamma^2, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 &= -\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

D'après les trois équations de gauche, on peut poser, w_1, w_2, w étant trois angles quelconques,

$$(199) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{1-\gamma_1^2}\cos w_1, & \beta_1 &= \sqrt{1-\gamma_1^2}\sin w_1, \\ \alpha_2 &= \sqrt{1-\gamma_2^2}\cos w_2, & \beta_2 &= \sqrt{1-\gamma_2^2}\sin w_2, \\ \alpha &= \sqrt{1-\gamma^2}\cos w, & \beta &= \sqrt{1-\gamma^2}\sin w, \end{aligned} \right.$$

et les trois équations de droite sont aussi satisfaites si, entre ces angles et les γ, on a :

$$(199\,a) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(w_1 - w) &= -\frac{\gamma\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma_1^2}}, \\ \cos(w - w_2) &= -\frac{\gamma_2\gamma}{\sqrt{1-\gamma_2^2}\sqrt{1-\gamma^2}}, \\ \cos(w_2 - w_1) &= -\frac{\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{1-\gamma_1^2}\sqrt{1-\gamma_2^2}}. \end{aligned} \right.$$

Ces trois dernières équations permettront de calculer les trois angles w lorsque l'un d'eux sera connu. Pour en déterminer un, on peut employer le procédé suivant.

Reprenons les relations (192) déjà données au § 50, p. 450 :

$$(200) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, & \alpha_1 &= \beta_2\gamma - \beta\gamma_2, & \alpha_2 &= \beta\gamma_1 - \beta_1\gamma, \\ \beta &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, & \beta_1 &= \gamma_2\alpha - \gamma\alpha_2, & \beta_2 &= \gamma\alpha_1 - \gamma_1\alpha, \\ \gamma &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta - \alpha\beta_2, & \gamma_2 &= \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta. \end{aligned} \right.$$

Ces relations sont connues. On peut d'ailleurs les vérifier en élevant au carré les équations (200) et en les multipliant deux à deux l'une par l'autre; on constate qu'elles deviennent identiques lorsqu'on tient compte des relations plus connues (181) et (182). Cette vérification peut laisser du doute sur les signes des seconds membres, car elle s'opérerait de la même manière si tous les signes de ces membres étaient changés à la fois. Ces deux systèmes différents de signes correspondent à deux systèmes différents d'axes de coordonnées, et les signes à adopter doivent être évidemment les mêmes pour tous les seconds membres, quelle que soit la position des axes que l'on considère. Or, on a déjà dit au § 49 que les axes doivent être placés de telle manière que, par une rotation convenable, les axes positifs du système variable puissent être rendus parallèles aux axes positifs correspondants du système fixe. Dans cette position, l'on a $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma = 1$, et tous les autres cosinus s'évanouissent. Mais comme, alors, les équations (200), avec les signes que l'on y a donnés aux seconds membres, satisfont à cette condition, ces mêmes signes doivent être maintenus pour toute autre position des axes, tant que l'on conserve l'hypothèse relative à la direction des axes positifs l'un par rapport à l'autre.

Cependant, les équations (199) donnent :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tang} w, \qquad \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{tang} w_1, \qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \operatorname{tang} w_2;$$

ou

$$w = \operatorname{arc\,tang} \frac{\beta}{\alpha}, \qquad w_1 = \operatorname{arc\,tang} \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad w_2 = \operatorname{arc\,tang} \frac{\beta_2}{\alpha_2};$$

ce qui fournit par différentiation

$$dw = \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad dw_1 = \frac{\alpha_1 d\beta_1 - \beta_1 d\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad dw_2 = \frac{\alpha_2 d\beta_2 - \beta_2 d\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Si on met pour les $d\beta$, $d\alpha$ leurs valeurs données par (196), (197) et si l'on se sert des trois dernières relations (200) entre les cosinus α, β, γ, pour simplifier les numérateurs, on a :

$$(201) \quad dw = -\frac{r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2}{1-\gamma^2}\,ds, \quad dw_1 = -\frac{r_2\gamma_2 + r\gamma}{1-\gamma_1^2}\,ds, \quad dw_2 = -\frac{r\gamma + r_1\gamma_1}{1-\gamma_2^2}\,ds.$$

Comme les seconds membres contiennent seulement des quantités que l'on a déjà exprimées en fonction de s, on obtiendra immédiatement w, w_1, w_2, ou l'un d'entre eux, par intégration.

En résumé, les équations (195) et (195 a) nous donnent les r en fonction de s; les équations (198), (199), (199 a) et (201), nous donnent le moyen d'exprimer, aussi en fonction de s, les cosinus α.... Et si nous calculons ξ, η, ζ en intégrant les équations

$$\frac{d\xi}{ds}=\alpha\ , \qquad \frac{d\eta}{ds}=\beta\ , \qquad \frac{d\zeta}{ds}=\gamma\ ,$$

qui sont celles (185) de la page 419 en négligeant la petite quantité ∂ devant l'unité, nous aurons ξ, η, ζ exprimés en fonction de l'arc s de l'axe de la tige, et par conséquent les équations déterminant la forme courbe prise par cet axe.

§ 52. — Application au cas d'une tige dont les rayons principaux d'inertie sont égaux, et dont les extrémités sont sollicitées seulement par des couples (*).

J'appliquerai les résultats de l'étude précédente à un cas dans lequel on peut employer les fonctions elliptiques et qui se présente lorsqu'on a :

$$\varkappa=\lambda\ ,$$

c'est-à-dire lorsque les moments d'inertie principaux $\varkappa$, λ de la section transversale deviennent égaux, comme il arrive, par exemple, lorsque cette section transversale est un cercle, ou bien un carré, un triangle équilatéral, une croix de Malte, etc. Les équations (194) page 451, en faisant

$$\varepsilon=\frac{\varpi^2-\varkappa^2}{\varkappa^2}\,r\ ,$$

prennent alors la forme

$$\frac{dr}{ds}=0\ , \qquad \frac{dr_1}{ds}=\varepsilon r_2\ , \qquad \frac{dr_2}{ds}=-\varepsilon r_1\ .$$

La première de ces équations montre que la torsion r a la même valeur constante dans tous les éléments, en sorte que ce que nous désignons par ε est aussi une constante. Par suite, les deux dernières

(*) Cas analogue à celui de la rotation, autour de son centre de gravité, d'un *solide de révolution* (même *Cours* de Duhamel, n° 121).

des mêmes trois équations, contenant r_1 et r_2, s'intègrent et donnent les deux suivantes où a et b désignent des constantes arbitraires :

$$(202) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_1 &= a \sin \varepsilon s + b \cos \varepsilon s \,, \\ r_2 &= a \cos \varepsilon s - b \sin \varepsilon s \,. \end{aligned} \right.$$

Ces intégrales ont la généralité nécessaire puisqu'elles contiennent deux constantes arbitraires. Si l'on introduit ces valeurs de r_1 et r_2 dans les équations (195), elles donnent, vu $\varkappa = \lambda$, et $r_2^2 + r_1^2 = a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} h^2 &= \varkappa^2 (a^2 + b^2) + \varepsilon^2 r^2 \,, \\ m^2 &= \varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2 \,. \end{aligned}$$

Les équations (198) page 434, donnent, vu les valeurs de r_1, r_2, m^2,

$$(203) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \varkappa^2 \frac{a \sin \varepsilon s + b \cos \varepsilon s}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \,, \\ \gamma_2 &= \varkappa^2 \frac{a \cos \varepsilon s - b \sin \varepsilon s}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \,, \\ \gamma &= \frac{\varepsilon^2 r}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \,. \end{aligned} \right.$$

La première des équations (201), page 436, devient, C désignant une nouvelle constante arbitraire :

$$\mathrm{W} = \mathrm{C} - \frac{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}}{\varkappa^2} s \,.$$

On a alors, au moyen de (198) et de (199) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varkappa^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \cos \left(\mathrm{C} - \frac{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}}{\varkappa^2} s \right), \\ \beta &= \frac{\varkappa^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \sin \left(\mathrm{C} - \frac{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}}{\varkappa^2} s \right), \\ \gamma &= \frac{\varepsilon^2 r}{\sqrt{\varkappa^4 (a^2 + b^2) + \varepsilon^4 r^2}} \,; \end{aligned}$$

ou enfin, par intégration des équations (185) de la page 419 en les réduisant à $\frac{d\xi}{ds} = \alpha$, $\frac{d\eta}{ds} =$, $\frac{d\zeta}{ds} = \gamma$, comme nous avons déjà fait, par la

suppression de ∂ devant l'unité, et en appelant ξ_0, η_0, ζ_0, des constantes arbitraires :

$$\xi = \xi_0 - \frac{\varkappa^4\sqrt{a^2+b^2}}{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}\sin\left(C - \frac{s}{\varkappa^2}\sqrt{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}\right),$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{\varkappa^4\sqrt{a^2+b^2}}{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}\cos\left(C - \frac{s}{\varkappa^2}\sqrt{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}\right),$$

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\varpi^2 rs}{\sqrt{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}}.$$

Ces équations représentent une hélice dont l'axe est celui des z', cet axe dont la direction a été déterminée par les formules (198) (*). Plaçons l'origine à une extrémité de la tige, et supposons cette extrémité maintenue dans une direction fixe. Choisissons l'axe des x' de manière que la tangente à l'hélice, à l'origine, soit contenue dans le plan $x'z'$. Alors, pour $s = 0$, les valeurs de ξ, η, ζ, et de $\frac{d\eta}{ds}$ s'évanouissent aussi. On a donc :

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \zeta_0 = 0, \qquad C = 0 ;$$

et on obtient ainsi les équations ordinaires d'une hélice :

$$\xi = \rho\sin\frac{s}{\sqrt{\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}, \qquad \eta = \rho\cos\frac{s}{\sqrt{\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}, \qquad \zeta = \frac{hs}{2\pi\sqrt{\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}},$$

où, ρ désignant le rayon du cylindre de l'hélice, et h le pas, sont déterminés par les formules

$$\rho = \frac{\varkappa^4\sqrt{a^2+b^2}}{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}; \qquad \frac{h}{2\pi} = \frac{\varkappa^2\varpi^2 r}{\varkappa^4(a^2+b^2)+\varpi^4 r^2}.$$

Soit l la longueur de la tige; supposons qu'à son extrémité agissent

(*) Wantzell, ingénieur des ponts et chaussées et répétiteur à l'École polytechnique, mort en 1848, à l'âge de trente-quatre ans (voir sa biographie au numéro de septembre 1848 des *Nouvelles annales de mathématiques* de Terquem), a reconnu le premier, et dit à la Société philomathique, le 29 juin 1844, que la courbe affectée par une tige primitivement droite, sollicitée obliquement par un couple, était nécessairement une hélice. Il y avait été amené en simplifiant et complétant, dans une note insérée aux *Comptes rendus* du 27 juin, t. XVII, p. 1197, la solution donnée huit jours avant (*id.*, 17 juin, p. 1115), par Binet, au moyen des fonctions elliptiques, du problème traité par Clebsch, et qu'il appelait : *des équations de la courbe élastique à double courbure.* (Voyez aussi mes Notes des 1[er] et 15 juillet de la même année (1844) du t. XIX, p. 40 et 181.)

les couples dont les moments sont A′, B′, C′ par rapport aux axes invariablement liés à la dernière section transversale, et supposons que ces couples soient les seules forces qui produisent le changement de forme de la tige. Les équations (187) page 422 qui établissent des relations entre ces moments et les rotations r_1, r_2, r, et les équations (202) page 438, fournissant des expressions de r_1, r_2 donnent, pour $s = l$, vu $\varkappa = \lambda$,

$$A' = -E\sigma\varkappa^2 (a \sin \varepsilon l + b \cos \varepsilon l) ,$$
$$B' = -E\sigma\varkappa^2 (a \cos \varepsilon l - b \sin \varepsilon l) ,$$
$$C' = -E\sigma\vartheta^2 r.$$

En comparant avec les équations (205) page 438 dans lesquelles on fait également $s = l$, on a :

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma = A' : B' : C'.$$

Ces équations montrent que *l'axe de l'hélice qui fait avec les axes particuliers* x, y, z, *de l'élément, les angles dont les cosinus sont* γ_1, γ_2, γ, *est parallèle à l'axe du couple résultant des couples* A′, B′, C′. C'est ce qui détermine la direction de l'axe de l'hélice. Le rayon et le pas peuvent s'exprimer également au moyen des moments de ces couples si l'on observe que

$$r = -\frac{C'}{E\sigma\vartheta^2} ; \qquad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2}}{E\sigma\varkappa^2} .$$

Ces valeurs, introduites dans les expressions ci-dessus de ρ et de h donnent :

$$\rho = \frac{E\sigma\varkappa^2 \sqrt{A'^2 + B'^2}}{A'^2 + B'^2 + C'^2} , \qquad \frac{h}{2\pi} = -\frac{E\sigma\varkappa^2 C'}{A'^2 + B'^2 + C'^2} .$$

§ 53. — Flexion d'une tige primitivement droite, dans un plan qui contient un des deux axes principaux de toutes ses sections transversales.

Comme second exemple, j'étudierai la flexion d'une tige dans un plan. Je prendrai ce plan pour plan des $x'z'$, je placerai l'origine à l'une des extrémités de la tige et l'axe des z' parallèle à la force qui doit agir sur l'autre extrémité. Comme dans ce cas, l'axe des y est

parallèle à l'axe des y' puisque l'un et l'autre sont perpendiculaires au plan de flexion, on a :

$$\alpha_2 = \cos(y,x') = 0 \ , \quad \gamma_2 = \cos(y,z') = 0 \ , \quad \beta_1 = \cos(x,y') = 0 \ ,$$
$$\beta = \cos(z,y') = 0 \ , \quad \beta_2 = \cos(y,y') = 1 \ ;$$

et les dérivées de ces cinq cosinus par rapport à s sont nulles. Par conséquent aussi, d'après les doubles valeurs trinômes (185) de r_1, r_2, r, page 420, on a :

$$r = 0 \ , \qquad r_1 = 0 \ .$$

Si on désigne par φ l'angle des axes des z et des z' ou l'angle des x et des x', et par conséquent par $(90° - \varphi)$ l'angle que fait l'axe des x' avec celui des z, on a :

$$\alpha_1 = \cos(x,x') = \cos\varphi \ , \qquad \alpha = \cos(z,x') = \sin\varphi \ ,$$
$$\gamma_1 = \cos(x,z') = -\sin\varphi \ , \qquad \gamma = \cos(z,z') = \cos\varphi \ ;$$

d'où, d'après les mêmes formules (185) :

$$(204) \qquad r_2 = -(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{d\varphi}{ds} \ .$$

Comme le montrent les équations (187) page 422, et comme on peut s'en rendre compte par ce qui précède, les moments de rotation s'évanouissent tous à l'exception de celui qui est pris par rapport à l'axe des y et qui est :

$$B' = -E\sigma\lambda^2 r_2 = E\sigma\lambda^2\frac{d\varphi}{ds} \ .$$

Les six équations d'équilibre extérieur se réduisent, d'après cela, aux deux suivantes qui ne sont autre chose que la première et la troisième (193 *a*) du § 51, page 431, déduites de la première et de la troisième (193) :

$$A = K\cos\varphi - T\sin\varphi \ ,$$
$$C = K\sin\varphi + T\cos\varphi \ ;$$

équations où K et T sont des forces constantes agissant sur chacune des sections transversales parallèlement aux axes fixes des x' et des z'. D'après l'hypothèse que nous avons faite, une seule force devait agir à l'extrémité parallèlement à l'axe z'; en général, K doit donc disparaître, en sorte qu'on a simplement :

$$A = -T\sin\varphi \ , \qquad C = T\cos\varphi \ ,$$

T désignant une tension longitudinale positive, qui est donnée.

Les équations (191) du § 50, dans lesquelles il faut faire nulles, en conséquence de ce qui précède, les quantités A′, C′, B, U_1, W_1, U_2, W_2, r_1, r, β, β_1, α_2 et γ_2 se réduisent à la seconde d'entre elles qui devient simplement $\frac{dB'}{ds} + A = 0$, ou bien, avec les valeurs ci-dessus de B′ et de A :

$$E\sigma\lambda^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = T \sin\varphi .$$

Cette équation détermine la courbure de la tige. Il est à remarquer que les équations (187 *b*) page 425, qui exigent des considérations particulières pour les points où la courbure peut changer très rapidement, sont satisfaites identiquement.

Si l'on multiplie l'équation ci-dessus par $2\frac{d\varphi}{ds}$ et si l'on intègre les deux membres, on peut lui donner la forme :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = C - 2\frac{T}{E\sigma\lambda^2}\cos\varphi .$$

Je rappelle que $\frac{d\varphi}{ds}$ est l'inverse du rayon de courbure de la ligne des centres de gravité des sections transversales de la tige, puisque φ désigne l'angle de la tangente à cette ligne avec l'axe des z'. A l'extrémité de la tige, où n'agit aucun moment de rotation, le rayon de courbure est infini, et par conséquent $\frac{d\varphi}{ds} = 0$; si donc on désigne par φ_1 l'angle que la tangente à l'extrémité de la tige fait avec l'axe des z', on a, d'après l'équation précédente :

$$0 = C - \frac{2T}{E\sigma\lambda^2}\cos\varphi_1 ,$$

ce qui détermine la valeur de la constante C. En portant cette valeur dans l'équation générale, celle-ci devient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{2T}{E\sigma\lambda^2}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi) ,$$

d'où l'on tire :

$$ds\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}} = \pm\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)}} ;$$

et, en intégrant depuis un point indéterminé s, φ, jusqu'à l'extrémité

libre où $s = l$, $\varphi = \varphi_1$.

$$(204\,a) \qquad (l - s)\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}} = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\pm d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)}}.$$

Cette équation ne renferme qu'une seule constante arbitraire φ_1. Pour la déterminer, supposons que la direction de la tangente à l'extrémité fixe de la tige soit donnée par la valeur $\varphi = \varphi_0$, laquelle, pour que $\sqrt{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}$ ne devienne pas imaginaire, doit être telle que $\cos\varphi_0 < \cos\varphi_1$. Alors, si l'on fait à la fois, dans l'équation ci-dessus, $s = 0$, et $\varphi = \varphi_0$, on a :

$$(205) \qquad l\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\pm d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)}}.$$

Au moyen de cette équation, on peut déterminer φ_1 qui s'y trouve seule inconnue.

J'examinerai avec plus de détail le cas particulier où $\varphi_0 = \pi$, c'est-à-dire où la direction initiale de la tige est exactement opposée à celle de la force qui agit sur elle (*). Dans ce cas, l'angle φ diminue constamment de φ_0 à φ_1 ; et, pour que la quantité sous le signe $\int$ dans l'équation (205) soit constamment positive, il faut prendre le signe négatif du numérateur; et par suite l'équation (205) se transforme en la suivante :

$$l\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)}} = \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{4\left(\cos^2\frac{\varphi_1}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}}.$$

Comme $\cos\frac{\varphi_1}{2}$ est nécessairement plus grand que $\cos\frac{\varphi}{2}$, on peut, à la

(*) C'est le cas de la *pièce debout*, ou sollicitée debout comme si elle était verticale, appuyée en bas sur le sol et chargée en haut par un poids. C'est aussi le cas de la première des huit espèces de *courbes élastiques* d'Euler (*Additamentum de curvis elasticis*, à son bel ouvrage *Méthodus inveniendi*, etc., 1744) donnant lieu au problème *de la force des colonnes*, même ouvrage de 1744, ou Académie de Berlin, 1757).

Lagrange aussi s'en est occupé (Sur la force des ressorts pliés, Académie de Berlin 1769, et Académie de Turin, volume de 1770-1773), et remarquait déjà que la solution exacte du problème des courbes élastiques planes dépend de la *rectification des sections coniques* ou de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intégration des fonctions elliptiques. — Voyez aussi l'*historique* en tête de l'édition de 1864 des *Leçons* de Navier, n°s XIII et XIV. — Voir aussi le § 89 ci-après.

place de φ, introduire un angle ψ défini par la relation

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\psi.$$

Ce nouvel angle augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$ tandis que φ diminue de π à φ_1; et, vu que $\frac{d\varphi}{2} = -\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\psi\,d\psi$, l'équation précédente devient :

$$l\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}\sigma\lambda^2}} = \int_{\varphi=\pi}^{\varphi=\varphi_1}\frac{d\psi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \int_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\psi}}$$

Cette formule donne lieu à une observation remarquable. Comme le dénominateur est toujours plus petit que l'unité, l'intégrale est plus grande que celle qui serait obtennue en remplaçant le dénominateur par 1. Mais, par cette substitution, l'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \frac{\pi}{2}\cdot$$

On a donc toujours nécessairement :

$$l\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}\sigma\lambda^2}} > \frac{\pi}{2};$$

ou, en d'autres termes, *si la longueur l, ou la force* T *ne dépassent pas la limite indiquée par cette équation, il ne se produit, en général, aucune flexion de la tige* (*). Mais si l et T sont assez grandes pour que cette inégalité soit satisfaite, la théorie des fonctions elliptiques (**) donne la règle suivante pour résoudre le problème. On détermine d'abord une grandeur p qui est, en général, très petite et qui satisfasse

(*) Cette remarque avait été faite dès 1744 par Euler (*Additamentum* cité); la *force de la colonne* n'est autre chose que la valeur qu'on tire pour T de l'équation qu'on a en remplaçant $>$ par $=$.

(**) C'est plutôt ce qu'on appelle la théorie des *fonctions inverses* des transcendantes elliptiques, d'Abel et de Jacobi. La solution ici donnée par l'auteur en offre une application qui est surtout curieuse.

Lagrange en avait donné une en développant la puissance $-\frac{1}{2}$ de ce que recouvre le radical du dénominateur de la quantité à intégrer.

à l'équation :

$$\sqrt{\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}}} = 1 + 2p + 2p^4 + 2p^9 + \dots\dots$$

ce qui, si l et T ne sont pas très grands, s'opère facilement. On a alors immédiatement :

$$\sqrt{\cos\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{2\sqrt[4]{p} + 2\sqrt[4]{p^9} + 2\sqrt[4]{p^{25}} + \dots\dots}{1 + 2p + 2p^4 + 2p^9 + \dots\dots}\,;$$

et on a en même temps le développement :

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\cos\frac{\varphi_1}{2}}\;\frac{2\sqrt[4]{p}\sin\frac{\pi s}{2l} - 2\sqrt[4]{p^9}\sin\frac{3\pi s}{2l} + \dots\dots}{1 - 2p\cos\frac{\pi s}{l} + 2p^4\cos\frac{2\pi s}{l} - \dots\dots}\,;$$

ce qui détermine la direction de la tangente en chaque point. La coordonnée ξ s'obtient au moyen de la formule :

$$\xi = \int_0^s \sin\varphi\, ds = \left(\sqrt{2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)} - \sqrt{2(\cos\varphi_1 + 1)}\right)\sqrt{\frac{E\sigma\lambda^2}{T}},$$

tandis que la coordonnée ζ s'exprime par :

$$\zeta = -\frac{E\sigma\lambda^2}{Tl^2}\left\{\frac{\pi^2 s}{4}\cdot\frac{1 - 9p - 25p^3 - \dots\dots (2n+1)^2(-p)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dots\dots}{1 - p - p^3 - \dots\dots (-p)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dots\dots} + l\pi\,\frac{4p\sin\frac{\pi s}{l} - 8p^4\sin\frac{2\pi s}{l} + 12p^9\sin\frac{3\pi s}{l} - \dots\dots}{1 - 2p\cos\frac{\pi s}{l} + 2p^4\cos\frac{2\pi s}{l} - 2p^9\cos\frac{3\pi s}{l} + \dots\dots}\right\}.$$

Lorsque l et T sont assez grandes pour que p, ainsi défini, ait une valeur voisine de l'unité, ces développements ne sont plus applicables. Alors, on introduit, à la place de p, une autre grandeur p' définie par la formule :

$$\sqrt{2l\sqrt{\frac{T}{E\sigma\lambda^2}}} = \sqrt{-\log p'}\,(1 + 2p' + 2p'^4 + 2p'^9 + \dots)\,.$$

Cette quantité p' est toujours très petite lorsque p devient voisin de

l'unité, et l'on a alors les développements suivants, qui sont très convergents, et où l'on a posé, pour abréger, $l' = -\frac{l\pi}{\log p'}$:

$$\sqrt{\cos\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1 - 2p' + 2p'^4 - 2p'^9 + \dots\dots}{1 + 2p' + 2p'^4 + 2p'^9 + \dots\dots};$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\varphi_1}{2}}} \; \frac{1 - p'\left(e^{\frac{\pi s}{l'}} + e^{-\frac{\pi s}{l'}}\right) + p'^4\left(e^{\frac{2\pi s}{l'}} + e^{-\frac{2\pi s}{l'}}\right) - \dots\dots}{1 + p'\left(e^{\frac{\pi s}{l'}} + e^{-\frac{\pi s}{l'}}\right) + p'^4\left(e^{\frac{2\pi s}{l'}} + e^{-\frac{2\pi s}{l'}}\right) + \dots\dots},$$

$$\xi = \left\{ \sqrt{2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)} - \sqrt{2(\cos\varphi_1 + 1)} \right\} \sqrt{\frac{E\sigma\lambda^2}{T}};$$

$$\zeta = \frac{E\sigma\lambda^2 \log p'}{Tl^2} \left\{ s \left(1 + \frac{\log p'}{4} \frac{1 - 9p' - 25p'^3 \dots (2n+1)^2 (-p')^{\frac{n(n+1)}{2}} \dots}{1 - p' - p'^3 \dots (-p')^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right) \right.$$
$$\left. + l \frac{\sqrt[4]{p'}\left(e^{\frac{\pi s}{2l'}} - e^{-\frac{\pi s}{2l'}}\right) - 5\sqrt[4]{p'^9}\left(e^{\frac{5\pi s}{2l'}} - e^{-\frac{5\pi s}{\pi l'}}\right) + \dots\dots}{\sqrt[4]{p'}\left(e^{\frac{\pi s}{2l'}} + e^{-\frac{\pi s}{2l'}}\right) + \sqrt{p'^9}\left(e^{\frac{5\pi s}{2l'}} + e^{-\frac{5\pi s}{2l'}}\right) + \dots\dots} \right\}$$

§ 54. — Rapprochement avec la théorie ordinaire des petites déformations des tiges primitivement droites.

Je compléterai l'étude précédente par quelques remarques destinées à établir un rapprochement des formules qui viennent d'être données avec la théorie ordinaire, et aussi, à donner plus de généralité aux résultats obtenus.

Pour la comparaison à la théorie ordinaire, je vais, dans les équations (188), (189), pages 425-428, remplacer les grandeurs A′, B′, C′ par leurs valeurs tirées de (187), page 422 et introduire au lieu de r_1, r_2, r, trois nouvelles quantités ρ qui sont leurs inverses, savoir :

$$r_1 = \frac{1}{\rho_1}, \qquad r_2 = \frac{1}{\rho_2}, \qquad r = \frac{1}{\rho}.$$

D'après ce qui précède, ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure des projections de la courbe des centres de gravité sur les plans principaux liés invariablement à l'élément, plans qui passent par l'axe de l'élé-

ment et par les axes principaux de la section transversale ; et $\frac{ds}{\rho}$ indique une torsion. Les équations (188) et (189) entre les composantes de forces ou de moments suivant les x', y', z' peuvent être écrites, en mettant dans ces dernières, pour A', B', C' leurs valeurs tirées de (187), $r_1 = -\frac{A'}{E\sigma\varkappa^2}\ldots$, modifiées par ces nouvelles notations,

$$(206)\begin{cases} \frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha) = -U, \\ \frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta) = -V, \\ \frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma) = -W; \\ E\sigma\frac{d}{ds}\left(\frac{\varkappa^2\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\lambda^2\alpha_2}{\rho_2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{\rho}\right) - A\alpha_2 + B\alpha_1 - \beta_1 W_1 - \beta_2 W_2 + \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 = 0, \\ E\sigma\frac{d}{ds}\left(\frac{\varkappa^2\beta_1}{\rho_1} + \frac{\lambda^2\beta_2}{\rho_2} + \frac{\varepsilon^2\beta}{\rho}\right) - A\beta_2 + B\beta_1 - \gamma_1 U_1 - \gamma_2 U_2 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 = 0, \\ E\sigma\frac{d}{ds}\left(\frac{\varkappa^2\gamma_1}{\rho_1} + \frac{\lambda^2\gamma_2}{\rho_2} + \frac{\varepsilon^2\gamma}{\rho}\right) - A\gamma_2 + B\gamma_1 - \alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2 + \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 = 0; \end{cases}$$

où nous rappellerons que [§ 28, p. 171] A, B, C sont les sommes de composantes suivant x, y, z, des tensions qui agissent sur les divers éléments $d\sigma$ d'une section σ, et que (§ 50, p. 425), U, V, W sont les sommes de composantes, aussi suivant x, y, z, des forces extérieures agissant à l'intérieur d'un élément de tige, divisées par sa longueur ds ou dz ; enfin que (même § 50, page 427) U_1, V_1, W_1 sont les sommes des moments, aussi divisées par ds, des mêmes forces autour de l'axe des y tracé sur la base de ce tronçon par son centre de gravité ; U_2, V_2, W_2 étant de même leurs moments autour de celui des x.

Les équations (187) permettent de poser immédiatement des conditions aux limites ; car, appliquées à l'extrémité de la tige, elles font connaître la courbure et la torsion à cette extrémité, d'après les moments des couples qui y agissent. Ces équations donnent en effet :

$$(207)\quad \frac{1}{\rho_1} = -\frac{A'}{E\sigma\varkappa^2}\text{ (flexion)} ;\quad \frac{1}{\rho_2} = -\frac{B'}{E\sigma\lambda^2}\text{ (flexion)} ;\quad \frac{1}{\rho} = -\frac{C'}{E\sigma\varepsilon^2}\text{ (torsion)} .$$

Remarquons ici, en passant, ce qui a déjà été dit plus haut, que dans le cas d'une flexion plane sans torsion, ces six équations, vu (page 441) $\alpha_2 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta = 0$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_1 = \gamma = \cos\varphi$, $\alpha = -\gamma_1 = \sin\varphi$,

$r = \frac{1}{\rho} = 0$, $r_1 = \frac{1}{\rho_1} = 0$, se réduisent aux trois suivantes :

$$(208) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{ds}(A\cos\varphi + C\sin\varphi) = -U, \\ & \frac{d}{ds}(-A\sin\varphi + C\cos\varphi) = -W, \\ & E\sigma\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds} - A + U_1\sin\varphi + W_1\cos\varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais, même les équations générales (206) où l'on conserve les $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho_1}$, se simplifient notablement et se ramènent en partie aux formes usitées, lorsqu'on suppose que les déplacements de la tige sont très petits partout. Alors, les deux systèmes de coordonnées à axes variables x, y, z, et à axes fixes x', y', z' ne diffèrent, en chaque point, que très peu l'un de l'autre quant aux directions. Les trois cosinus α_1, β_2, γ des angles de x' avec x, y' avec y, z' avec z diffèrent très peu de 1, et les six autres très peu de zéro. Les équations (206) deviennent alors :

$$(208\,a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dA}{ds} = -U, \quad && E\sigma\varkappa^2 \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds} + B - W_2 = 0 \\ & \frac{dB}{ds} = -V, \quad && E\sigma\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds} - A + W_1 = 0 \\ & \frac{dC}{ds} = -W, \quad && E\sigma\varepsilon^2 \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - V_1 + U_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Dans les expressions de U, V...., les coordonnées par rapport aux axes variables des x, y, z pourront être remplacées par celles qui seraient prises par rapport aux axes fixes des x', y', z', de sorte que ces grandeurs ne sont plus que des fonctions de la distance s de chaque section de la tige à l'une de ses extrémités.

Nous laisserons de côté, provisoirement, les deux équations du bas de ce tableau ; elles nous serviront plus tard à déterminer l'extension longitudinale ainsi que la torsion ; et nous ne considérerons d'abord que les deux premières de chaque colonne.

Si nous intégrons celles de la première colonne de s à l, et si nous désignons par A_l, B_l les valeurs de A et B à l'extrémité de la tige, nous

déterminerons les valeurs de A et B relatives à ses autres parties; et en les portant dans les équations de la seconde colonne, nous aurons les quatre suivantes :

$$(208\,b)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= A_l + \int_s^l U ds\,, \quad E\sigma\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds} = A_l + \int_s^l U ds - W_1\,, \\ B &= B_l + \int_s^l V ds\,, \quad E\sigma\varkappa_2 \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds} = -B_l - \int_s^l V ds + W_2\,. \end{aligned} \right.$$

Voyons maintenant comment se simplifient les expressions des ρ_1, ρ_2. Si le système des coordonnées x, y, z reste toujours très voisin, en direction, du système fixe x', y', z', les cosinus α_1, β_2, γ sont toujours très voisins de 1, et les autres très voisins de zéro. On voit même, d'après les trois relations (181) entre les carrés des neuf cosinus, que α_1, β_2, γ ne peuvent différer de l'unité que de quantités très petites du second ordre, tandis que les relations (182) entre leurs produits deux à deux, en négligeant les quantités très petites d'ordre supérieur, se transforment en :

$$\beta + \gamma_2 = 0\,, \qquad \gamma_1 + \alpha = 0\,, \qquad \alpha_2 + \beta_1 = 0\,.$$

En même temps, les équations (185) p. 419 deviennent, lorsqu'on néglige toujours les quantités très petites d'ordre supérieur :

$$\alpha = \frac{d\xi}{ds}\,, \qquad \beta = \frac{d\eta}{ds}\,.$$

Mais on peut aussi, avec la même approximation, remplacer s par la coordonnée z mesurée parallèlement à l'axe de la tige déplacée, et remplacer de même ξ, η par les petits déplacements u, v d'un point de la ligne des centres de gravité, perpendiculairement à celle-ci. La coordonnée ζ peut être remplacée par $z + w$, de sorte que w représente les déplacements longitudinaux de chacun des points de la tige. Les deux premières égalités ci-dessus deviennent alors :

$$\alpha = -\gamma_1 = \frac{du}{dz}\,, \quad \beta = -\gamma_2 = \frac{dv}{dz}\,.$$

Les quantités α_2, β_1 qui entrent dans la troisième égalité ne peuvent s'exprimer en fonction de u, v, w. Ces quantités correspondent en effet à une espèce particulière de déplacement, savoir *à la torsion*,

dans laquelle le centre de gravité de la section transversale n'est pas déplacé. Posons :

$$(208\ c) \qquad -\alpha_2 = \beta_1 = \psi,$$

de sorte que l'angle ψ désigne la rotation de la section transversale par rapport à sa position initiale. Les équations (185) page 420 nous donneront, en y attribuant à α, γ_1, β, $-\gamma_2$, $-\alpha_2$, β_1 leurs valeurs que nous venons d'écrire, et à α_1, β_2, γ la valeur 1, et en effaçant les produits de quantités très petites, les valeurs suivantes des r ou des ρ :

$$(208\ d) \quad r_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d^2 v}{dz^2},\ r_2 = \frac{1}{\rho_2} = \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{d^2 u}{dz^2},\ r = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha_2}{ds} = -\frac{d\psi}{dz}.$$

Ces équations confirment ce qui a été dit au commencement de ce § 54, savoir que ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure des projections de la courbe des centres de gravité, et que $\frac{1}{\rho}$ mesure la torsion de la tige. La signification de ρ_1 et de ρ_2 se simplifie en ce que la projection de la courbe des centres de gravité, dont ils sont les rayons de courbure, ne doit plus être faite sur des plans successivement variables pour chaque élément; mais, en négligeant de très petites quantités, on peut admettre que cette projection est faite sur des plans fixes, à savoir ceux qui, dans la position initiale de la tige, passent par la ligne des centres de gravité et par les axes principaux des sections transversales.

En différentiant par rapport à s ou à z les équations (208 b) de la deuxième colonne, et mettant pour $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_1}$, leurs valeurs $-\frac{d^2 u}{dz^2}$, $\frac{d^2 v}{dz^2}$, l'on obtient les équations différentielles :

$$(209) \qquad E\sigma\lambda^2 \frac{d^4 u}{dz^4} = U + \frac{dW_1}{dz}, \qquad E\sigma\varkappa^2 \frac{d^4 v}{dz^4} = V + \frac{dW_2}{dz},$$

avec les conditions limites ci-après, tirées des mêmes (208 b), mais non différentiées, et qui doivent avoir lieu pour $z = l$ ($s = l$).

$$(209\ a) \quad E\sigma\lambda^2 \left(\frac{d^3 u}{dz^3}\right)_l = -A_l + (W_1)_l, \quad E\sigma\varkappa^2 \left(\frac{d^3 v}{dz^3}\right)_l = -B_l + (W_2)_l;$$

expressions donnant la valeur de ce qu'on appelle aujourd'hui les efforts tranchants.

On peut encore tirer des équations (207), page 447, fournissant les

valeurs de $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ en fonction des moments composants A′, B′, si l'on met pour $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ leurs autres valeurs données tout à l'heure, les conditions-limites suivantes :

$$(209\,b) \qquad E\varpi\lambda^2\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_l = (A')_l \qquad E\varpi\varkappa^2\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_l = -(B')_l$$

où $(A')_l$, $(B')_l$ représentent les couples ou moments de forces agissant sur l'extrémité de la tige ; et l'on a ainsi reconstitué complètement le système de formules ordinairement appliqué, et qui se trouve donné, par exemple, dans le *Traité de Mécanique* de Poisson (*). Mais il est bien évident qu'ici on a appris à connaître exactement la portée de ces équations qui sont déduites d'autres plus générales *se rapportant à des flexions finies*.

On peut trouver immédiatement les formules précédentes en écrivant que, pour chaque section transversale, le rapport $\frac{E\varpi\varkappa^2}{\rho_1}$ est égal au moment de rotation des forces extérieures qui agissent sur la tige, depuis la section transversale considérée jusqu'à l'extrémité, du côté des s croissants. Une formule de cette espèce a déjà été trouvée et démontrée au § 38, sous le numéro 117, page 286, pour le cas de sections transversales finies, et dans l'hypothèse où les extrémités seules de la tige sont soumises à des forces extérieures. Les considérations qui viennent d'être présentées montrent que l'application de ces formules serait justifiée, alors même que la tige se trouverait soumise à l'action de forces quelconques : mais seulement, dans ce cas, les formules dont il s'agit ne donnent plus que des résultats approximatifs, et ne deviennent tout à fait rigoureuses que quand les dimensions

(*) Clebsch aurait sans doute aussi, s'il en avait eu connaissance, cité, en ce qui regarde la flexion plane, Navier (*Résumé des Leçons à l'École des ponts et chaussées*, 1826), qui, le premier, donna sa véritable expression au moment total des résistances élastiques des fibres tant étendues que comprimées, pour une section de forme quelconque, etc. ; et peut-être aussi, en ce qui regarde la flexion à double courbure, ainsi que la flexion *déviée*, ce que j'ai donné en 1843 (*Comptes rendus*, 30 octobre et 6 novembre), principalement en ce qui regarde le *troisième moment* (celui des forces autour du rayon de courbure), dont il faut tenir compte lorsque la tige était primitivement courbe, ou seulement lorsque ses sections n'ont pas des moments d'inertie égaux autour de toutes les droites tirées dans leur plan par leur centre de gravité. La considération du troisième moment en question, omise par Poisson, comme Lagrange avait omis le moment autour de la tangente, met en défaut dans les cas indiqués le théorème de *constance* de ce dernier moment, entre deux points d'application de force, que Poisson avait cru apercevoir et constater. (Voir surtout les nos XX et XXI de l'*historique* mis en tête de la 3e édition des *Leçons* de Navier, 1864.)

de la section transversale deviennent très petites ; l'approximation qu'elles fournissent est d'autant plus grande que les dimensions transversales de la tige sont plus petites. On a ainsi, pour les applications, une base certaine et solide.

Les formules (209) et (209*a*) peuvent avoir besoin d'une modification qui devient essentielle lorsque l'extension longitudinale de la tige est très grande. Dans ce cas, il n'est plus permis de négliger, dans les équations (206), page 447, les termes $C\alpha$, $C\beta$. Et alors, au lieu des équations (208*a*) de la première colonne, on obtient, des trois premières (206), (toujours en faisant $\alpha_1 = \cos\varphi = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma = \cos\varphi = 1$, $\gamma_1 = -\sin\varphi$ très petit, $\gamma_2 = 0$), si on les intègre, les suivantes où

$$K, \quad L, \quad T,$$

représentent, comme dans le cas des équations (193) du § 51, page 430, les composantes totales de forces agissant sur l'extrémité de la tige, et dont la troisième est une traction longitudinale.

$$(209c)\quad A + C\alpha = K + \int_s^l U ds,\quad B + C\beta = L + \int_s^l V ds,\quad C = T + \int_s W ds.$$

Dans le cas actuel, la composante T est supposée très grande, et on peut alors, dans les deux premières de ces équations, remplacer C par T en négligeant $\int_s^l W ds$ qui est petit par rapport à T. Mais on a aussi, avec la même approximation :

$$\alpha = \frac{du}{dz} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{dv}{dz},$$

de sorte que l'on peut poser :

$$A = K - T\frac{du}{dz} + \int_s^l U ds, \qquad A_l = K - T\left(\frac{du}{dz}\right)_l,$$

$$B = L - T\frac{dv}{dz} + \int_s^l V ds, \qquad B_l = L - T\left(\frac{dv}{dz}\right)_l.$$

Mettons les valeurs de A et B, ainsi trouvées, dans les deux équations de la deuxième colonne de (208*a*), [où nous avions mis simplement les valeurs de A et B données par la première colonne de (208*b*)].

Nous aurons, au lieu de celles de la deuxième colonne de (208*b*).

$$E\sigma\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds} = K - T\frac{du}{dz} + \int_s^l U ds - W_1 ,$$

$$E\sigma\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds} = -L + T\frac{dv}{dz} - \int_s^l V ds + W_2 .$$

Si l'on met $-\frac{d^2u}{dz^2}$ pour $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{d^2v}{dz^2}$ pour $\frac{1}{\rho_2}$ comme ci-dessus, l'on a : 1° en différentiant ensuite les deux membres par rapport à s ou à z, les deux premières des suivantes qui remplacent celles (206) ; 2° en les particularisant pour $s = l$, les deux dernières qui, ainsi, remplacent celles (209*a*) :

$$(209\,d)\left\{\begin{aligned} &E\sigma\lambda^2 \frac{d^4u}{dz^4} = T\frac{d^2u}{dz^2} + U + \frac{dW_1}{dz} ,\\ &E\sigma\varkappa^2 \frac{d^4v}{dz^4} = T\frac{d^2v}{dz^2} + V + \frac{dW_2}{dz} ,\\ &E\sigma\lambda^2\left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_l = -A_l + (W_1)_l = -K + T\left(\frac{du}{dz}\right)_l + (W_1)_l ,\\ &E\sigma\varkappa^2\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right)_l = -B_l + (W_2)_l = -L + T\left(\frac{dv}{dz}\right)_l + (W_2)_l .\end{aligned}\right.$$

Il est remarquable qu'ici, comme précédemment, u et v sont complètement séparés l'un de l'autre et peuvent être déterminés isolément.

De la dernière équation (209*c*) ressort une autre conséquence, c'est la loi de l'extension des divers éléments de la tige. Si l'on représente comme ci-dessus par ∂ l'extension de l'unité de longueur, ou l'extension de longueur proportionnelle, dans chaque élément, l'équation (187*a*) qui est (p. 422)

$$\partial = \frac{C}{E\sigma} ,$$

s'explique d'elle-même ; car du moment que l'on suppose la traction C uniformément répartie sur la section transversale où elle agit, un élément ds ou dz acquiert, après le déplacement, la longueur $dz\,(1+\partial)$. La coordonnée $\zeta = z + w$, d'une section transversale z, après le déplacement, est donc

$$z + w = \int_0^z (1+\partial)\,dz ,$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$\partial = \frac{dw}{dz}.$$

Il en résulte que la dernière équation (209c) se transforme en la suivante :

$$(209\,e) \qquad E\sigma \frac{dw}{dz} = T + \int_z^l W\,ds,$$

ou bien en différentiant une seconde fois

$$E\sigma \frac{d^2w}{dz^2} = -W;$$

avec la condition-limite, pour $z = l$:

$$(209\,f) \qquad E\sigma \left(\frac{dw}{dz}\right)_l = T.$$

Ces formules déterminent la loi de l'extension longitudinale, et cette détermination est, comme on le voit, indépendante de celle des déplacements transversaux u et v.

On trouve de même, indépendamment de u, v, w, l'angle de torsion ψ (208c). Si en effet, dans la dernière équation (208a) p. 448, on introduit, au lieu de $\frac{1}{\rho}$, l'expression (208d), $-\frac{d\psi}{dz}$, trouvée ci-dessus p. 450, on peut transformer cette équation en la suivante

$$(209\,g) \qquad E\sigma\varsigma^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} = V_1 - U_2;$$

et la troisième équation (207) donne la condition-limite suivante, applicable à l'extrémité de la tige, C' désignant le moment de torsion agissant sur cette extrémité :

$$(209\,h) \qquad E\sigma\varsigma^2 \frac{d\psi}{dz} = C';$$

où ς^2 a la valeur, variable avec la forme du contour des sections, qui a été définie par la formule (177) du § 48, et déjà par la note du § 51.

§ 55. — Flexion d'une tige primitivement courbe.

Reprenons les formules générales. Kirchhoff leur a donné une grande extension, par un artifice permettant de les appliquer, avec de légères

modifications, à des tiges courbes, et même *torses* ou naturellement tordues. On arrive à cette généralisation par la considération suivante :

Il est un principe fondamental applicable à tous les déplacements très petits que subissent les éléments des corps ; c'est que les effets des diverses forces extérieures sur ces très petits éléments s'additionnent simplement les uns aux autres. Il en résulte que si nous voulons étudier l'action, sur un élément, d'un système de forces, il est indifférent de considérer la forme primitive et donnée de cet élément comme étant celle qu'il affecte lorsqu'il n'est soumis à aucune force, ou bien comme étant celle qui aurait pu lui être imprimée par l'action déjà subie d'autres forces.

Définissons une tige primitivement courbe, une tige ayant partout une courbure finie, et dont la section transversale très petite soit partout égale tout en n'étant pas nécessairement orientée partout de la même manière : en sorte que nous puissions toujours dire qu'il existe un système de forces qui, en agissant à l'intérieur sur chacun des éléments de cette tige, serait capable de l'amener à être droite, et cylindrique ou prismatique. Représentons-nous donc ce système de forces sous l'action desquelles la tige aurait pris une forme droite et cylindrique, et appliquons, à la tige ainsi rectifiée, un système de forces égales et opposées ; la tige sera ramenée à son état primitif. Or cet état de la tige peut être calculé comme si la forme droite et *non torse* était sa forme naturelle. On a ainsi, pour chaque section transversale, certaines composantes et certains moments de rotation, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{A'}$, $\overline{B'}$, $\overline{C'}$ qui sont exactement contraires à ceux qui amèneraient la tige à avoir une forme droite. De ces six quantités, les trois dernières peuvent être immédiatement obtenues au moyen des équations (187), $r_1 = -\frac{A'}{E\varkappa\sigma^2}$; $r_2 = \ldots$ (p. 422) ; car comme, sous l'influence de ces trois moments, $\overline{A'}$, $\overline{B'}$, $\overline{C'}$ la tige supposée droite revient à sa forme naturelle ou primitive, elle acquiert les rayons de courbure $\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho_2}$ et la torsion $\overline{\rho}$ qu'elle possède originairement d'après sa forme géométrique donnée. On peut donc poser

$$\overline{A'} = -\frac{E\sigma\varkappa^2}{\overline{\rho_1}}, \quad \overline{B'} = -\frac{E\sigma\lambda^2}{\overline{\rho_2}}, \quad \overline{C'} = -\frac{E\sigma\tilde{\sigma}^2}{\overline{\rho}},$$

$\varkappa^2\sigma$, $\lambda^2\sigma$ exprimant toujours les moments d'inertie principaux de la section, d'une superficie σ, de la tige ; et $\tilde{\sigma}^2$ ayant l'expression (177) don-

née vers le commencement du § 48, expression qui se réduirait à $\frac{G}{E} 2\chi^2$, si la section était circulaire (*).

Ce seraient, disons nous, les moments de rotation exactement opposés à ceux-là, qu'il faudrait appliquer à la tige, pour qu'elle devint prismatique.

Si maintenant, on amène la tige à un état nouveau quelconque, différent de son état naturel, et si l'on imagine qu'elle passe d'abord par la forme droite prismatique, puis, de là seulement, qu'elle parvienne à sa forme nouvelle et définitive, on devra d'abord, pour amener la tige à être droite, appliquer à chaque section transversale les moments de rotation

$$\frac{E\sigma\varkappa^2}{\overline{\rho}_1}, \qquad \frac{E\sigma\lambda^2}{\overline{\rho}_2}, \qquad \frac{E\sigma\varpi^2}{\overline{\rho}};$$

et ensuite, pour l'amener de la forme droite à sa forme définitive, on devra lui appliquer ces moments différents d'intensité, comme de sens :

$$-\frac{E\sigma\varkappa^2}{\rho_1}, \qquad -\frac{E\sigma\lambda^2}{\rho_2}, \qquad -\frac{E\sigma\varpi^2}{\rho};$$

de sorte que dans les équations (189) et (191), p. 428-9, on devra attribuer aux moments de rotation A′, B′, C′ des valeurs, sommes algébriques de celles-ci, ou y faire :

$$A' = E\sigma\varkappa^2\left(\frac{1}{\overline{\rho}_1} - \frac{1}{\rho_1}\right); \quad B' = E\sigma\lambda^2\left(\frac{1}{\overline{\rho}_2} - \frac{1}{\rho_2}\right); \quad C' = E\sigma\varpi^2\left(\frac{1}{\overline{\rho}} - \frac{1}{\rho}\right):$$

Et ces équations subsistent après comme avant la substitution, car, pour les établir, on n'a en aucune manière fait usage de l'hypothèse que la tige fût primitivement droite. Par suite on a, pour les tiges primitivement courbes, les six équations suivantes d'équilibre de translation et de rotation qui ne sont autre chose que les six équations (188) et (191) du § 50, pp. 425, 429 en remplaçant dans ces trois dernieres, r_1, r_2, r par $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho}$, et les moments ou couples A′, B′, C′ par les

(*) Ainsi, il ne faut pas oublier que ϖ^2 est une expression géométrique analogue à $\varkappa^2$ et à λ^2, mais *multipliée par le rapport* $\frac{G}{E}$ des deux coefficients d'élasticité, et qui a une expression variant avec la forme du contour des sections. (Note du § 48.)

trois expressions à parenthèses binômes que nous venons d'écrire :

$$\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha) = -U$$

$$\frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta) = -V$$

$$\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma) = -W \qquad (*)$$

(210)

$$\varkappa^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\overline{\rho}_1}\right) + \frac{\lambda^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\overline{\rho}_2}\right) - \frac{\mu^2}{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\overline{\rho}}\right) = \frac{1}{E\sigma}(-B + \alpha U_2 + \beta V_2 + \gamma W_2);$$

$$\lambda^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\overline{\rho}_2}\right) + \frac{\mu^2}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\overline{\rho}}\right) - \frac{\varkappa^2}{\rho}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\overline{\rho}_1}\right) = \frac{1}{E\sigma}(A - \alpha U_1 - \beta V_1 - \gamma W_1);$$

$$\mu^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\overline{\rho}}\right) + \frac{\varkappa^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\overline{\rho}_2}\right) - \frac{\lambda^2}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\overline{\rho}_1}\right) = \frac{1}{E\sigma}(\alpha_2 U_1 + \beta_2 V_1 + \gamma_2 W_1 - \alpha_1 U_2 - \beta_1 V_2 - \gamma_1 W_2);$$

où $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_1$, $\overline{\rho}_2$ sont des fonctions de s connues et déterminées par la forme primitive de la tige donnée.

§ 56. — Flexion d'une tige ayant primitivement la forme d'une courbe plane, sans torsion (ou non torse).

Comme exemple, j'examinerai le cas simple d'une tige qui est primitivement sans torsion et où la ligne des centres de gravité des sections transversales se trouve dans un plan parallèle aux x', y', plan qui contient aussi l'un des axes principaux de ces sections. Je suppose, en outre, qu'aucune force n'agisse sur l'intérieur de la tige qui est soumise seulement, à ses extrémités, à l'action de moments

(*) Il est bon de rappeler que les trois premières équations (210) sont posées entre les composantes de forces parallèles aux axes fixes des x', y', z', car elles ne sont autres que celles (188) du § 50, p. 425, qui, lorsqu'on ne veut avoir que des composantes parallèles aux coordonnées x, y, z des points d'un élément, doivent être remplacées par les équations (190), p. 670; tandis que les trois dernières des six équations (210) expriment l'équilibre de rotation autour de parallèles aux axes de ces coordonnées x, y, z des points des éléments.

de rotation dont les axes sont perpendiculaires au plan de son axe ou de sa fibre moyenne, et qui, par conséquent, laissent celle ci dans ce plan. On a déjà vu, § 55, formule (204) page 441, que si φ, alors, désigne l'angle fait avec l'axe fixe des x' par la tangente menée à la tige courbée en un quelconque de ses points, on a :

$$r_2 = \frac{1}{\rho_2} = -\frac{d\varphi}{ds}.$$

Si, de même, on désigne par $\bar{\varphi}$ l'angle fait, avant la flexion avec cet axe, par la tangente menée à la tige au même point, on a :

$$\frac{1}{\bar{\rho}_2} = -\frac{d\bar{\varphi}}{ds}.$$

Les autres grandeurs r, les composantes A, B, C et les moments A', C' disparaissent; et des équations (210) il ne reste que la cinquième, dont le premier membre, divisé par λ^2, est $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\bar{\rho}_2}\right)$ et dont le second membre est nul, de sorte qu'on a :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\bar{\rho}_2}\right) = -\frac{d^2(\varphi - \bar{\varphi})}{ds^2} = 0,$$

ce qui donne par une double intégration, a et b étant deux constantes arbitraires :

$$\varphi = \bar{\varphi} + as + b.$$

L'une de ces constantes, b, peut être posée égale à zéro si l'on admet que la tige, à son extrémité ($s = 0$), soit fixée, ou, comme on dit, encastrée, de manière qu'elle ne puisse changer de direction. Pour $s = 0$, on a alors $\varphi = \bar{\varphi}$ et par suite $b = 0$.

Pour déterminer l'autre constante, il suffit de remarquer que dans la formation des équations (210), on a, au moment de rotation B' agissant sur une section quelconque, substitué la valeur

$$B' = -E\sigma\lambda^2\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\bar{\rho}_2}\right),$$

laquelle devient alors :

$$B' = E\sigma\lambda^2 \frac{d(\varphi - \bar{\varphi})}{ds} = E\sigma\lambda^2 a,$$

ce qui donne

$$a = \frac{B'}{E\sigma\lambda^2};$$

a peut donc être déterminé en particularisant l'expression précédente pour une des extrémités de la tige, et en donnant à B' la valeur du moment qui s'y trouve appliqué.

Pour trouver la forme même de la tige, il faut se rappeler que l'on a, d'après les formules (185) du § 49, en effaçant δ devant 1,

$$\frac{d\xi}{ds} = \sin\varphi, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \cos\varphi;$$

ce qui donne, par intégration, et en substituant pour φ sa valeur

$$\xi = \int_0^s \sin\left(\bar{\varphi} + \frac{B's}{E\sigma\lambda^2}\right) ds,$$

$$\zeta = \int_0^s \cos\left(\bar{\varphi} + \frac{B's}{E\sigma\lambda^2}\right) ds.$$

Si l'on se représente la forme primitive de la tige donnée par cette considération, que les coordonnées $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$, de chaque élément, soient des fonctions connues de s, on aura aussi

$$\frac{d\bar{\xi}}{ds} = \sin\bar{\varphi}, \qquad \frac{d\bar{\zeta}}{ds} = \cos\bar{\varphi};$$

et l'on peut par conséquent écrire :

$$\xi = \int_0^s \left(\frac{d\bar{\xi}}{ds}\cos\frac{B's}{E\sigma\lambda^2} + \frac{d\bar{\zeta}}{ds}\sin\frac{B's}{E\sigma\lambda^2}\right) ds,$$

$$\zeta = \int_0^s \left(\frac{d\bar{\zeta}}{ds}\cos\frac{B's}{E\sigma\lambda^2} - \frac{d\bar{\xi}}{ds}\sin\frac{B's}{E\sigma\lambda^2}\right) ds.$$

§ 57. — Petites déformations d'une tige primitivement courbe.

Il est extrêmement important, pour les applications, d'avoir des formules représentant les *très petits* changements de forme des tiges primitivement courbes. Pour établir ces formules, je remarque que les coefficients ou cosinus α, β,...., qui déterminent la position d'un même élément après les déplacements, diffèrent alors très peu des

coefficients correspondants $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$,..... déterminant la position du même élément avant les déplacements. On peut donc poser :

$$\alpha = \bar{\alpha} + \alpha', \qquad \beta = \bar{\beta} + \beta', \quad \text{etc.} \ . \ . \ .$$

α', β'..... étant des quantités très petites dont on pourra négliger les carrés et les produits, Si l'on introduit ces valeurs dans les équations (181), (182) de relation entre les neuf α, β..... et si l'on observe que ces équations doivent également être satisfaites pour les $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$,.... on obtient, entre α', β'..... les équations :

$$\bar{\alpha}_1\alpha'_1 + \bar{\beta}_1\beta'_1 + \bar{\gamma}_1\gamma'_1 = 0,$$
$$\bar{\alpha}_2\alpha'_2 + \bar{\beta}_2\beta'_2 + \bar{\gamma}_2\gamma'_2 = 0,$$
$$\bar{\alpha}\alpha' + \bar{\beta}\beta' + \bar{\gamma}\gamma' = 0;$$
$$(\bar{\alpha}_1\alpha'_2 + \bar{\beta}_1\beta'_2 + \bar{\gamma}_1\gamma'_2) + (\bar{\alpha}_2\alpha'_1 + \bar{\beta}_2\beta'_1 + \bar{\gamma}_2\gamma'_1) = 0,$$
$$(\bar{\alpha}_2\alpha' + \bar{\beta}_2\beta' + \bar{\gamma}_2\gamma') + (\bar{\alpha}\,\alpha'_2 + \bar{\beta}\,\beta'_2 + \bar{\gamma}\,\gamma'_2) = 0,$$
$$(\bar{\alpha}\,\alpha'_1 + \bar{\beta}\,\beta'_1 + \bar{\gamma}\,\gamma'_1) + (\bar{\alpha}_1\alpha' + \bar{\beta}_1\beta' + \bar{\gamma}_1\gamma') = 0.$$

Toutes ces équations sont satisfaites à la fois si, au lieu des neuf petites quantités α', β'..... on en introduit trois nouvelles, p, p_1, p_2 en fonction desquelles les premières seront exprimées au moyen des formules :

$$(210\,a)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha'_1 = p_2\bar{\alpha} - p\bar{\alpha}_2, & \alpha'_2 = p\bar{\alpha}_1 - p_1\bar{\alpha}, & \alpha' = p_1\bar{\alpha}_2 - p_2\bar{\alpha}_1, \\ \beta'_1 = p_2\bar{\beta} - p\bar{\beta}_2, & \beta'_2 = p\bar{\beta}_1 - p_1\bar{\beta}, & \beta' = p_1\bar{\beta}_2 - p_2\bar{\beta}_1, \\ \gamma'_1 = p_2\bar{\gamma} - p\bar{\gamma}_2, & \gamma'_2 = p\bar{\gamma}_1 - p_1\bar{\gamma}, & \gamma' = p_1\bar{\gamma}_2 - p_2\bar{\gamma}_1. \end{array} \right.$$

Si maintenant dans les équations (185) page 420, qui définissent les quantités r, on introduit les valeurs $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$, etc., en négligeant de même les carrés ou les produits des α'..... ou des p...., et si, en outre, on désigne par $\bar{r}$ les grandeurs formées des $\bar{\alpha}$ comme sont les r des α, on obtiendra :

$$r_1 = \bar{r}_1 + \frac{dp_1}{ds} + p_2\bar{r} - p\bar{r}_2,$$
$$r_2 = \bar{r}_2 + \frac{dp_2}{ds} + p\bar{r}_1 - p_1\bar{r},$$
$$r = \bar{r} + \frac{dp}{ds} + p_1\bar{r}_2 - p_2\bar{r}_1;$$

ou, si au lieu des r, on met les inverses des rayons de courbure, $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ et la torsion $\frac{1}{\rho}$,

$$(210\,b)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\overline{\rho}_1} &= \frac{dp_1}{ds}+\frac{p_2}{\overline{\rho}}-\frac{p}{\overline{\rho}_2},\\ \frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\overline{\rho}_2} &= \frac{dp_2}{ds}+\frac{p}{\overline{\rho}_1}-\frac{p_1}{\overline{\rho}},\\ \frac{1}{\rho}-\frac{1}{\overline{\rho}} &= \frac{dp}{ds}+\frac{p_1}{\overline{\rho}_2}-\frac{p_2}{\overline{\rho}_1}. \end{aligned}\right.$$

Ces différences sont très petites. On pourra donc, dans les équations (210), partout où ρ, ρ_1, ρ_2 se rencontrent isolément, les remplacer respectivement par $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_1$, $\overline{\rho}_2$; on pourra de même, dans les trois premières de ces équations (210) remplacer les α par les $\overline{\alpha}$. Enfin on pourra encore considérer comme connus les forces et les moments U, V, W, U_1,....., car si ces forces non réciproques, telles que la pesanteur et l'inertie, agissant sur les points intérieurs des éléments, sont exprimées en fonction des coordonnées ξ, η, ζ de leur point d'application déplacé, on peut, en négligeant les petites quantités d'ordre supérieur, substituer à ces coordonnées celles $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, du même élément avant le déplacement, de la même manière que l'on a substitué aux cosinus α, β,..... par lesquels elles sont multipliées, leurs valeurs primitives, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$,..... qui en sont très voisines. On peut alors, sans autre modification, intégrer les trois premières équations (210), page 457, ce qui donne, K, L, T étant des constantes dont nous connaîtrons tout à l'heure la signification :

$$A\overline{\alpha}_1 + B\overline{\alpha}_2 + C\overline{\alpha} = \int_s^l U ds + K,$$

$$A\overline{\beta}_1 + B\overline{\beta}_2 + C\overline{\beta} = \int_s^l V ds + L,$$

$$A\overline{\gamma}_1 + B\overline{\gamma}_2 + C\overline{\gamma} = \int_s^l W ds + T.$$

Imaginons que l'une des extrémités de la tige ($s=0$) soit fixe, et que l'autre ($s=l$) soit soumise à l'action des forces extérieures; les composantes de ces forces ne sont autre chose que les valeurs des premiers membres des équations ci-dessus, pour $l=s$; elles sont donc égales à K, L, T puisque, pour $s=l$ les intégrales qui figurent dans les seconds membres s'annulent. Les constantes K, L, T, intro-

duites par l'intégration, trouvent donc ainsi leur signification mécanique.

En multipliant ces équations respectivement par $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\gamma}_1$, puis par $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\beta}_2$, $\bar{\gamma}_2$, puis par $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ et en additionnant chaque fois, on obtient les expressions suivantes de A, B, C :

$$
(211)\left\{
\begin{aligned}
A &= \bar{\alpha}_1 \int_s^l U ds + \bar{\beta}_1 \int_s^l V ds + \bar{\gamma}_1 \int_s^l W ds + K\bar{\alpha}_1 + L\bar{\beta}_1 + T\bar{\gamma}_1 ;\\
B &= \bar{\alpha}_2 \int_s^l U ds + \bar{\beta}_2 \int_s^l V ds + \bar{\gamma}_2 \int_s^l W ds + K\bar{\alpha}_2 + L\bar{\beta}_2 + T\bar{\gamma}_2 ;\\
C &= \bar{\alpha} \int_s^l U ds + \bar{\beta} \int_s^l V ds + \bar{\gamma} \int_s^l W ds + K\bar{\alpha} + L\bar{\beta} + T\bar{\gamma} .
\end{aligned}
\right.
$$

Les A, B, C étant déterminées de cette manière peuvent être considérées comme des grandeurs connues, et les trois dernières équations (210), § 55, page 457, prennent la forme suivante lorsqu'on y introduit les quantités p que les (210 a) définissent :

$$
(212)\left\{
\begin{aligned}
&\varkappa^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dp_1}{ds} + \frac{p_2}{\bar{\rho}} - \frac{p}{\bar{\rho}_2}\right) + \frac{\lambda^2}{\bar{\rho}}\left(\frac{dp_2}{ds} + \frac{p}{\bar{\rho}_1} - \frac{p_1}{\bar{\rho}}\right) - \frac{\varpi^2}{\bar{\rho}_2}\left(\frac{dp}{ds} + \frac{p_1}{\bar{\rho}_2} - \frac{p_2}{\bar{\rho}_1}\right) =\\
&\qquad = \frac{1}{E\sigma}\left(-B + \bar{\alpha}U_2 + \bar{\beta}V_2 + \bar{\gamma}W_2\right) ;\\
&\lambda^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dp_2}{ds} + \frac{p}{\bar{\rho}_1} - \frac{p_1}{\bar{\rho}}\right) + \frac{\varpi^2}{\bar{\rho}_1}\left(\frac{dp}{ds} + \frac{p_1}{\bar{\rho}_2} - \frac{p_2}{\bar{\rho}_1}\right) - \frac{\varkappa^2}{\bar{\rho}}\left(\frac{dp_1}{ds} + \frac{p_2}{\bar{\rho}} - \frac{p}{\bar{\rho}_2}\right) =\\
&\qquad = \frac{1}{E\sigma}\left(A - \bar{\alpha}U_1 - \bar{\beta}V_1 - \bar{\gamma}W_1\right) ;\\
&\varpi^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{dp}{ds} + \frac{p_1}{\bar{\rho}_2} - \frac{p_2}{\bar{\rho}_1}\right) + \frac{\varkappa^2}{\bar{\rho}_2}\left(\frac{dp_1}{ds} + \frac{p_2}{\bar{\rho}} - \frac{p}{\bar{\rho}_2}\right) - \frac{\lambda^2}{\bar{\rho}_1}\left(\frac{dp_2}{ds} + \frac{p}{\bar{\rho}_1} - \frac{p_1}{\bar{\rho}}\right) =\\
&\qquad = \frac{1}{E\sigma}\left(\bar{\alpha}_2U_1 + \bar{\beta}_2V_1 + \bar{\gamma}_2W_1 - \bar{\alpha}_1U_2 - \bar{\beta}_1V_2 - \bar{\gamma}_1W_2\right) .
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations différentielles sont linéaires par rapport à p, p_1, p_2 ; mais les coefficients sont dépendants de s puisque $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ sont des fonctions quelconques de s. Les équations (189) et (191) trouvées au § 50, et toutes celles qu'on en a déduites jusques et y compris le § 54, pour de petits déplacements de tiges primitivement rectilignes, sont comprises dans les précédentes dont elles sont des cas particuliers : à la condition, toutefois, que ces précédentes équations (212) ne s'appliquent pas au cas où la tige aurait subi une très grande extension

longitudinale, cas auquel ne peuvent évidemment convenir les équations dont on parle.

En intégrant les équations (212), on trouve les expressions de p, p_1, p_2, et, par suite, on arrive facilement à déterminer la forme de la tige courbée. Pour cela, en se rappelant (§ 49, page 416) que ξ, η, ζ ont été pris pour désigner les coordonnées, par rapport aux axes fixes des x', y', z' dans l'espace, d'un point de l'axe ou de la fibre moyenne de la tige, c'est-à-dire du centre de gravité de celle des deux bases d'un élément ou tronçon de tige, la plus proche de l'extrémité où l'on place l'origine des longueurs s, nous poserons :

$$\xi = \bar{\xi} + \xi', \qquad \eta = \bar{\eta} + \eta', \qquad \zeta = \bar{\zeta} + \zeta';$$

ξ', η', ζ' étant les petits déplacements éprouvés par ce même centre, et $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, ses coordonnées primitives. Rappelons-nous aussi que nous avons désigné (au même § 49, page 419), par ∂ la proportion très petite de l'augmentation éprouvée par la longueur de cet élément, et posé, pour les projections de sa longueur nouvelle sur les x', y', z', (183) $d\xi = \alpha\, ds\,(1+\partial)$, $d\eta = \beta\, ds\,(1+\partial)$, $d\zeta = \gamma\, ds\,(1+\partial)$. Nous aurons :

$$\xi = \int_0^s \alpha\,(1+\partial)\,ds = \int_0^s (\bar{\alpha}+\alpha')\,(1+\partial)\,ds,$$

$$\eta = \int_0^s \beta\,(1+\partial)\,ds = \int_0^s (\bar{\beta}+\beta')\,(1+\partial)\,ds,$$

$$\zeta = \int_0^s \gamma\,(1+\partial)\,ds = \int_0^s (\bar{\gamma}+\gamma')\,(1+\partial)\,ds.$$

Mais on a aussi :

$$\bar{\xi} = \int_0^s \bar{\alpha}\,ds, \qquad \bar{\eta} = \int_0^s \bar{\beta}\,ds, \qquad \bar{\zeta} = \int_0^s \bar{\gamma}\,ds:$$

par conséquent, en négligeant les petites quantités d'ordre supérieur, et en ayant égard aux (210 a), l'on a :

$$\xi' = \xi - \bar{\xi} = \int_0^s (\alpha' + \bar{\alpha}\partial)\,ds = \int_0^s (p_1\bar{\alpha}_2 - p_2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}\partial)\,ds,$$

$$\eta' = \eta - \bar{\eta} = \int_0^s (\beta' + \bar{\beta}\partial)\,ds = \int_0^s (p_1\bar{\beta}_2 - p_2\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}\partial)\,ds,$$

$$\zeta' = \zeta - \bar{\zeta} = \int_0^s (\gamma' + \bar{\gamma}\partial)\,ds = \int_0^s (p_1\bar{\gamma}_2 - p_2\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}\partial)\,ds.$$

On ne peut pas ici, comme dans ce qui précède, négliger les termes

multipliés par ∂, attendu qu'ils peuvent être de même ordre que les α', β'....., qui sont conservés. Au contraire, on détermine ∂ d'après l'équation (187 *a*) du même § 49, page 422, au moyen de la formule

$$\partial = \frac{C}{E\sigma}.$$

En introduisant cette valeur ainsi que les valeurs de p, p_1, p_2 dans les expressions ci-dessus, on aura la solution complète du problème.

§ 58. — Intégration des équations concernant les petites déformations d'une tige primitivement courbe.

Les équations (212) du § précédent sont toujours intégrables, si l'on suppose toutefois que les quantités $\bar\rho$, $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\gamma$, relatives à la position naturelle de la tige, sont données en fonction de s.

Posons pour abréger :

$$u_1 = \frac{1}{E\sigma}(-B + \bar\alpha U_2 + \bar\beta V_2 + \bar\gamma W_2),$$

$$u_2 = \frac{1}{E\sigma}(A - \bar\alpha U_1 - \bar\beta V_1 - \bar\gamma W_1),$$

$$u = \frac{1}{E\sigma}(\bar\alpha_2 U_1 + \bar\beta_2 V_1 + \bar\gamma_2 W_1 - \bar\alpha_1 U_2 - \bar\beta_1 V_2 - \bar\gamma_1 W_2);$$

où A et B doivent avoir leurs valeurs données par les équations (211). Introduisons en même temps de nouvelles fonctions v_1, v_2, v, telles qu'on ait :

$$(214)\qquad \frac{dp_1}{ds} + \frac{p_2}{\bar\rho} - \frac{p}{\bar\rho_2} = \frac{v_1}{\varkappa^2}, \quad \frac{dp_2}{ds} + \frac{p}{\bar\rho_1} - \frac{p_1}{\bar\rho} = \frac{v_2}{\lambda^2}, \quad \frac{dp}{ds} + \frac{p_1}{\bar\rho_2} - \frac{p_2}{\bar\rho_1} = \frac{v}{\mu^2}.$$

Par leur moyen, les équations (212) deviennent :

$$(215)\qquad \frac{dv_1}{ds} + \frac{v_2}{\bar\rho} - \frac{v}{\bar\rho_2} = u_1, \quad \frac{dv_2}{ds} + \frac{v}{\bar\rho_1} - \frac{v_1}{\bar\rho} = u_2, \quad \frac{dv}{ds} + \frac{v_1}{\bar\rho_2} - \frac{v_2}{\bar\rho_1} = u.$$

Ces deux systèmes (214) et (215) sont manifestement de même forme et ne se distinguent que par leurs seconds membres. Dans le système (215) les seconds membres sont des quantités immédiatement connues, tandis que dans le système (214) les seconds membres ne sont déterminés que lorsqu'on a trouvé, au moyen des équations (215), les

grandeurs v_1, v_2, v qui ne sont autre chose, d'après les équations (210. *b*) que les produits par $\varkappa^2$, λ^2, ε^2 des changements survenus dans les grandeurs $\bar{r} = \frac{1}{\bar{\rho}}$. Ces deux systèmes sont d'ailleurs linéaires, et on connaît les méthodes d'intégration qui leur sont applicables. Examinons le système (215) ; nous négligerons d'abord les seconds membres u_1, u_2, u, c'est-à-dire que nous intégrerons les équations

$$(216) \quad \frac{dv_1}{ds} + \frac{v_2}{\bar{\rho}} - \frac{v}{\bar{\rho}_2} = 0, \quad \frac{dv_2}{ds} + \frac{v}{\bar{\rho}_1} - \frac{v_1}{\bar{\rho}} = 0, \quad \frac{dv}{ds} + \frac{v_1}{\bar{\rho}_2} - \frac{v_2}{\bar{\rho}_1} = 0.$$

Lorsque nous aurons la solution pour ce système, nous obtiendrons les intégrales complètes du système (215) en faisant varier les constantes. Et l'intégration du système (214) se fera de même en intégrant le système (216) et en faisant subir aux constantes une nouvelle variation. Tout le problème se réduit donc à l'intégration du système (216).

Si l'on considère que les grandeurs $\bar{\rho}$ sont les inverses des $\bar{r}$, et que les neuf coefficients ou cosinus $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ... satisfont, d'après la définition qui est faite des r par les (185), p, 420, au système des neuf équations différentielles (196), (197), (197.*a*) de la forme $\frac{d\alpha}{ds} = r_1 \alpha_2 - r_2 \alpha_1, \ldots$ (page 454), mais où l'on aurait, seulement, remplacé les r, r_1, r_2 par $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ ou $\frac{1}{\bar{\rho}}$, $\frac{1}{\bar{\rho}_1}$, $\frac{1}{\bar{\rho}_2}$ (§ 54, p. 446); on voit que les intégrales complètes des équations (216) sont les suivantes :

$$(217) \quad v_1 = a\bar{\alpha}_1 + b\bar{\beta}_1 + c\bar{\gamma}_1, \quad v_2 = a\bar{\alpha}_2 + b\bar{\beta}_2 + c\bar{\gamma}_2, \quad v = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta} + c\bar{\gamma};$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires. En effet, en substituant ces expressions dans les équations (216), elles sont satisfaites, vu que ce qui multiplie séparément les constantes a, b, c est nul en vertu des neuf équations (196), (197), (197.*a*) supposées satisfaites elles-mêmes par les $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ..... et où l'on aurait mis, comme on vient de dire, les $\frac{1}{\bar{\rho}}$ pour les r.

Appliquons maintenant à cette solution la méthode de la variation des constantes, c'est-à-dire mettons, non plus dans les équations (216) mais dans les équations (215) les expressions (217) de v_1, v_2, v, en faisant varier a, b, c, aussi bien que $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ..... lors de leur différentiation par rapport à s. En effaçant tout ce qui multiplie les a, b, c et qui

doit être nul comme on vient de le dire, l'on obtient

$$\bar\alpha_1 \frac{da}{ds} + \bar\beta_1 \frac{db}{ds} + \bar\gamma_1 \frac{dc}{ds} = \mathrm{u}_1,$$

$$\bar\alpha_2 \frac{da}{ds} + \bar\beta_2 \frac{db}{ds} + \bar\gamma_2 \frac{dc}{ds} = \mathrm{u}_2,$$

$$\bar\alpha \frac{da}{ds} + \bar\beta \frac{db}{ds} + \bar\gamma \frac{dc}{ds} = \mathrm{u}.$$

Ces équations du premier degré étant résolues comme à l'ordinaire, et en se servant, pour simplifier, des relations (192) du § 50, page 450, ou, plus simplement encore, en les ajoutant après les avoir multipliées par α_1, β_1, γ_1, puis par α_2, β_2, γ_2, enfin par α, β, γ, donnent :

$$\frac{da}{ds} = \bar\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \bar\alpha_2 \mathrm{u}_2 + \bar\alpha \mathrm{u}, \quad \frac{db}{ds} = \bar\beta_1 \mathrm{u}_1 + \bar\beta_2 \mathrm{u}_2 + \bar\beta \mathrm{u}, \quad \frac{dc}{ds} = \bar\gamma_1 \mathrm{u}_1 + \bar\gamma_2 \mathrm{u}_2 + \bar\gamma \mathrm{u}.$$

D'où, par intégration, a_0, b_0, c_0 étant des constantes arbitraires,

$$(217\,a)\quad \left\{ \begin{aligned} a &= -\int_s^l (\bar\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \bar\alpha_2 \mathrm{u}_2 + \bar\alpha \mathrm{u})\, ds + a_0, \\ b &= -\int_s^l (\bar\beta_1 \mathrm{u}_1 + \bar\beta_2 \mathrm{u}_2 + \bar\beta \mathrm{u})\, ds + b_0, \\ c &= -\int_s^l (\bar\gamma_1 \mathrm{u}_1 + \bar\gamma_2 \mathrm{u}_2 + \bar\gamma \mathrm{u})\, ds + c_0. \end{aligned} \right.$$

Ces dernières constantes se déterminent facilement. Admettons que l'une des extrémités de la tige ($s=0$) soit fixe, et que, par conséquent, en cet endroit, l'on ait $\alpha'=0$, $\beta'=0$, etc....., ou bien $p=0$, $p_1=0$, $p_2=0$. Soient N, P, Q les moments des forces extérieures qui agissent à l'autre extrémité ($s=l$), décomposées suivant les axes fixes des x', y', z'. Les mêmes forces, décomposées suivant les axes des x, y, z, relatifs à l'extrémité ($s=l$), donnent, par rapport à ces axes, les moments de rotation

$$\mathrm{M}_1 = (\mathrm{N}\bar\alpha_1 + \mathrm{P}\bar\beta_1 + \mathrm{Q}\bar\gamma_1)_l, \quad \mathrm{M}_2 = (\mathrm{N}\bar\alpha_2 + \mathrm{P}\bar\beta_2 + \mathrm{Q}\bar\gamma_2)_l, \quad \mathrm{M} = (\mathrm{N}\bar\alpha + \mathrm{P}\bar\beta + \mathrm{Q}\bar\gamma)_l.$$

Nous avons dit au § 55 (p. 456), pour préparer l'établissement des trois dernières équations (210), que ces mêmes moments ont, pour un point quelconque de la tige, les valeurs $\mathrm{E}\sigma\chi^2\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_1}\right)$, ..., ...; et, par

conséquent, eu égard à (210.b) puis à (214) les valeurs suivantes :

$$-E\sigma\varkappa_2\left(\frac{dp_1}{ds}+\frac{p_2}{\rho}-\frac{p}{\rho_2}\right)=-E\sigma\nu_1,$$

$$-E\sigma\lambda_2\left(\frac{dp_2}{ds}+\frac{p}{\rho_1}-\frac{p_1}{\rho}\right)=-E\sigma\nu_2,$$

$$-E\sigma\xi^2\left(\frac{dp}{ds}+\frac{p_1}{\rho_2}-\frac{p_2}{\rho_1}\right)=-E\sigma\nu.$$

On a donc, en particularisant pour $s=l$, et substituant à ν_1, ν_2, ν leurs valeurs (217),

$$-M_1=(\overline{\alpha_1}a_0+\overline{\beta_1}b_0+\overline{\gamma_1}c_0)_l\cdot E\sigma;$$

$$-M_1=(\overline{\alpha_2}a_0+\overline{\beta_1}b_0+\overline{\gamma_2}c_0)_l\cdot E\sigma,$$

$$-M=(\overline{\alpha}a_0+\overline{\beta}b_0+\overline{\gamma}c_0)_l\cdot E\sigma;$$

équations qui donnent en les résolvant, ce qui se fait toujours simplement au moyen de trois additions précédées de multiplications par α_1, α_2, α...., les valeurs suivantes des constantes:

$$a_0=-\frac{1}{E\sigma}(\overline{\alpha_1}M_1+\overline{\alpha_2}M_2+\overline{\alpha}M)_l,$$

$$b_0=-\frac{1}{E\sigma}(\overline{\beta_1}M_1+\overline{\beta_2}M_2+\overline{\beta}M)_l,$$

$$c_0=-\frac{1}{E\sigma}(\overline{\gamma_1}M_1+\overline{\gamma_2}M_2+\overline{\gamma}M)_l.\ (^*)$$

On voit donc que les quantités ν se trouvent complètement déterminées.

Passons maintenant au système (214) des équations différentielles où les inconnues sont p_1, p_2, p. Nous pourrons évidemment poser, tout à fait de la même manière que pour les ν_1, ν_2, ν :

$$(218)\qquad p_1=f\overline{\alpha_1}+g\overline{\beta_1}+h\overline{\gamma_1},\quad p_2=f\overline{\alpha_2}+g\overline{\beta_2}+h\overline{\gamma_2},\quad p=f\overline{\alpha}+g\overline{\beta}+h\overline{\gamma};$$

(*) Dans le livre de Clebsch, les trois termes de chacune des parenthèses de ces expressions des constantes a_0, b_0, c_0 sont affectés respectivement de dénominateurs $\varkappa^2$, λ^2, ξ^2; les valeurs de $-M_1$, $-M_2$, $-M$ se trouvent multipliées aussi respectivement par $\varkappa^2$, λ^2, ξ^2, affectant de même les seconds membres $-E\sigma\nu_1$, $-E\sigma\nu_2$, $-E\sigma\nu$ des trois équations qui précèdent. Il nous a semblé que c'était une erreur, provenant sans doute de ce que l'auteur n'aura pas fait attention, en posant celles-ci, que les seconds membres de celles (214) ont $\varkappa^2$, λ^2, ξ^2 pour dénominateur.

En tout cas, notre changement n'a pas d'influence sur ce qui suit.

où f, g, h sont des constantes par la variation desquelles on trouve, au moyen des équations (214) les valeurs suivantes correspondantes à (217 a) :

$$f = \int_0^s \left(\frac{\bar{\alpha}_1 v_1}{\varkappa_2} + \frac{\bar{\alpha}_2 v_2}{\lambda^2} + \frac{\bar{\alpha} v}{\varsigma^2} \right) ds + f_0,$$

$$g = \int_0^s \left(\frac{\bar{\beta}_1 v_1}{\varkappa^2} + \frac{\bar{\beta}_2 v_2}{\lambda_2} + \frac{\bar{\beta} v}{\varsigma^2} \right) ds + g_0,$$

$$h = \int_0^s \left(\frac{\bar{\gamma}_1 v_1}{\varkappa^2} + \frac{\bar{\gamma}_2 v_2}{\lambda^2} + \frac{\bar{\gamma} v}{\varsigma^2} \right) ds + h_0 ;$$

seulement, les limites de l'intégration sont différentes. Celles-ci offrent cet avantage, qu'avec la supposition déjà faite, et maintenue ici, à savoir que les p doivent s'annuler avec s, on doit avoir :

$$f_0 = 0, \qquad g_0 = 0, \qquad h_0 = 0.$$

La question de la détermination de ces constantes d'intégration se trouve donc immédiatement résolue.

Les formules précédentes se simplifient notablement lorsque la tige présente certaines formes spéciales. Par exemple, si la ligne des centres de gravité des sections transversales est un arc de cercle de rayon a, et si le plan x', z' qui contient cet arc de cercle contient en même temps l'un des axes principaux de chacune des sections transversales ; si, de plus, on prend pour origine le point $s = 0$ et si on choisit pour axe des z' la tangente en ce point à la ligne des centres de gravité, de manière que l'arc de cercle donné se trouve dans l'angle formé par les z' positifs et par les x' négatifs, on a alors :

$$\bar{\alpha}_2 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\beta} = \bar{\beta}_1 = 0, \quad \bar{\beta}_2 = 1,$$

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\gamma} = \cos\frac{s}{a}, \qquad \bar{\gamma}_1 = -\bar{\alpha} = \sin\frac{s}{a};$$

et par conséquent

$$\bar{\rho}_2 = a, \qquad \bar{\rho} = \bar{\rho}_1 = \infty .$$

On voit que ces valeurs entraînent l'évanouissement d'une multitude de termes des formules qui précèdent.

§ 59. — Équations de mouvement des tiges élastiques.

Les considérations qui précèdent peuvent acquérir un développement beaucoup plus important si on les applique à l'étude du mouve-

ment intérieur des corps, au lieu de les restreindre à celle de leur équilibre. On sait qu'il suffit pour cela, d'après le principe de d'Alembert, d'ajouter aux forces agissant sur l'intérieur du corps, et qui figurent dans les équations d'équilibre, les forces nécessaires pour détruire à chaque instant les accélérations des divers éléments; et nécessaires, par conséquent, pour maintenir en équilibre toutes les parties du corps; ou, qu'il suffit (ce qui revient au même, et est plus simple), d'exprimer l'équilibre dit *dynamique* entre les forces *motrices* et ce qu'on appelle les forces d'inertie de ces parties. Les accélérations que possède au temps t un élément quelconque du corps, estimées suivant les axes fixes des coordonnées x', y', z', ne sont autre chose que les seconds quotients différentiels de ses coordonnées par rapport au temps t. Si donc Π désigne le poids de l'unité de volume, le poids d'un prisme infiniment petit $dxdydz$ sera $\Pi dxdydz$; et si x', y', z' désignent les coordonnées, par rapport aux axes fixes, d'un tel élément quelconque de la tige, les forces d'*inertie*, ou les forces capables de détruire, à l'instant t, les accélérations de cet élément, seront

$$(218\,a)\qquad -\frac{\Pi}{g}dxdydz\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2},\quad -\frac{\Pi}{g}dxdydz\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2},\quad -\frac{\Pi}{g}dxdydz\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}.$$

Or, on peut, en se servant des équations (179.c), § 49, page 417, $x'=\xi+\alpha_1(x+u)+,\ldots$ exprimer, en fonction de ξ, η, ζ, α, β.... les coordonnées de chacun des points de la tige. On peut alors considérer comme d'ordre supérieur de petitesse les quantités linéaires u, v, w, et poser $z=0$ puisqu'il s'agit seulement de points situés dans une même section transversale qui correspond à une valeur déterminée de s; section où se trouve l'origine des coordonnées *locales* z; ce qui réduit ces équations (179.c) à :

$$x'=\xi+\alpha_1 x+\alpha_2 y,\qquad y'=\eta+\beta_1 x+\beta_2 y,\qquad z'=\zeta+\gamma_1 x+\gamma_2 y.$$

On a donc, en différentiant deux fois :

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}.$$

Introduisons ces valeurs dans les expressions (218.a) qu'on vient

d'écrire pour représenter les forces d'inertie de l'élément dont la masse est $\frac{\Pi}{g}\,dx\,dy\,dz$; et calculons les sommes des composantes et les sommes des moments de rotation de ces forces par rapport à chacun des axes fixes des x', y', z'.

Nous aurons d'abord les expressions suivantes des sommes de leurs composantes, pour un tronçon de tige de longueur ds mesurée dans le sens z:

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\,dx\,dy=-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)dx\,dy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}\,dx\,dy=-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\right)dx\,dy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\,dx\,dy=-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\right)dx\,dy.$$

Et comme les ξ, η, ζ, α, β..... sont indépendants des coordonnées transversales x, y, qui sont celles des points de la base du tronçon, ces expressions, en ayant égard aux équations suivantes provenant de ce que les origines des coordonnées mobiles x, y sont aux centres de gravité des bases ou sections,

$$\iint x\,dx\,dy=0,\qquad \iint y\,dx\,dy=0,$$

acquièrent les valeurs simples :

$$-\frac{\Pi}{g}\,\sigma\,ds\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},\qquad -\frac{\Pi}{g}\,\sigma\,ds\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2},\qquad -\frac{\Pi}{g}\,\sigma\,ds\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}.$$

Quant aux trois moments composants totaux de ces mêmes forces d'inertie (218.*a*) autour d'axes menés parallèlement aux axes fixes d'espace, des x', y', z', par le point $x'=\xi$, $y'=\eta$, $z'=\zeta$, nous verrons, comme il a été dit au § 50, à propos des forces X', Y', Z' agissant à l'intérieur des tronçons (p. 426), que l'on peut prendre $x'-\xi$, $y'-\eta$, $z'-\zeta$ pour leurs bras de levier, en sorte que les trois moments sont :

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}(y'-\eta)-\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}(z'-\zeta)\right]dx\,dy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left[\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}(z'-\zeta)-\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}(x'-\xi)\right]dx\,dy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}\,ds\iint\left[\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}(x'-\xi)-\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}(y'-\eta)\right]dx\,dy;$$

ou bien :

$$-\frac{\Pi}{g}ds\iint\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\right)(x\beta_1+y\beta_2)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\right)(x\gamma_1+y\gamma_2)\right]dxdy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}ds\iint\left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)(x\gamma_1+y\gamma_2)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\right)(x\alpha_1+y\alpha_2)\right]dxdy,$$

$$-\frac{\Pi}{g}ds\iint\left[\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\right)(x\alpha_1+y\alpha_2)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+x\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)(x\beta_1+y\beta_2)\right]dxdy.$$

Et si l'on a égard aux équations suivantes, exprimant que l'origine des coordonnées mobiles est au centre de gravité de la section transversale et que les axes des x, y sont ses axes principaux d'inertie :

$$\int xdxdy=0, \qquad \int ydxdy=0, \qquad \int xydxdy=0,$$
$$\int x^2dxdy=\lambda^2\sigma, \qquad \int y^2dxdy=\kappa^2\sigma;$$

on a simplement, pour ces trois sommes de moments, les valeurs

$$-\frac{\Pi}{g}\sigma ds\left\{\lambda^2\left(\beta_1\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}-\gamma_1\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}\right)+\kappa^2\left(\beta_2\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}-\gamma_2\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\right)\right\},$$
$$-\frac{\Pi}{g}\sigma ds\left\{\lambda^2\left(\gamma_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}-\alpha_1\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}\right)+\kappa^2\left(\gamma_2\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}-\alpha_2\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}\right)\right\},$$
$$-\frac{\Pi}{g}\sigma ds\left\{\lambda^2\left(\alpha_1\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}-\beta_1\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}\right)+\kappa^2\left(\alpha_2\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}-\beta_2\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)\right\}.$$

Ce sont ces composantes totales et ces moments totaux des inerties des tronçons de tige, de longueur ds, qui doivent, dans les équations d'équilibre, être ajoutés aux forces et aux moments donnés.

Si on compare les expressions $-\frac{\Pi}{g}\sigma ds\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \ldots\ldots$ des composantes des inerties, à celles $\mathrm{U}ds$, $\mathrm{V}ds$, $\mathrm{W}ds$ (§ 50, p. 425) des forces motrices, et les expressions des moments composants, que nous venons d'écrire, à celles $(\beta_1\mathrm{W}_1-\gamma_1\mathrm{V}_1+\beta_2\mathrm{W}_2-\gamma_2\mathrm{V}_2)ds, \ldots\ldots$ qui ont été données (même § 50, p. 427) des moments composants des mêmes forces motrices, on verra que l'addition de ces forces et de ces moments composants des inerties s'obtiendra en substituant aux neuf $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots \mathrm{W}_2$ des ex-

pressions citées, du § 50, les quantités suivantes, savoir :

$$\text{à } U,\quad U - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2};\qquad \text{à } U_1,\quad U_1 - \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2};\qquad \text{à } U_2,\quad U_2 - \frac{\Pi}{g}\sigma\varkappa^2\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2};$$

$$\text{à } V,\quad V - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2};\qquad \text{à } V_1,\quad V_1 - \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2\frac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2};\qquad \text{à } V_2,\quad V_2 - \frac{\Pi}{g}\sigma\varkappa^2\frac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2};$$

$$\text{à } W,\quad W - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2};\qquad \text{à } W_1,\quad W_1 - \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2};\qquad \text{à } W_2,\quad W_2 - \frac{\Pi}{g}\sigma\varkappa^2\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2}.$$

Par cette simple substitution, on pourra trouver les équations de mouvement qui correspondent à tous les cas de simple équilibre statique examinés aux §§ précédents.

Je ne m'occuperai particulièrement que du cas où la tige est primitivement droite, et où elle s'écarte très peu de sa position naturelle. On peut alors remplacer $\alpha_1 = \cos(x, x')$, $\beta_2 = \cos(y, y')$, $\gamma = \cos(z, z')$, par l'unité, tandis que les six autres cosinus sont ou nuls ou très petits; et, on peut, comme on l'a déjà dit aux §§ 53, page 441, et 54, pages 449, 450, où u, v, w sont les petits déplacements d'un centre de section, faire :

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma = 1,\qquad \alpha = -\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z},\qquad \beta = -\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial z},\qquad -\alpha_2 = \beta_1 = \psi;$$

$$\xi = u,\qquad \eta = v,\qquad \zeta = z + w.$$

Les trois composantes totales et les six moments totaux de rotation ci-dessus deviennent alors respectivement :

$$U - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad U_1,\qquad U_2 + \frac{\Pi}{g}\sigma\varkappa^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2};$$

$$V - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\qquad V_1 - \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\qquad V_2,$$

$$W - \frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad W_1 + \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial z},\qquad W_2 + \frac{\Pi}{g}\sigma\varkappa^2\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial z}.$$

Si l'on met ces expressions des composantes et des moments des forces tant motrices que d'inertie agissant à l'intérieur de la tige en mouvement, à la place de celles U, U_1, U_2, des composantes et V, V_1, V_2, W, W_1, W_2 des moments des seules forces motrices, dans les équations (209*d*), (209*e*), (209*g*), (p. 453, 454) de l'équilibre de la tige en repos, équations qui ont été déduites de celles (206), p. 447 ou (188) p. 425, et (189) p. 428 en supposant les déplacements des points partout très petits, et les directions des x, y, z peu différentes de celles des x', y', z', l'on obtient, en y joignant celles (209*f*), (209*h*), p. 454, les neuf équations suivantes où l'on se rappellera que K, L, T représentent [§ 51, p. 450 équation (195), et § 54, p. 452, équation (209*c*)], les composantes totales des forces agissant sur l'extrémité de la tige, A', B', C'

(§ 50, p. 424 ou § 28, p. 170) leurs moments totaux ; enfin, U, V, W, U_1,..... (§ 50, p. 425, 427) les composantes totales et les moments composants totaux divisés par la longueur ds d'un tronçon de tige, des forces extérieures qui agissent, comme la pesanteur, sur les points de l'intérieur de ce tronçon :

(218 b)
$$\left\{\begin{aligned}
&E\sigma\lambda^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}=T\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+U+\frac{\partial W_1}{\partial z}-\frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\Pi}{g}\lambda^2\sigma\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial t^2},\\
&E\sigma\varkappa^2\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}=T\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+V+\frac{\partial W_2}{\partial z}-\frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\Pi}{g}\varkappa^2\sigma\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\partial t^2};\\
&\text{avec les conditions-limites}\\
&E\sigma\lambda^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_l=-K+T\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_l+(W_1)_l+\frac{\Pi}{g}\lambda^2\sigma\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial t^2}\right)_l,\\
&E\sigma\varkappa^2\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\right)_l=-L+T\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_l+(W_2)_l+\frac{\Pi}{g}\varkappa^2\sigma\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z\partial t^2}\right)_l;\\
&\text{et}\quad E\sigma\lambda^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_l=(A')_l,\qquad E\sigma\varkappa^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_l=-(B')_l.
\end{aligned}\right.$$

(218 c)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Oscillations longiditunales}\ E\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=-W+\frac{\Pi}{g}\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\
&\text{avec la condition-limite}\quad E\sigma\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_l=T.
\end{aligned}\right.$$

(218 d)
$$\left\{\begin{aligned}
&\text{Oscillations de torsion}\ E\sigma\vartheta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=V_1-U_2+\frac{\Pi}{g}\sigma(\lambda^2+\varkappa^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2};\\
&\text{avec la condition-limite}\ E\sigma\vartheta^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_l=C'.
\end{aligned}\right.$$

On peut voir immédiatement que la propriété remarquable offerte par les équations de l'équilibre, d'avoir leurs variables inconnues séparées, subsiste dans les équations du mouvement. Les oscillations transversales autour des axes principaux des sections, les oscillations longitudinales, et les oscillations tournantes ou de torsion peuvent être déterminées indépendamment les unes des autres (*).

(*) Il faut faire attention aussi que, dans les deux dernières, $E\sigma\vartheta^2$ doit avoir la valeur (177) du commencement du § 48, p. 412, savoir :

$$E\sigma\vartheta^2=G\left[\varkappa^2\sigma+\lambda^2\sigma-\int\left(x\frac{\partial B_0}{\partial y}-y\frac{\partial B_0}{\partial x}\right)d\sigma\right];$$

expression provenant de la formule (87) du § 30, p. 200, qui a été réduite de celle (86) du § 29, p. 194, en supposant les sections σ symétriques, et où B_0, fonction de x et y, est égale [n° 5 de la Note du § 31, form. (e), p. 215] à $\frac{w}{b_0}$ ou $\frac{w}{\theta}$, b_0 ou $\theta=\frac{\psi}{l}$ étant l'angle de torsion

Les considérations générales concernant des oscillations de cette nature ont déjà été développées aux §§ 19 et 20. En cherchant les solutions générales des équations de mouvement qui précèdent, lesquelles solutions se présentent sous la forme de produits de

$$\cos(k_n t) \text{ ou de } \sin(k_n t),$$

par une fonction des coordonnées, ici de la coordonnée z, l'on détermine les oscillations isolées qui peuvent se produire dans la tige, eu égard aux circonstances données. Les coefficients k_n sont les racines d'une équation transcendante, toutes réelles et positives. Ces racines déterminent la hauteur des sons produits par les vibrations de la tige, car les différentes valeurs de $\frac{k_n}{2\pi}$ représentent les nombres de ces vibrations qui sont exécutées en une seconde (*).

(*) **NOTE FINALE DU § 59.**

1. — *Observations sur les termes* $\frac{d^4 u}{dz^2\,dt^2}$, $\frac{d^4 v}{dz^2\,dt^2}$, $\frac{d^3 u}{dz\,dt^2}$, $\frac{d^3 v}{dz\,dt^2}$ *des équations* (218 *b*) *et de celles* (222) *qu'on aura au* § 61. — Ces termes proviennent des inerties dues aux petites rotations alternatives qu'éprouvent, autour d'axes tracés sur elles par leurs centres de gravité, les sections transversales de la tige vibrant transversalement, et dont l'axe, en se courbant, incline ses divers éléments en des sens alternativement opposés.

Comme toutes les équations posées sont fondées sur la supposition que

---

ou l'arc de rotation relative des sections pour l'unité de rayon et l'unité de longueur de tige, et w étant le déplacement longitudinal ou dans la direction z, du point (x, y) de la section, que le fait de la torsion *gauchit* ou courbe généralement; déplacement dont la détermination dépend de l'intégration de l'équation [(f) même Note, p. 214] $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ avec la condition (g) $\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\psi}{l} y\right) \cos p + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\psi}{l} x\right) \sin p = 0$ aux points du contour de la section où la normale fait avec l'axe des x l'angle p, en sorte que $-\frac{\cos p}{\sin p} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}$, coefficient différentiel tiré de l'équation en x, y de ce contour.

On a aussi, pour définir ϑ^2 ou $E\sigma\vartheta^2$ l'équation M_z ou $-C' = E\sigma\vartheta^2 \frac{\psi}{l}$, M_z étant ce qui est appelé $-C'$ par Clebsch, savoir le moment, autour de l'axe des z ou de la ligne des centres de gravité des sections, des forces qui font tordre, en sorte que $E\sigma\vartheta^2$ peut être déterminé par l'expérience pour des prismes à section de toute forme.

Nous avons dit, au reste, à la Note du § 48 qui suit l'équation (177), p. 415, et déjà au même n° 9 de la Note du § 51, qu'on a $\vartheta^2 = \frac{G}{E} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sigma^2}{\varkappa^2 + \lambda^2}$ exactement pour toute section elliptique et approximativement pour celles d'autres formes.

§ 60. — Vibrations longitudinales d'une tige droite.

Pour les vibrations longitudinales, l'équation transcendante est facile à établir. Posons, pour le déplacement longitudinal w d'une section,

$$w = w_n \cos(k_n t) ,$$

w_n étant simplement fonction de z. Si nous supposons que les forces extérieures soient nulles, ou que

$$W = 0 ,$$

la première équation (218.c) relative aux vibrations longitudinales deviendra

$$(219) \qquad \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} = -\frac{\Pi k_n^2 w_n}{Eg} ,$$

dont l'intégrale la plus générale est :

$$(220) \qquad w_n = A_n \cos\left(k_n z\sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right) + B_n \sin\left(k_n z\sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right) .$$

---

l'épaisseur de la tige, parallèlement aux plans des vibrations composantes, est assez petite par rapport à sa longueur pour qu'on puisse négliger, devant l'unité, le carré de leur rapport, les inerties de rotation, dont on vient de parler, sont de même ordre que les quantités qui ont été négligées dans le calcul ; et les quatre termes différentiels du quatrième ordre ou du troisième ordre de u et de v par rapport à t et à z, n'ajoutent rien à l'approximation qu'on aurait déjà en les effaçant.

Aussi, on verra, au § 61, que lorsqu'il s'agit de calculer les vibrations transversales, Clebsch supprime $h^2 \pi^2 \lambda^2$ dans le dénominateur de (227 e) k_n, comme si l'on avait réduit les équations (218 b) et (222) à ce qu'elles sont lorsqu'on néglige les termes différentiels en question, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on établit les équations des vibrations transversales comme si les sections restaient parallèles à elles-mêmes, ainsi qu'ont fait tous les auteurs à l'exception de M. Bresse (*Cours de Méc. appl.*, n° 145 de 1859 ou 140 de 1866 ou 55 de 1880) qui, pour l'exactitude et comme on voit, avant Clebsch, a cru devoir faire *accessoirement* un calcul à part et rigoureux, de ce qui vient des *couples d'inertie* dus aux vibrations rotatoires des sections.

2. *Observations sur les termes affectés de la tension ou traction longitudinale* T. — Ces termes sont la seule partie réellement influente que Clebsch ait ajoutée aux équations connues de vibration transversale. Il les fait nuls aussi, à partir de l'équation (227 f) du même § 61. Mais, auparavant, en supposant forte cette traction T, il en avait montré l'influence qui se reproduit, à deux dimensions, dans les questions de la plaque et à plus forte raison de la membrane, traitées §§ 78 et 79. (Voir ci-après, à notre grande Note du § 73 sur *les plaques, les n^{os}* 10 et 20.)

Admettons maintenant que l'extrémité $z = 0$ de la tige soit fixe. Alors w et par suite w_n doit être nul pour cette extrémité qui ne peut prendre part aux oscillations. Cela exige qu'on ait

$$A_n = 0\ ;$$

Il reste donc

$$(221) \qquad w = B_n \sin\left(k_n z \sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right) \cos(k_n t)\ .$$

Si l'autre extrémité de la tige est aussi maintenue fixe, w doit également disparaître pour $z = l$; et cela n'est possible que si

$$\sin\left(k_n l \sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right) = 0\ .$$

Telle est, dans ce cas, l'équation transcendante dont il était question ci-dessus. Les racines sont faciles à obtenir : le sinus ne peut s'annuler qu'autant que son argument est un multiple de π. Les racines de l'équation sont donc :

$$k_n = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \quad \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \quad \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \ldots\ldots ;$$

et les nombres correspondants d'oscillations par seconde sont :

$$\frac{k_n}{2\pi} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \quad \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \quad \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}, \ldots\ldots$$

Le premier de ces nombres donne le son fondamental de la tige; les autres, les sons supérieurs dits *harmoniques*. Ces derniers ayant un nombre de vibrations double, triple, etc., sont l'octave, la quinte de l'octave, etc., du son fondamental, et ils se rapprochent les uns des autres d'autant plus qu'ils deviennent plus élevés, car le rapport $\frac{n}{n+1}$ des nombres de vibrations de deux sons voisins se rapproche d'autant plus de l'unité que n est plus grand.

Le son fondamental détermine donc complètement les sons harmoniques qui l'accompagnent. Le nombre de vibrations qui lui correspond est, comme on le voit, en raison inverse de la longueur de la tige, en raison inverse de la racine carrée du poids spécifique, et, au contraire, directement proportionnel à la racine carrée du module d'élasticité de la matière dont la tige est formée. Ce module peut donc être déterminé par la hauteur du son fondamental.

Le son fondamental, et avec lui la série entière des harmoniques,

s'abaisse lorsque la longueur de la tige augmente, et lorsque le poids spécifique devient plus grand; il s'élève, au contraire, lorsque le module d'élasticité s'accroît (*).

Il convient de remarquer que c'est pour le seul son fondamental que la tige entre en vibration dans son entier. L'amplitude des vibrations de chacun de ses points dépend du facteur périodique $\sin\left(k_n z\sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right)$ qui entre dans l'expression de w. En y introduisant pour k_n sa valeur

$$k_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}},$$

ce facteur devient $\sin\frac{n\pi z}{l}$. Pour $n=1$, on voit que ce même facteur, et par suite l'amplitude de l'oscillation, croît depuis l'extrémité de la tige jusqu'au milieu où elle atteint son maximum; en effet, pour $z=\frac{l}{2}$, il acquiert sa plus grande valeur qui est l'unité. Mais, en général, ce facteur s'évanouit pour

$$z = \frac{kl}{n},$$

k étant un nombre entier quelconque; c'est-à-dire que pour le $n^{ième}$ son harmonique de la tige, il y a $n-1$ de ces points que l'on appelle *nœuds* qui ne prennent pas part au mouvement et qui, également espacés, divisent la tige en n parties vibrantes d'égale longueur. Pour le premier harmonique, la tige oscille donc comme si elle était composée de deux tiges ayant chacune la moitié de sa longueur; pour le second harmonique, comme si elle était formée de trois tiges ayant chacune le tiers de la longueur, et ainsi de suite.

L'intensité de chaque son harmonique, en particulier, dépend du mode d'excitation ou d'ébranlement de la tige.

Comme les considérations qui précèdent subsistent tout entières lorsque, dans l'expression de w, l'on remplace le facteur $\cos(k_n t)$ par $\sin(k_n t)$, on obtient l'expression la plus générale de w, en faisant la somme de tous les termes obtenus par cette substitution, et en

(*) Le son fondamental est, comme on voit, pour les vibrations longitudinales, indépendant de la grandeur de la section transversale : cela s'explique en considérant que chacune des fibres oscille comme si elle était isolée. Il en est autrement, comme on verra, pour les vibrations transversales.

introduisant, à la place de k_n les valeurs trouvées ci-dessus. On a ainsi :

$$w = \sin\frac{\pi z}{l}\left(B_1\cos\frac{a\pi t}{l} + C_1\sin\frac{a\pi t}{l}\right)$$
$$+ \sin\frac{2\pi z}{l}\left(B_2\cos\frac{2a\pi t}{l} + C_2\sin\frac{2a\pi t}{l}\right)$$
$$+ \sin\frac{3\pi z}{l}\left(B_3\cos\frac{3a\pi t}{l} + C_3\sin\frac{3a\pi t}{l}\right) + \ldots\ldots,$$

où les B, C désignent des constantes arbitraires et où l'on a posé, pour abréger

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}.$$

Les constantes B, C peuvent toujours se déterminer de manière que la tige ait eu un état initial arbitrairement donné ; c'est-à-dire que les déplacements et les vitesses des éléments, à l'origine du mouvement, soit pour $t = 0$, aient eu des valeurs représentées par des fonctions données de z. Soient $f(z)$, $F(z)$ ces fonctions, l'expression ci-dessus donne, pour $t = 0$,

$$(w)_{t=0} = f(z) = B_1\sin\frac{\pi z}{l} + B_2\sin\frac{2\pi z}{l} + B_3\sin\frac{3\pi z}{l} + \ldots\ldots;$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = F(z) = \frac{a\pi}{l}\left[C_1\sin\frac{\pi z}{l} + 2C_2\sin\frac{2\pi z}{l} + 3C_3\sin\frac{3\pi z}{l} + \ldots\ldots\right].$$

On a déjà vu, à plusieurs reprises, dans ce qui précède, comment on doit déterminer les constantes B, C, au moyen d'équations de cette espèce. En effet, h représentant un nombre entier quelconque, multiplions ces équations par $\sin\frac{h\pi z}{l}dz$ et intégrons sur toute l'étendue de la tige, c'est-à-dire de 0 à l. Tous les termes du second membre disparaissent à chaque intégration, à l'exception d'un seul, le terme qui contient B_h ou C_h ; et nous obtenons

$$\int_0^l f(z)\sin\frac{h\pi z}{l}dz = \frac{l}{2}B_h; \qquad \int_0^l F(z)\sin\frac{h\pi z}{l}dz = \frac{ha\pi}{l}C_h;$$

ce qui détermine très simplement les coefficients B_h, C_h, si les fonctions f et F sont connues et données. De cette manière on voit que le problème se trouve entièrement déterminé. Ces fonctions n'ont d'ailleurs d'influence que sur l'intensité relative des divers sons rendus par la tige ; tandis que l'élévation de ces sons est, pour une même

tige, déterminée exclusivement par les conditions-limites, c'est-à-dire par l'état de liberté ou d'assujettissement de ses extrémités.

Si on change cet état, les séries de sons produits sont différentes. Par exemple, n'admettons plus, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, que l'extrémité $z=l$ soit fixe; au contraire, supposons-la libre. Alors w ne doit plus s'évanouir pour $z=l$; mais, à cette extrémité, la tension doit toujours être absolument nulle, puisque aucune force de traction quelconque n'y agit sur la tige.

Revenons aux équations de la fin du § 59, p. 473. La nouvelle hypothèse correspond à $T=0$, c'est-à-dire à $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=l}=0$. En prenant toujours pour w l'expression (221) et en égalant à zéro son quotient différentiel par rapport à z, spécialisé pour $z=l$, on obtient dans ce cas :

$$\cos\left(k_n l\sqrt{\frac{\Pi}{Eg}}\right)=0 .$$

Les racines de cette équation s'obtiennent en égalant l'argument du cosinus à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$k_n=\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}},\quad \frac{3\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}},\quad \frac{5\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}}\ \ldots\ldots$$

La série de sons déterminée par ces nombres est pareille à la précédente ; mais le son fondamental est d'une octave plus bas que dans le premier cas, attendu que le nombre des oscillations est moitié moindre. Le premier son harmonique est ici la quinte de l'octave du son fondamental, et ainsi de suite. La position des nœuds correspondant à chaque vibration considérée isolément n'est pas non plus la même ; car, comme on a en général

$$k_n=\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{\Pi}},$$

le facteur dépendant de z dans l'équation (221) devient

$$\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi z}{l}\right);$$

et ce facteur s'évanouit lorsque l'on pose

$$z=\frac{2hl}{2n-1}.$$

Pour trouver les nœuds, il faut donc alors diviser la tige en un nombre impair de parties égales, ce nombre étant donné par le rap-

port du nombre des vibrations correspondant au son harmonique que l'on considère, au nombre de vibrations du son fondamental. Les nœuds sont alors tous les points pairs de division, en partant de l'extrémité fixe de la tige, supposée être le point zéro.

L'introduction des conditions dues à l'état initial se fait absolument de la même manière que dans le cas précédent. L'expression la plus générale de w, formée de l'addition des solutions partielles est ici

$$w = \sin\frac{\pi z}{l}\left(B_1 \cos\frac{a\pi t}{2l} + C_1 \sin\frac{a\pi t}{2l}\right)$$
$$+ \sin\frac{3\pi z}{l}\left(B_2 \cos\frac{a\pi t}{2l} + C_2 \sin\frac{a\pi t}{2l}\right) + \ldots\ldots ;$$

où a a toujours la valeur $\sqrt{\frac{Eg}{\text{II}}}$. Désignons encore par $f(z)$, $F(z)$ les fonctions donnant les déplacements initiaux et les vitesses initiales des éléments ; nous aurons, pour $t = 0$:

$$(w)_{t=0} = f(z) = B_1 \sin\frac{\pi z}{2l} + B_2 \sin\frac{3\pi z}{2l} + \ldots ;$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = F(z) = \frac{a\pi}{2l}\left[C_1 \sin\frac{\pi z}{2l} + 3C_2 \sin\frac{3\pi z}{2l} + \ldots\ldots\right].$$

Pour déterminer, au moyen de ces équations, les constantes B, C en fonction de l'état initial, on les multiplie toutes deux par $\sin\frac{(2h-1)\pi z}{2l}dz$, et on intègre pour toute la longueur de la tige, ou de $z = 0$, à $z = l$. Alors tous les termes du second membre disparaissent, excepté le terme B_h ou C_h, et l'on a :

$$\int_0^l f(z) \sin\frac{(2h-1)\pi z}{2l}\,dz = \frac{l}{2} B_h ;$$
$$\int_0^l F(z) \sin\frac{(2h-1)\pi z}{2l}\,dz = \frac{ha\pi}{l} C_h ;$$

de sorte que les B, C se déterminent immédiatement lorsque les fonctions f et F sont données.

§ 61. — Vibrations transversales.

Je passe au problème des vibrations transversales qui est de la plus grande importance, principalement en ce qui concerne les vibrations des cordes. Le problème des cordes vibrantes a été traité, depuis

d'Alembert, de bien des manières différentes ; on déduit ordinairement sa solution de la théorie des corps parfaitement flexibles, c'est-à-dire d'une théorie tout autre que celle qui vient d'être exposée. Cela revient à négliger, dans les équations (218 *b*) de la fin du § 59, page 475, les termes dépendant du module d'élasticité E et des rayons d'inertie $\varkappa$, λ de la section transversale. Mais, d'une part, on ne peut, en aucune manière, considérer des cordes, et surtout des cordes d'acier, comme des corps parfaitement flexibles ; et, d'autre part, il semble peu justifié de négliger, tout d'abord, les termes de ces équations qui contiennent les quotients différentiels de l'ordre le plus élevé ; ce procédé peut être justifié par le résultat, mais il ne l'est jamais *a priori* (*).

Admettons donc que les deux extrémités de la corde soient maintenues fixes, mais sans être déterminées en direction, ou, comme on dit, encastrées. Les conditions limites seront d'abord, pour ces deux extrémités, que les déplacements u, v soient toujours nuls. En second lieu, de ce que les tangentes à la ligne des centres de gravité des sections peuvent y avoir des directions quelconques, il résulte qu'à ces mêmes deux extrémités les moments de rotation doivent être nuls. Ces moments $(\mathrm{A}')_l$, $(\mathrm{B}')_l$, s'évanouissant, on a aux extrémités, avec les conditions $u=0$, $v=0$, les suivantes qui résultent des équations (218 *b*) du § 59 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_l = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_l = 0;$$

ce qui détermine complètement le problème.

En examinant les deux premières des équations générales (218 *b*), l'on voit qu'elles sont absolument les mêmes, sauf que la première, qui doit déterminer u, contient le rayon d'inertie λ^2, tandis que la seconde,

---

(*) Dès 1741-1743, D. Bernoulli (t. XIII des *Mémoires de Saint-Pétersbourg*), et en 1744 Euler (*Additamentum de Curvis elasticis*), enseignaient que la détermination de l'ordonnée de la courbe qu'affecte, dans une de ses oscillations *simples*, une lame élastique vibrante, dépendait de l'intégration d'une équation simplement différentielle du quatrième ordre, et que les équations des courbes répondant aux diverses oscillations simples contenaient des paramètres, tous racines d'une même équation transcendante. Ils déterminaient donc les *durées* diverses de ces oscillations simultanées qui se superposent. Mais la détermination *de leurs amplitudes*, pour un état initial supposé connu, ou la solution complète du problème des oscillations d'une lame *qui vibre seule*, fut donnée seulement en 1827 par Cauchy (*Exercices de mathématiques*), et en 1828 par Poisson (*Mémoires de l'Institut*, et ensuite *Traité de mécanique*, 2e édition, 1833). J'y ai ajouté en 1853-1857 la détermination des oscillations qui sont prises lorsqu'une *masse étrangère* et censée rigide est *unie* quelque part, ne fût-ce que pendant la première demi-oscillation, à la tige ou barre ; ce qui m'a permis de résoudre le problème des chocs transversaux, etc., comme on verra à la note finale du présent § 61.

qui devra déterminer v, contient le rayon d'inertie $\varkappa^2$. Cette circonstance a une signification évidente : si les deux moments d'inertie principaux de la section transversale ne sont pas les mêmes, les mouvements vibratoires effectifs se partageront en deux mouvements vibratoires composants, dirigés chacun parallèlement à l'un des axes principaux de cette section ; de sorte que les séries de sons correspondant à chacune de ces composantes seront différentes, et différeront d'autant plus que les moments d'inertie eux-mêmes auront des grandeurs plus inégales.

Imaginons les déplacements initiaux et les vitesses initiales de chaque élément décomposés parallèlement à ces deux axes ; chacune de ces deux séries de déplacements composants et de vitesses composantes donnera lieu seulement à des vibrations parallèles à son axe spécial. Les deux parties du problème peuvent être traitées tout à fait séparément, et, vu l'identité de forme des équations qui contiennent u et v, il suffira de considérer celles qui déterminent les vibrations dépendant des valeurs de u, par exemple.

Ces vibrations sont définies par les équations suivantes : pour tous les points de la tige, par la première équation (218 b) dont nous retranchons les termes U et $\frac{\partial W_1}{\partial z}$, parce que nous ne supposons aucune force s'exerçant sur les points de l'intérieur de la tige, ce qui réduit cette équation à

$$(222) \qquad E\sigma\lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{H}{g}\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{H}{g}\lambda^2\sigma \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2};$$

avec la condition qu'on ait, pour les extrémités :

$$(222a) \qquad (u)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,$$

$$(222b) \qquad (u)_{z=l} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=l} = 0.$$

Enfin, pour satisfaire à l'état initial donné, il faut qu'on ait

$$(222c) \qquad (u)_{t=0} = (z), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = F(z);$$

$f(z)$ représentant les déplacements initiaux, $F(z)$ les vitesses initiales, décomposés parallèlement à l'axe des x ou des u.

Pour trouver les vibrations simples ou isolées, posons d'abord, u_n étant une fonction de z seul,

$$u = u_n \cos k_n t.$$

Portant cette expression dans l'équation (222), nous obtenons l'équation suivante en u_n :

$$(223)\qquad E\sigma\lambda^2\frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} = T\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\Pi}{g}\sigma k_n^2 u_n - \frac{\Pi}{g}\sigma\lambda^2 k_n^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}.$$

Cette équation simplement différentielle, linéaire du quatrième ordre, possède, en général, quatre intégrales particulières de la forme $e^{\alpha_n z}$, qui, par leur *composition linéaire*, c'est-à-dire au moyen de leur addition après multiplication par quatre constantes, formeront l'intégrale générale. Si l'on pose

$$u_n = e^{\alpha_n z},$$

et si l'on introduit cette valeur dans l'équation précédente, on obtient, en supprimant le facteur commun $e^{\alpha_n z}$, l'équation suivante en α_n :

$$E\sigma\lambda^2\alpha_n^4 = T\alpha_n^2 + \frac{\Pi}{g}\sigma k_n^2 - \frac{\Pi}{g}\lambda^2\sigma k_n^2\alpha_n^2;$$

d'où l'on tire

$$\alpha_n^2 = \frac{T}{2E\sigma\lambda^2} - \frac{\Pi k_n^2}{2gE} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{2E\sigma\lambda^2} - \frac{\Pi k_n^2}{2gE}\right)^2 + \frac{\Pi k_n^2}{Eg\lambda^2}};$$

et si l'on pose, pour abréger :

$$\frac{T}{2E\sigma\lambda^2} = a^2, \qquad \frac{\Pi}{Eg\lambda^2} = b^2,$$

on a :

$$\alpha_n^2 = a^2 - \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2} \pm \sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2}\right)^2 + b^2k_n^2}.$$

Le coefficient b ne dépend que de la forme et de la masse de la tige, tandis que a dépend en outre de la tension longitudinale T de cette même tige. Si k_n, coefficient du temps dans $u = u_n \cos k_n t$, est réel, la première des deux valeurs de α_n^2,

$$(224)\qquad \alpha_n^2 = a^2 - \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2} + \sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2}\right)^2 + b^2k_n^2},$$

est positive, et α_n est réel. Mais la seconde valeur est négative et donne par suite α_n imaginaire. Je remplace cette valeur de α_n^2 par $-\beta_n^2$ en posant :

$$(225)\qquad \beta_n^2 = -a^2 + \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2} + \sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2\lambda^2k_n^2}{2}\right)^2 + b_2k_n^2}.$$

Les deux intégrales exponentielles de la forme $e^{\beta z\sqrt{-1}}$, $e^{-\beta z\sqrt{-1}}$ correspondantes à cette valeur se transforment en sinus et en cosinus, et au lieu des quatre intégrales particulières

$$e^{\alpha_n z}, \qquad e^{-\alpha_n z}, \qquad e^{\beta_n z\sqrt{-1}}, \qquad e^{-\beta_n z\sqrt{-1}},$$

on peut introduire les quatre suivantes :

$$e^{\alpha_n z}, \qquad e^{-\alpha_n z}, \qquad \cos\beta_n z, \qquad \sin\beta_n z :$$

de sorte que l'intégrale générale de u_n est

$$(226) \qquad u_n = A_n\cos\beta_n z + B_n\sin\beta_n z + C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z};$$

où A_n, B_n, C_n, D_n désignent des constantes arbitraires.

Introduisons cette valeur dans les équations (222.a), (222.b) nous aurons, pour déterminer les constantes, les équations suivantes :

$$A_n + C_n + D_n = 0,$$
$$-\beta_n^2 A_n + \alpha_n^2(C_n + D_n) = 0,$$
$$A_n\cos\beta_n l + B_n\sin\beta_n l + C_n e^{\alpha_n l} + D_n e^{-\alpha_n l} = 0,$$
$$-\beta_n^2(A_n\cos\beta_n l + B_n\sin\beta_n l) + \alpha_n^2(C_n e^{\alpha_n l} + D_n e^{-\alpha_n l}) = 0.$$

Laissons un moment de côté le cas particulier où $\alpha_n^2 = -\beta_n^2$, qui sera examiné tout à l'heure ; ces équations donnent immédiatement

$$A_n = 0, \quad C_n + D_n = 0, \quad B_n\sin\beta_n l = 0, \quad C_n e^{\alpha_n l} + D_n e^{-\alpha_n l} = 0.$$

Il n'y a que deux solutions possibles ; ou bien que l'on ait

$$C_n = 0, \qquad D_n = 0, \qquad \text{avec} \qquad \sin\beta_n l = 0,$$

et, alors, $\beta_n l$ doit avoir l'une des valeurs

$$(227) \qquad \beta_n l = \pi, \qquad 2\pi, \qquad 3\pi, \; \ldots\ldots;$$

ou bien que l'on ait $B_n = 0$, et $C_n = -D_n$; et alors on doit avoir

$$l^{\alpha_n l} = l^{-\alpha_n l},$$

ce qui exige, pour $\alpha_n l$ l'une des valeurs suivantes :

$$\alpha_n l = \pi\sqrt{-1}, \qquad 2\pi\sqrt{-1}, \qquad 3\pi\sqrt{-1}. \; \ldots\ldots$$

Cette série est la même que celle qui vient d'être écrite pour $\beta_n l$, mais multipliée par $\sqrt{-1}$. Cela montre que l'on reproduit la solution précédente dans laquelle on remplacerait β par $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$; par conséquent,

les grandeurs exponentielles qui, pour cette seconde solution, restent dans l'expression de u_n, reproduisent, à cause de l'exposant imaginaire, précisément les mêmes termes trigonométriques que l'on obtenait avec β_n dans la première solution. Ainsi cette seconde solution ne donne rien de nouveau, et il n'est pas nécessaire de la prendre en considération.

Mais ce dont il convient maintenant de dire quelques mots, c'est le cas où α_n^2 et β_n^2 seraient égaux et de signe contraire. Cela se produit d'après les valeurs (224), (225) de α_n^2, β_n^2, lorsque

$$(227\,a) \qquad \left(a^2 - \frac{b^2\lambda^2 k_n^2}{2}\right)^2 + b^2 k_n^2 = 0\,.$$

Dans ce cas, l'expression (226) n'est pas l'intégrale complète de l'équation (223), qui prend la forme

$$(227\,b) \qquad \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} - 2c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + c^4 u_n = 0\,,$$

où l'on a posé

$$c^2 = \frac{\tau\,T}{2E\sigma\lambda^2} - \frac{\Pi k_n^2}{2gE}\,.$$

L'intégrale complète de cette équation devient alors :

$$(227\,c) \qquad u_n = (A_n + B_n z)\,e^{cz} + (C_n + D_n z)\,e^{-cz}\,,$$

ce que l'on peut vérifier facilement par différentiation. Les équations de condition (222.*a*), (222.*b*), donnent :

$$A_n + C_n = 0\,,$$

$$c^2 (A_n + B_n) + 2c\,(B_n - D_n) = 0\,,$$

$$(A_n + B_n l)\,e^{cl} + (C_n + D_n l)\,e^{-cl} = 0\,,$$

$$c^2 (A_n + B_n l)\,e^{cl} + c^2 (C_n + D_n l)\,e^{-cl} + 2c\,(B_n e^{cl} + D_n e^{-cl}) = 0\,.$$

On conclut facilement de ces équations que l'on doit avoir $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$; par conséquent il ne peut y avoir de vibrations isolées qui correspondent à l'hypothèse considérée.

Il ne reste donc que la solution (227), d'après laquelle β_n doit avoir les valeurs

$$\frac{\pi}{l},\quad \frac{2\pi}{l},\quad \frac{3\pi}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{n\pi}{l};$$

et, par conséquent, en se reportant à l'équation (225) et en la résolvant par rapport à k_n, on trouve pour k_n les valeurs suivantes :

$$(227d)\quad k_n=\frac{\pi}{lb}\sqrt{\frac{2a^2l^2+\pi^2}{l^2+\lambda^2\pi^2}};\quad \frac{2\pi}{lb}\sqrt{\frac{2a^2l^2+4\pi^2}{l^2+4\lambda^2\pi^2}};\quad\cdots\cdots\frac{n\pi}{lb}\sqrt{\frac{2a^2l^2+n^2\pi^2}{l+n^2\lambda^2\pi^2}}.$$

Ces valeurs sont toutes réelles. Cela confirme l'hypothèse qu'en général il ne se produit que des oscillations réelles, c'est-à-dire des mouvements véritablement périodiques. Mais la série des sons dus à des vibrations dont les nombres s'obtiennent en divisant par 2π les nombres ci-dessus, n'a pas, en général, le caractère simple des séries trouvées dans les cas de vibrations longitudinales ; les nombres de vibrations, dans l'unité de temps, qui constituent ces divers sons, n'ont pas entre eux des rapports numériques simples.

Cependant, lorsque la tension est très grande, et que la section transversale est très petite, cette simplicité des rapports est encore obtenue avec une très grande approximation. En effet introduisons, dans le terme général de la série ci-dessus, les valeurs de a et b ; nous obtenons :

$$(227\,e)\qquad k_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{g\,(\mathrm{T}l^2+n^2\pi^2\mathrm{E}\sigma\lambda^2)}{\Pi\sigma\,(l^2+n^2\pi^2\lambda^2)}}.$$

Si λ devient assez petit pour que, malgré la grandeur habituelle de E, on puisse, sous le radical, négliger les seconds termes par rapport aux premiers, on obtient alors la série arithmétique suivante :

$$\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}g}{\Pi\sigma}},\quad \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}g}{\Pi\sigma}},\quad \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}g}{\Pi\sigma}},\cdots\cdots \qquad (*)$$

(*) Ici l'auteur suppose la tige parfaitement flexible, au moins dans la direction où elle fléchit, mais soumise à une traction longitudinale mesurée par T (ainsi désignée depuis le § 54, troisième formule 209 c).

Tout à l'heure, en réduisant (227 e) à (227 f), il rétablira l'élasticité de flexion, mesurée par le terme $n^2\pi^2\mathrm{E}\sigma\lambda^2$ du numérateur sous le radical, en supposant la tension ou traction longitudinale T, nulle ou négligeable.

Mais on peut observer que dans l'un comme dans l'autre de ces deux cas, il efface au dénominateur le terme $+\,n^2\pi^2\lambda^2$ provenant, comme nous avons dit dans la note finale du § 59, des termes différentiels tels que $\frac{\Pi}{g}\lambda^2\sigma\frac{d^4u}{dz^2\,dt^2}$, négligeables absolument au même titre que d'autres quantités qu'on n'a pas même cherché à faire entrer en ligne de compte.

Il est vrai que lorsque n devient extrêmement grand, $n^2\pi^2\lambda^2$ peut n'être plus négligeable devant l^2. Mais alors k_n n'est plus relatif qu'à des vibrations partielles que leur faible amplitude, et leur période excessivement courte, rendent négligeables.

On voit d'ailleurs que l'approximation sera d'autant plus grande que n sera plus petit ; elle sera donc aussi grande que possible pour les premiers termes de la série. Cette série est la même que celle qui a été obtenue pour les vibrations longitudinales ; elle comprend le son fondamental, l'octave, et ainsi de suite. C'est cette même série que l'on obtient aussi dans la théorie ordinaire pour les cordes vibrant transversalement et supposées parfaitement flexibles. Le nombre des vibrations du son fondamental est proportionnel à $\frac{1}{l}\sqrt{\frac{Tg}{\Pi\varpi}}$. Ce son, avec toute la série des harmoniques, s'élève lorsque la tension T s'accroît ; il s'abaisse lorsque la longueur, le poids spécifique ou la superficie de la section transversale augmentent. Il est, en outre, très remarquable que λ a disparu de cette série, de sorte que l'inégalité, signalée plus haut, entre les séries de sons correspondants aux vibrations parallèles à chacun des deux axes principaux n'existe plus dans cette nouvelle hypothèse.

Il en est tout autrement quand, au contraire, la tension longitudinale T est très faible ou tout à fait nulle, comme cela peut avoir lieu pour un ressort ou une lame élastique (*feder*) dont les extrémités sont simplement posées sur des appuis. Faisons alors, dans le terme général ci-dessus, $T=0$; et, vu que l'épaisseur de la lame, par conséquent λ, est une quantité fort petite vis-à-vis de la longueur l, négligeons aussi, au dénominateur, le terme $n^2\pi^2\lambda^2$ devant l^2, ce qui peut se faire pour les plus petites valeurs du nombre n, nous aurons :

$$(227\,f)\qquad k_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\lambda^2 g}{\Pi}}\,.$$

Dans ce cas nous obtenons une série de sons dont les nombres de vibrations sont en rapports simples ; mais ces nombres croissent comme la suite des carrés des nombres entiers successifs : au son fondamental succède immédiatement sa seconde octave.

Dans le cas le plus général, on n'obtient pas une série simple de sons, puisque n se trouve encore sous le radical. On ne peut déterminer numériquement la série entière que par les nombres de vibrations, supposés connus, de deux sons. Ce résultat est d'autant plus remarquable que la position des nœuds, est la même dans tous les cas, et est tout à fait simple. En effet, puisque $\beta_n = \frac{n\pi}{l}$, on a, pour le facteur qui dépend de z, dans l'expression de v_n,

$$\sin\frac{n\pi z}{l}\,,$$

quantité qui s'annule pour $z =$ tout nombre entier de fois $\frac{l}{n}$. Donc, dans tous les cas, les nœuds du $n^{\text{ième}}$ son partagent la longueur l en n parties égales; en sorte que la tige, lorsqu'elle rend le $n^{\text{ième}}$ son, se comporte comme si elle était formée de n tiges d'égale longueur $\frac{l}{n}$, qui donneraient toutes ensemble leur son fondamental.

Les valeurs de k_n peuvent servir à exprimer l'état initial. D'après ce qu'on a dit de l'exclusion nécessaire des termes exponentiels à exposants réels, et de la réalité nécessaire des coefficients k_n affectant le temps t dans les séries de sinus et de cosinus en lesquelles se sont naturellement transformées les exponentielles à exposants imaginaires, l'expression la plus générale de u est :

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} (B_n \cos k_n t + C_n \sin k_n t) \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

On a donc, pour l'instant initial $t=0$, [conditions (222. c)]

$$u = f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi z}{l}; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} k_n C_n \sin \frac{n\pi z}{l};$$

tout à fait comme dans le cas des vibrations longitudinales; et le même procédé qui a été employé pour celles-ci (§ 60, p. 478) donnera :

$$\int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \frac{l}{2} B_n; \qquad \int_0^l F(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz = k_n \frac{l}{2} C_n.$$

J'appliquerai ce qui précède à un cas particulier. Je suppose que la tige tout entière se trouve, originairement, dans l'état naturel. Les points compris sur une très petite longueur de la tige, entre $z=h+\varepsilon$ et $z=h-\varepsilon$, ont reçu la vitesse initiale u_0; tous les autres points de la tige ne possèdent aucune vitesse initiale. Dans ce cas $f(z)$ est nul en tous les points, et, par suite, tous les coefficients B disparaissent. $F(z)$ n'est différent de zéro qu'entre $z = h - \varepsilon$ et $z = h + \varepsilon$, et, dans toute cette étendue, il a la valeur constante u_0. Puisque cette fonction F s'évanouit en dehors de ces limites il y a lieu, dans l'intégration, de n'avoir égard qu'à leur intervalle; on a, par conséquent :

$$C = \frac{2u_0}{lk_n} \int_{h-\varepsilon}^{h+\varepsilon} \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \frac{2u_0}{n\pi k_n} \left[\cos \frac{n\pi(h-\varepsilon)}{l} - \cos \frac{n\pi(h+\varepsilon)}{l} \right]$$

$$= \frac{4u_0}{n\pi k_n} \sin \frac{n\pi h}{l} \sin \frac{n\pi\varepsilon}{l}.$$

Si, comme je l'ai admis, ε est très petit par rapport à l, on peut

remplacer $\sin\frac{n\pi\varepsilon}{l}$ par $\frac{n\pi\varepsilon}{l}$, et il reste, en définitive :

$$C_n = 4\frac{u_0\varepsilon}{lk_n}\sin\frac{n\pi h}{l}.$$

L'état vibratoire tout entier est donc représenté par la série :

$$u = \frac{4u_0\varepsilon}{l}\left(\frac{1}{k_1}\sin\frac{\pi h}{l}\sin\frac{\pi z}{l}\sin k_1 t + \frac{1}{k_2}\sin\frac{2\pi h}{l}\sin\frac{2\pi z}{l}\sin k_2 t + \ldots\ldots\right).$$

Les termes de cette série décroissent manifestement puisque les nombres k_1, k_2...... croissent, d'après leur expression (227.f), comme les carrés des nombres naturels. Le son fondamental prédomine donc, et les sons harmoniques deviennent de plus en plus faibles à mesure que leur hauteur augmente. Il peut même y avoir un ou plusieurs de ces sons harmoniques qui manquent complètement, ce qui arrive si le point d'ébranlement de la corde coïncide avec le point nodal d'un son, par exemple du $n^{ième}$ son. Alors, d'après la définition des points nodaux, on a $\sin\frac{n\pi h}{l} = 0$; et, en même temps que ce facteur, le terme correspondant de la série s'annule (*).

Je n'entrerai pas dans l'examen d'autres cas particuliers; j'ai eu surtout pour but l'exposition de la méthode générale qui est développée plus haut. On trouvera, dans Poisson, *Traité de mécanique*, 2e édition, 1833, tome II, page 368 et suivantes (**), l'étude

(*) Par exemple si $h = \frac{l}{2}$, comme $\sin\frac{n\pi h}{l}$ prend. pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$..... les valeurs alternatives $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$..., les termes où n est pair manquent, et les autres sont alternativement positifs et négatifs.

(**) Poisson après avoir donné (nº 519, p. 371 de son livre) l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{E\lambda^2 g}{\Pi}\frac{d^4u}{dz^4} = 0,$$

qui est celle (222) ci-dessus, réduite dans son second membre au deuxième terme, ajoute qu'il y a, en outre, des équations à satisfaire aux deux extrémités $z = 0$, $z = l$ de la tige. Il observe qu'à cet égard il pourra se présenter six cas différents selon qu'à chacune d'elles la tige sera encastrée, ou simplement appuyée, ou entièrement libre. Comme ces six cas se raitent, continue-t-il, de la même manière, il en prend un seul; non pas, comme Clebsch, celui de l'appui aux deux bouts, qui se traite, ainsi qu'on voit, avec des séries ne contenant que des sinus circulaires où les paramètres k procèdent simplement dans la proportion des nombres naturels 1, 2, 3 ..., mais le cas plus complexe de *liberté aux deux bouts*, où les conditions sont $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$, $\frac{d^3u}{dz^3} = 0$ pour $z = 0$ et pour $z = l$. Ce cas exige que l'inconnue u ait une expression en série de termes affectés à la fois de sinus circulaires et de sinus ou cosinus hyperboliques de multiples de z dont les coefficients k ou m sont fournis par les racines, en nombres infinis d'une équation transcendante

$$\cos ml . \cos \text{hyp}\, ml = 1.$$

Ces racines figurent au carré dans les multiples du temps t dont le sinus et le cosinus entrent dans la même expression du déplacement transversal u des points de la tige.

des cas où la tension T disparaît, et il me suffira de renvoyer à cet ouvrage (***).

(***) **NOTE FINALE DU § 61.**

De l'Impulsion transversale des Barres élastiques, et de leur vibration avec le corps qui les aura mises en mouvement. Détermination de leur flexion ainsi que des conditions de leur résistance vive ou dynamique.

1. — *Vibrations d'une tige produites par l'impulsion d'un corps étranger et sa résistance dite* vive *ou* dynamique. — Le calcul des mouvements vibratoires des pièces de charpente ou de machines n'intéresse le problème de la stabilité de leur cohésion, ou de ce que Thomas Young a appelé leur *résilience*, et Poncelet, leur *résistance vive*, qu'autant que ces pièces sont supposées *vibrer* non pas *seules* comme le supposent les solutions données par Clebsch, mais *unies avec le corps étranger* dont l'impulsion, ou brusque, ou graduée, les a fait sortir de leur état d'équilibre ; car c'est pendant cette union, ne durât-elle que le temps d'une demi-période oscillatoire, que les déplacements relatifs des parties de ces pièces atteignent leur maximum et qu'elles courent le plus grand danger de rupture ou d'énervation dont les calculs de résistance ont pour objet de les sauver.

C'est dans cette pensée que Navier, par une habile intégration, a donné une formule des *vibrations longitudinales* faites par une barre avec un corps pesant qui l'a heurtée à une extrémité, tandis qu'elle est fixée à l'autre (*) ; solution que Poncelet a reproduite en la complétant sur un point (**), et qui intéresse, par exemple, le calcul des dimensions à donner aux tiges de support des ponts suspendus.

Le *problème de l'impulsion transversale* est d'une importance plus grande

---

(*) Mémoire sur les ponts suspendus, 1823, n°s 220 — 226, pages 148 — 151.

(**) *Introduction à la mécanique industrielle*, 1839, note du n° 322. Une note subséquente, celle du n° 325, n'est relative qu'au cas où le corps heurtant, animé d'une certaine vitesse, viendrait heurter un autre corps étranger, déjà joint à la barre.

Ces solutions sont en série trigonométrique. J'ai reconnu (*Compte rendu de la séance de l'Académie du* 30 *mars* 1868, t. LXVI, p. 650) que ce problème de l'impulsion longitudinale peut être exactement résolu *en termes finis* si on le regarde comme un cas particulier ou extrême de celui du choc de deux barres élastiques (précédemment traité au *Compte rendu*, 24 décembre 1866, p. 1108 ou au *Journal de Liouville*, t. IX, 1867, p. 237 à 376) ; à savoir le cas où *la barre heurtante est d'une section bien plus grande en même temps qu'extrêmement courte ou extrêmement raide par rapport à la barre heurtée*,

Pour en tirer des conclusions pouvant modifier celles de Navier, il faudra reprendre la théorie du choc longitudinal de deux barres en termes finis, présentée et traitée avec détail au mémoire cité de 1866-67, mais en supposant que l'une des deux soit fixée au bout au lieu d'être libre comme l'autre. Ce travail commencé donne lieu de présumer qu'il confir-

et plus générale, car il intéresse l'établissement des poutres de ponts, des planchers de bâtiments, etc.

Je vais donc exposer, en les étendant, les solutions que j'en ai données dans des mémoires dont il n'a encore été publié que de courts extraits. Puis, je donnerai plusieurs considérations ou solutions particulières de cas d'impulsions *graduées* ou *non brusques* s'opérant tantôt seules, tantôt simultanément au choc ou immédiatement après, et dont les effets, pour mettre la cohésion en péril, méritent aussi d'être pris en considération.

Dans ces solutions, l'inconnue, qui est le déplacement transversal de chaque point, est généralement exprimée par une série où le temps et l'abscisse se trouvent engagés dans des sinus ou cosinus tant circulaires qu'hyperboliques, et où ils sont multipliés par des nombres que fournissent les racines d'une équation transcendante. Les mouvements résultent donc de la superposition d'un nombre infini de vibrations simples ou *pendulaires*; et les *courbures* prises, auxquelles il faut imposer un maximum pour assurer la stabilité de la cohésion, ne peuvent être obtenues que par un calcul tant numérique que graphique d'un certain nombre de termes de ces séries.

Mais lorsqu'il ne s'agit d'avoir que la *flèche de flexion dynamique*, ou le plus grand des déplacements des points, on peut les poser, généralement, d'une manière presque exacte, et dans des limites très étendues du rapport des masses heurtantes et heurtées, en se bornant au premier terme de la série, susceptible, par un développement facile, d'être mis sous une forme très simple. Or, cette expression simple de la flèche dynamique peut, comme je l'ai reconnu dans une multitude d'exemples, être identiquement obtenu sans poser d'équations différentielles, en s'aidant d'une hypothèse plausible sur les rapports mutuels des déplacements, et en y appliquant, d'une manière tout élémentaire, le théorème des vitesses virtuelles ou celui des pertes brusques de force vive; en sorte que rien n'empêchera d'introduire dans les cours, même industriels, cette méthode que j'appelle de *deuxième approximation*, tenant suffisamment compte de l'*inertie* des systèmes heurtés, et d'en substituer l'enseignement général à celui qui y est quelquefois donné, pour deux cas particuliers, de la méthode dans laquelle, en abstrayant tout à fait ou en supposant infiniment petite la masse de ces systèmes, on s'éloigne généralement beaucoup de la réalité et des faits.

Je termine cette Note par une comparaison des résultats, soit des formules

---

mera, à quelques égards, une remarquable intuition de Thomas Young, qui, en 1807, (*A Course of Lectures on natural Philosophy and Mecanics Arts*, vol. 1, p. 144) avançait que si un corps heurte longitudinalement une barre, et si la vitesse d'arrivée se trouve, avec la vitesse de propagation du son ou de l'ébranlement suivant sa longueur, dans un rapport plus grand que n'est la proportion de la compression ou de l'extension susceptible d'être supportée sans altération par la matière de la même barre, la *résilience* de cette matière sera inévitablement vaincue, et le corps heurtant, quelque petit qu'en soit le volume, brisera la pièce, ou bien il y fera quelque impression permanente altérant sa contexture au moins dans l'endroit soumis au choc.

transcendantes, soit des formules simples nouvelles, avec ceux des expériences de choc des barres, faites par la Commission anglaise de l'emploi des fers, de 1846 à 1849. On jugera sans doute que ce rapprochement confirme d'une manière désirable les formules et méthodes ici présentées. Nous n'en exprimons pas moins le vœu, dans notre conclusion, de plus nombreuses applications numériques des formules transcendantes, et d'expériences nouvelles dont nous indiquons la direction désirable à notre avis.

2. — *Équation différentielle indéfinie des mouvements vibratoires transversaux d'une barre dont les sections, et aussi l'élasticité, peuvent varier d'un bout à l'autre, d'une manière même discontinue, et qui se trouve unie avec des masses étrangères dont une ou plusieurs peuvent l'avoir heurtée.* — Prenons comme Clebsch, pour axe des z, la ligne supposée droite unissant les centres de gravité des sections de la barre, faites perpendiculairement à cette ligne, l'origine étant à son extrémité de gauche ; et appelons, pour la section transversale appelée σ, dont l'abscisse est z, la barre s'étendant de $z=0$ à $z=a$,

u, le déplacement subi au temps t par le centre de gravité de cette section dans le sens transversal x, ou dans le *plan de flexion* zx supposé comprendre un des deux axes principaux d'inertie des sections σ;

I_y ou simplement I, (ce que Clebsch appelle $\sigma\lambda^2$) le moment d'inertie de σ autour de son autre axe principal ;

E_z ou simplement E, le module d'élasticité d'extension des *fibres* ou éléments longitudinaux qui, tous, sont supposés peu inclinés sur l'axe des z;

p le poids ou $\frac{p}{g}$ la masse, par unité de longueur, toujours pour l'élément dont l'abcisse est z, de la barre, *et de la matière qui peut lui être unie avec continuité*, telle qu'un plancher ou une *charge permanente*, matière qui contribue à l'inertie du système sans augmenter ordinairement sa résistance élastique ni sa cohésion ;

g la force, de gravité ou autre, qui peut agir, suivant le sens transversal des déplacements u, sur l'unité de la masse $\frac{p}{g}$;

Q, le poids d'un corps censé rigide, d'une longueur très petite dans le sens z, et qui est uni à la barre en un endroit déterminé de sa longueur;

$\mathrm{q}=\int_0^a p\,dz+\mathrm{Q}$, le poids total du système ; $d\mathrm{q}$, son élément;

M_y ou simplement M, le moment statique, autour de l'axe du moment d'inertie I_y ou I, tracé sur le plan de σ, des forces élastiques ou tensions qui sont exercées à travers cette section, par la matière qui est située *au delà* de cette même section, c'est-à-dire du côté *droit* ou des z positifs ;

F, la résultante, dite *effort tranchant*, des mêmes forces agissant à travers la section σ, estimées dans le sens de x ou de u, qui est tangent à cette section.

Considérons l'équilibre de rotation d'une tranche $\sigma\,dz$ de la barre, autour de l'axe, perpendiculaire à z et à x, du moment d'inertie I de la première des deux sections voisines σ et $\sigma' = \sigma + d\sigma$, distantes l'une de l'autre de dz, entre lesquelles cette tranche se trouve comprise. On a, comme on sait (voir ci-dessus)

$$(a) \qquad M = EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Il s'exerce à travers la section σ', de la part de la matière au-delà, un moment égal à celui-ci augmenté de sa différentielle par rapport à z. Il peut être supposé s'exercer autour du même axe que M; mais comme il tend à faire tourner l'élément dans un sens opposé, ils fournissent ensemble un moment résultant

$$(b) \qquad -dz\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

L'effort tranchant $F + dz\dfrac{dF}{dz}$ exercé dans le sens de x ou de u à travers la section σ', produit, avec un bras levier dz, autour du même axe, un moment que nous pouvons réduire à $F\,dz$ en négligeant ce qui serait affecté de dz^2. En négligeant de même ce qui, dans cet équilibre de rotation, résulterait des forces motrices et d'inertie pouvant agir transversalement sur la tranche (forces proportionnelles à son volume infiniment petit $\sigma\,dz$ et ayant des bras de levier moindres que dz), l'équation d'équilibre donne, pour l'expression de l'effort tranchant exercé à travers une section σ par la matière qui est au delà, c'est-à-dire du côté des z positifs,

$$(c) \qquad F = -\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

expression déjà connue pour le cas de EI constant (équations (i) de la Note finale du § 29).

Ce premier résultat nous permet de poser l'équation de l'équilibre de translation, dans le sens transversal de x ou u, de la même tranche dont la masse est $\dfrac{p}{g}dz$, dont l'inertie est $-\dfrac{p}{g}dz\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, et qui est sollicitée transversalement par la force $\dfrac{p}{g}\mathbf{g}dz$, outre celles F et $-\left(F + \dfrac{\partial F}{\partial z}dz\right)$ qui agissent sur ses deux bases. En égalant à zéro la somme de ces forces prises avec les signes convenables, on a l'équation

$$(d) \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{p}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{g}\right) = 0.$$

Cette équation, si $EI = E\sigma\lambda^2$ est constant, et si l'on écrit $\Pi\sigma$, supposé constant aussi, à la place de p, coïncide avec celle (222) de Clebsch, § 61,

p. 482, en effaçant, dans celle-ci, son dernier terme qui est très petit du même ordre que des quantités déjà négligées lorsqu'on pose de pareilles équations, et, aussi, le premier terme du second membre, qui n'influe, avons-nous dit, que lorsque la tension longitudinale appelée T est extrêmement considérable par rapport à la force élastique, ainsi qu'il arrive dans les problèmes tels que celui des cordes vibrantes dont nous ne nous occupons pas ici.

Dans ce qui va suivre jusqu'au n° 24 nous réduirons cette équation à

$$(d') \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{p}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ,$$

parce que, pour simplifier ces commencements d'exposition, nous négligerons ou abstrairons ces forces g telles que la pesanteur, ce qui est permis en tant qu'approximation lorsque la partie *graduelle* ou *tranquille* des impulsions est négligeable devant l'autre. Et il n'y a d'ailleurs aucun effet de ce genre si la barre n'est heurtée qu'*horizontalement*.

5. — *Équations ou conditions définies, c'est-à-dire à satisfaire pour certaines sections.* — Pour les extrémités $z = 0$, $z = a$, de la barre, les plus habituelles de ces conditions sont de trois sortes, selon qu'à ces extrémités il y a liberté, appui ou encastrement. On a, d'après les formules (*a*) et (*c*),

(*e*)
- A une extrémité libre (ni moment M, ni effort transversal F); $\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$.
- A une extrémité appuyée (déplacement nul, moment nul) : $u = 0$, $\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
- A une extrémité encastrée (déplacement nul, longitudinalité obligée de la tangente à la fibre moyenne fléchie) : $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;

conditions dont il faut faire attention que la pre mière $\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ne peut être remplacée par $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ que lorsque EI est constant (*).

A la jonction de la barre *a* avec une autre barre à laquelle elle serait soudée, la matière et la section pouvant varier brusquement en passant de l'une à l'autre, mais la direction des éléments de la fibre moyenne et le moment des forces élastiques qui font équilibre aux forces extérieures devant

(*) On verra, vers la fin de la présente Note (n° 49, 6°, tige à coupe longitudinale parabolique) un exemple où $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, sans son multiplicateur I, eût amené une absurdité.

être les mêmes de part et d'autre de la section d'assemblage (u_1, E_1, I_1 désignant dans la seconde barre ce que sont u, E, I dans la première) :

$$(f)\qquad u = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z}, \qquad EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = E_1I_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad \text{au point } z = a.$$

Enfin, au point de jonction de la barre avec le corps Q ou avec la *masse concentrée* $\frac{Q}{g}$ dont nous abstrayons ici la pesanteur, mais où l'inertie $-\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ doit être continuellement en équilibre dynamique avec l'effort ou avec les efforts F qu'exerce sur lui transversalement la matière *disséminée* de la barre qui est au delà ou en deçà selon que ce corps est fixé à sa première ou à sa seconde extrémité ; et avec la matière des deux côtés à la fois s'il est placé intermédiairement (cas où les parties de barre en deçà et au delà doivent être traitées comme deux barres différentes) :

(g)
Si le corps Q est à la première extrémité $z = 0$, $\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$.

S'il est à la deuxième $z = a$, $\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$.

S'il est en un point intermédiaire, ou à la jonction des deux barres soudées, $\frac{Q}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_1I_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) = 0$, outre les trois conditions (f).

Et il faudra satisfaire, aussi, aux conditions initiales de petits déplacements u, donnés, s'il y a lieu, pour $t = 0$, et, surtout, de vitesses initiales $\frac{\partial u}{\partial t}$ connues, ce qui comprendra, comme on verra, la condition de choc de la barre par le corps Q avec une vitesse donnée.

Avant de présenter d'une manière générale l'intégration de l'équation indéfinie aux dérivées partielles (d') satisfaisant aux conditions définies (e) ou (f) et (g), donnons, pour fixer les idées, la solution pour un cas simple.

4. — *Solution du problème, pour le cas simple d'une barre prismatique homogène, appuyée aux deux extrémités et heurtée transversalement au milieu.* — Cette solution est celle que j'ai présentée en 1853-1854 à la Société philomathique, et en 1857 à l'Académie, avec de nombreux calculs numériques et graphiques à l'appui (Voir ci-après nos 32, 33, 34).

Soit $2a$ la longueur de la barre, ou l'intervalle de ses appuis qu'on peut, avec Euler, supposer être deux styles pénétrant au milieu de son épaisseur et autour desquels elle puisse tourner, en même temps qu'un peu glisser au moyen de petites rainures, afin qu'on puisse abstraire toute résistance à l'extension de son plan moyen fléchi. Soient P son poids, Q celui du corps dur (sphérique si l'on veut) qui l'a heurtée avec une vitesse V.

D'après ce qu'on a dit au n° 3, les deux moitiés de la barre seraient à

traiter comme deux barres différentes qui se raccordent ; et on sait que, même dans les problèmes de flexion purement statique d'une barre $2a$ sous l'action d'un pareil poids, ses deux parties a se changent en deux courbes et non pas en une seule.

Mais, *vu la symétrie*, au lieu de considérer deux barres, nous pouvons, *ici et dans tout ce qui suivra, ne nous occuper que d'une seule des deux moitiés*, celle qui est comprise entre les points $z=0$ et $z=a$, en imposant simplement à la tangente en ce dernier point, au lieu d'une condition (f) de raccordement, de rester parallèle à la ligne des appuis, qui est l'axe des z.

Abstrayons, comme il a été dit à la fin du n° 2, le poids de la barre, ce qui est même rigoureux, ainsi qu'on l'a observé, si, verticale ou horizontale, elle n'est heurtée qu'horizontalement. En faisant pour abréger, vu qu'ici I et E sont constants

$$(k) \qquad \frac{\mathrm{P}a^3}{2g\mathrm{EI}}=\tau^2,$$

en sorte que τ *représentera un temps* (*); l'équation aux dérivées partielles (d'), où on a $p=\frac{\mathrm{P}}{2a}$, se réduit à

$$(l) \qquad \tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}=0,$$

à intégrer de manière à satisfaire aux conditions définies suivantes dont les deux premières sont tirées de la seconde (e) :

$$(m) \qquad (u)_{z=0}=0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0}=0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=a}=0;$$

en y ajoutant, comme remplaçant la dernière condition (g) d'équilibre de l'inertie du poids Q avec les efforts tranchants exercés tant en deçà qu'au delà de son point d'union à la barre :

$$(n) \quad -\frac{\mathrm{Q}}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{z=a}+2\mathrm{EI}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_{z=a}=0, \quad \text{ou} \quad \tau^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{z=a}=\frac{\mathrm{P}a^3}{\mathrm{Q}}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_{z=a}.$$

On y satisfait en prenant, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, m étant des constantes, Z une fonction de z et de m, et $\sum$ le signe somme d'un nombre infini de termes ou d'expressions de même forme, ne différant entre elles que par les valeurs de m, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$:

$$(o) \qquad u=\sum \mathrm{Z}\left(\mathcal{A}\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau}+\mathcal{B}\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right);$$

moyennant que Z satisfasse à ce qui résulte de la substitution de chacun de ces termes dans (l), ainsi que dans (m), (n), savoir :

$$(p) \qquad m^4\mathrm{Z}=a^4\frac{\partial^4 \mathrm{Z}}{\partial z^4}, \text{ pour toutes les valeurs de } z;$$

(*) En effet, a est une longueur, I est le produit de quatre longueurs, P est une force, E est le quotient d'une force par une aire ou par le produit de deux longueurs, enfin g est le quotient d'une vitesse par un temps, ou d'une longueur par le *carré d'un temps*.

et pour ses valeurs particulières 0 et a, à

$$(q)\qquad (Z)_{z=0}=0\,,\quad \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_{z=0}=0\,,\quad \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=a}=0\,;$$

$$(r)\qquad \left(Qm^4Z+Pa^3\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_{z=a}=0\,.$$

L'intégrale de l'équation simplement différentielle (p) est une somme de quatre exponentielles e^{nz} multipliées par des coefficients constants. Or, en y faisant $Z=e^{nz}$ on a

$$m^4=a^4n^4\,,\quad \text{d'où}\quad n=\frac{m}{a}\,,\quad -\frac{m}{a}\,,\quad \frac{m}{a}\sqrt{-1}\,,\quad -\frac{m}{a}\sqrt{-1}\,.$$

Si l'on convertit en binômes trigonométriques les $e^{\pm\frac{mz}{a}\sqrt{-1}}$ et si l'on groupe les parties tant réelles qu'imaginaires des coefficients de ces deux exponentielles, de manière que les sinus et cosinus ne soient affectés que de coefficients réels, on a, sih, coh, désignant des sinus et cosinus hyperboliques $\frac{1}{2}\left(e^{+}-e^{-}\right)$, $\frac{1}{2}\left(e^{+}+e^{-}\right)$, une expression de la forme

$$(s)\qquad Z=C\sin\frac{mz}{a}+C_1\cos\frac{mz}{a}+C_2\,\text{sih}\,\frac{mz}{a}+C_3\,\text{coh}\,\frac{mz}{a}\,.$$

Pour satisfaire aux trois conditions (q) il faut $C_1+C_3=0$, $-C_1+C_3=0$, $C\cos m-C_1\sin m+C_2\,\text{coh}\,m+C_3\,\text{sih}\,m=0$, d'où :

$$C_1=0\,,\qquad C_3=0\,,\qquad C_2=-\frac{C\cos m}{\text{coh}\,m}\,.$$

On a, aussi, $\mathfrak{B}=0$ pour le problème actuel, dans lequel nous supposons $(u)_{t=0}=0$, ou qu'aucun déplacement des points de la barre n'a précédé l'instant $t=0$ du choc. La seule constante qui reste, C, ou plutôt $C\dfrac{\cos m}{\text{coh}\,m}$ se fondra avec $\mathfrak{A}$ pour former un seul coefficient que nous pouvons appeler A, et qui, dans chaque terme, dépendra de m. On a ainsi

$$(t)\qquad u=\sum\frac{\tau}{m^2}AZ\sin\frac{m^2 t}{\tau}\,,\qquad\text{où}\qquad Z=\frac{\sin\frac{mz}{a}}{\cos m}-\frac{\text{sih}\,\frac{mz}{a}}{\text{coh}\,m}\,;$$

et où les valeurs du *paramètre* m doivent être tirées de ce qui résulte de la substitution de cette expression de Z dans la dernière équation définie (r), qui reste à satisfaire ; c'est-à-dire doivent être tirées de l'équation

$$(u)\qquad m\left(\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\text{sih}\,m}{\text{coh}\,m}\right)=2\frac{P}{Q}\,,\qquad\text{ou}\qquad \text{tang}\,m-\text{tah}\,m=\frac{2P}{Qm}\,;$$

équation transcendante, dite *caractéristique*, que nous avons débarrassée, en

la posant, du facteur m^2, parce que la racine $m = 0$ donnerait $Z = 0$ ou $u = 0$, solution étrangère à notre objet.

L'intégrale ainsi obtenue ne sera générale qu'autant que le $\sum$ s'étendra aux termes répondant à *toutes* les racines, en nombre infini, de cette équation (u). Mais si m en est une racine réelle et positive, $-m$, $m\sqrt{-1}$, $-m\sqrt{-1}$ en sont d'autres qui substituées à m dans

$$Z \sin\frac{m^2 t}{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{\frac{mz}{a}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{mz}{a}\sqrt{-1}}}{e^{m\sqrt{-1}} + e^{-m\sqrt{-1}}} - \frac{e^{\frac{mz}{a}} - e^{-\frac{mz}{a}}}{e^{m} - e^{-m}}\right)\sin\frac{m^2 t}{\tau},$$

ne feront que lui attribuer trois autres valeurs égales à celle-ci multipliée par -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. On peut réunir les quatre termes du $\sum$ qui leur sont relatifs en ajoutant leurs coefficients ; il est donc permis (comme l'observe Poisson pour d'autres questions) de se contenter, pour la série $\sum$ de u, des termes résultant *des seules racines réelles et positives* de l'équation caractéristique, sans que la solution (t) cesse de représenter l'intégrale *la plus générale* de l'équation aux différences partielles (l), satisfaisant aux conditions définies (m) et (n).

La même circonstance se produira dans toutes les autres solutions ci-après et nous n'y reviendrons généralement pas.

5. — *Détermination, pour le même cas simple, des coefficients* A *de la série, de manière à satisfaire aux conditions initiales.* — L'expression (t) représente à toute époque t, ou marquée par le temps t, les déplacements transversaux des points du système comprenant, avec la barre, la masse $\frac{Q}{g}$, car les déplacements de cette masse sont ceux du point milieu $z = a$ de la barre.

Supposons d'abord que les vitesses, à l'instant initial, soient une fonction ψ de l'abscisse z, ou qu'on ait :

$$(v) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z).$$

En y substituant (t) l'on a, comme condition à remplir :

$$(x) \qquad \Sigma \mathrm{A}Z = \psi(z).$$

Pour en tirer l'expression de A en m, multiplions les deux membres de cette équation par $Z'd\mathfrak{q}$, $d\mathfrak{q}$ étant l'élément du poids $\mathfrak{q} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ du système, et Z' étant la valeur (t) de Z relative à une racine de l'équation (u) qui soit, *ou la même* que celle m, entrant dans le Z du premier membre de (x), *ou différente* ; et intégrons, en représentant par $\int_{\mathfrak{q}}$ les intégrales prises

pour le système entier dont Q est le poids; nous aurons

$$(y)\qquad \Sigma A \int_{\mathrm{q}} ZZ'd\mathrm{q} = \int_{\mathrm{q}} Z\varphi(z)\,d\mathrm{q}\,;$$

ou, ce qui revient au même, en séparant les parties des intégrales relatives à la barre P pour laquelle on a les éléments $d\mathrm{q} = \frac{Pdz}{2a}$, des parties relatives au poids Q, et en appelant Z_a, Z'_a les valeurs de Z, Z′ pour $z = a$,

$$(z)\qquad \Sigma A\left(2\frac{P}{2a}\int_0^a ZZ'dz + QZ_aZ'_a\right) = 2\frac{P}{2a}\int_0^a Z'\varphi(z)\,dz + QZ'_a\varphi(a).$$

Nous prouverons plus loin, d'une manière générale, sans avoir besoin d'effectuer des intégrations qui pour des cas plus complexes seraient longues et pénibles, que les $\int ZZ'd\mathrm{q}$ ou les parenthèses comme celle du premier membre de (z), ont toujours une valeur nulle lorsque m' et m sont deux racines différentes de l'équation (u). Bornons-nous à le reconnaître ici en voyant d'abord que si on effectue, ce qui n'offre aucune difficulté, l'intégration par rapport à z indiquée dans le premier membre de (z), en mettant pour Z son expression (t), et pour Z′ celle en laquelle elle se change quand on met m' pour m, on trouve

$$(a_1)\qquad \int_0^a ZZ'dz = -2a\,\frac{m^3(\operatorname{tang} m' - \operatorname{tah} m') - m'^3(\operatorname{tang} m - \operatorname{tah} m)}{m^4 - m'^4}.$$

Cette égalité, qui résulte identiquement de la forme de la fonction appelée Z, a lieu quels que soient les nombres m, m'. Mais, en prenant pour ces nombres, supposés différents, deux racines de l'équation transcendante (u), la première et la seconde parenthèse du numérateur de (a_1) ont les valeurs $\frac{2P}{Qm'}$, $\frac{2P}{Qm}$, en sorte qu'on peut diviser haut et bas par $m^4 - m'^4$, d'où résulte :

$$\int_0^a ZZ'dz = -\frac{4a}{mm'}\,\frac{P}{Q}.$$

D'une autre part si on substitue $Z_a = \operatorname{tang} m - \operatorname{tah} m = \frac{2P}{Qm}$, $Z'_a = \frac{2P}{Qm'}$, dans la parenthèse du premier membre de (z), il en résulte bien, toujours quand m et m' sont deux racines de (u), différentes l'une de l'autre,

$$(b_1)\qquad 2\frac{P}{2a}\int_0^a ZZ'dz + QZ_aZ'_a = \int_{\mathrm{q}} ZZ'd\mathrm{q} = 0\,.$$

Tous les termes de la série $\sum$ disparaissent donc du premier membre de l'équation (y), hors celui pour lequel $m' = m$; et cette équation, dont le premier membre se réduit ainsi à $A\int_{\mathrm{q}} Z^2\,d\mathrm{q}$, donne pour la valeur désirée du coefficient A qui affecte le terme général de l'expression en série trigo-

nométrique (t) du déplacement u :

$$(c_1) \qquad A = \frac{\int_q Z\psi(z)\,dq}{\int_q Z^2\,dq} = \frac{2\frac{P}{2a}\int_0^{2a} Z\psi(z)\,dz + QZ_a\psi(a)}{2\frac{P}{2a}\int_0^{2a} Z^2dz + QZ_a^2}.$$

6. — *Même cas simple du n° 4. Particularisation des vitesses initiales, et solution complète.* — D'après la nature de notre problème de choc transversal, énoncé au n° 4, toutes les vitesses initiales de la barre sont nulles, et V est celle de la masse $\frac{Q}{g}$, en sorte qu'il faut, dans la valeur (c_1) de A, faire $\psi(a) = V$ et toutes les autres valeurs de $\psi(z) = 0$, d'où

$$(d_1) \qquad A = \frac{QVZ_a}{\frac{P}{a}\int_0^{2a} Z^2dz + QZ_a^2} \quad (^*).$$

On a, dans cette même expression, $Z_a = \text{tang}\, m - \text{tah}\, m = \frac{2P}{Qm}$ d'après

(*) Dans la réalité, à l'instant qui doit être regardé comme vraiment initial, où le centre de gravité de la section heurtée $z = a$ se trouve avoir acquis la même vitesse, légèrement au-dessous de V, que le corps heurtant, il y a une très petite portion de la barre, s'étendant également de part et d'autre de son milieu, qui est déjà ébranlée. Mais vu son peu de longueur, Z peut y être regardé comme constant et égal à Z_a ; car, même, la forme (t) de la fonction Z de z donne $\frac{dZ}{dz} = 0$ pour $z = a$, en sorte que la grandeur de Z ne peut y éprouver que des variations du second ordre de petitesse. Le numérateur $\int_q Z\psi(z)\,dq$ de (c_1) est donc $= Z_a\int_q \psi(z)\,dq$. Or, vu qu'aux extrémités de cette petite portion la vitesse est nulle comme l'est encore celle du reste, les parties de barre restées immobiles sont alors sans action sur elle, en sorte que cette petite portion de barre a dû entrer en partage de la quantité de mouvement du corps Q, *comme aurait fait un corps libre ;* d'où suit que la somme $\int_q \psi(z)\frac{dq}{g}$ de celles qui sont alors possédées par cette petite portion et par le corps Q, doit être égale à la quantité de mouvement primitive $\frac{Q}{g}$ V de celui-ci. On a donc, à cela près de quantités d'ordre supérieur de petitesse et qui sont négligeables (ainsi que je l'ai déjà exprimé le 9 janvier 1865, *Compte rendu*, p. 45, en réponse à une objection qui m'avait été faite); on a, dis-je, pour le numérateur de (c_1) :

$$\int_q Z\psi(z)\,dq = QVZ_a ;$$

absolument comme si le corps Q avait, *seul*, une vitesse égale à V dans cet instant qui doit être pris pour initial. Et on a cette égalité *quelle que soit* la loi inconnue qu'exprime $\psi(z)$, suivant laquelle se distribuent les vitesses des centres des sections dans la petite portion ébranlée, depuis le milieu, où la vitesse est celle de Q, jusqu'aux extrémités où elle est nulle.

(u). Enfin, soit qu'on calcule directement $\int_0^a Z^2\, dz$ par une intégration, soit qu'on la déduise de l'expression (a_1) qu'une intégration a donnée pour $\int_0^a ZZ'\, dz$ en déterminant la vraie valeur qu'elle prend pour $m = m'$, par le procédé ordinaire relatif aux fractions offrant d'abord $\frac{0}{0}$; procédé légitimement employable ici puisque m et m' ne sont encore, dans cette expression (a_1), que des nombres quelconques susceptibles d'être rapprochés autant qu'on veut, et point encore des racines de (u) dont les valeurs ne varient qu'avec discontinuité de l'une à l'autre ; soit, enfin, qu'on se serve d'un procédé que nous indiquerons plus loin pour obtenir sans intégration les valeurs des dénominateurs des expressions telles que (c_1) des coefficients des séries, on trouve

$$\int_0^a Z^2 dz = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\mathrm{coh}^2 m}\right) - \frac{3a}{2m}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\mathrm{sih}\, m}{\mathrm{coh}\, m}\right);$$

d'où, vu $\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\mathrm{sih}\, m}{\mathrm{coh}\, m} = Z_a$, l'on déduit pour le dénominateur complet de (c_1) ou (d_1) :

$$\int_{\mathrm{q}} Z^2 d\mathrm{q} = \frac{\mathrm{P}}{a}\int Z^2 dz + \mathrm{Q}Z_a^2 = \frac{\mathrm{P}}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\mathrm{coh}^2 m}\right) - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{P}}{m} Z_a + \mathrm{Q}Z_a^2 ;$$

et si l'on a égard à l'équation (u), $\mathrm{Q}Z_a = \frac{2\mathrm{P}}{m}$, on a ce dénominateur :

$$(d'_1) \qquad \int_{\mathrm{q}} Z^2 d\mathrm{q} = \frac{\mathrm{P}}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\mathrm{coh}^2 m} + \frac{1}{m} Z_a\right).$$

D'où, substituant, et divisant haut et bas par $\frac{m^2 \mathrm{P}}{2}$,

$$(e_1) \quad u = \mathrm{V}\tau \sum \frac{\frac{4}{m}\left(\frac{\sin \frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\mathrm{sih}\frac{mz}{a}}{\mathrm{coh}\, m}\right)}{m\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\mathrm{sih}\, m}{\mathrm{coh}\, m}\right) + m^2\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\mathrm{coh}^2 m}\right)} \sin \frac{m^2 t}{\tau}, \text{ où } \tau = \sqrt{\frac{\mathrm{P}a^3}{2g\mathrm{EI}}};$$

et le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs, en nombre infini, de m, racines réelles et positives de l'équation

$$m\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\mathrm{sih}\, m}{\mathrm{coh}\, m}\right) = \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}.$$

Le mouvement se compose, comme on voit, de la superposition d'une infinité de vibrations *simples* ou *pendulaires*, de durées périodiques $2\pi\frac{\tau}{m^2}$,

puisque $\sin \frac{m^2}{\tau}\left(t+2\pi\frac{\tau}{m^2}\right)=\sin\frac{m^2 t}{\tau}$; ou de périodes de plus en plus courtes à mesure que l'on considère celles qui répondent aux valeurs de plus en plus grandes du paramètre m.

Nous renvoyons au n° 32 pour tirer de là diverses conséquences numériques, et au n° 40 pour déduire, des solutions rigoureuses de ce genre, des solutions simples et approchées, qui sont susceptibles d'être obtenues élémentairement, comme on verra aux n°s 44 et suivants.

7. — *Solution générale, applicable à une barre non prismatique libre ou assujettie, heurtée à un endroit quelconque.* — L'équation aux dérivées partielles (d') est résolue par une expression

$$(f_1) \qquad u=\sum\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathrm{m}^2}\sin \mathrm{m}^2 t+\mathcal{B}\cos \mathrm{m}^2 t\right)\mathrm{Z},$$

où $\sum$ est la somme relative à toutes les valeurs d'un paramètre numérique m, et les fonctions Z de z et de m assujetties à satisfaire à l'équation suivante, résultant de la substitution, dans (e), de chaque terme des $\sum$,

$$(g_1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 \mathrm{Z}}{\partial z^2}\right)=\mathrm{m}^4\frac{p}{g}\mathrm{Z}.$$

Supposons que cette équation différentielle du quatrième ordre, résolue soit sous forme finie si on le peut, soit par des séries, ait fourni, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 désignant quatre fonctions de z et de m, et C_1, C_2, C_3, C_4, quatre constantes, l'intégrale générale

$$(h_1) \qquad \mathrm{Z}=\mathrm{C}_1\mathrm{Z}_1+\mathrm{C}_2\mathrm{Z}_2+\mathrm{C}_3\mathrm{Z}_3+\mathrm{C}_4\mathrm{Z}_4.$$

Substituons-la dans les conditions limites ou définies (e) du n° 3, à choisir selon les cas de liberté, d'appui ou d'encastrement des deux extrémités. Nous aurons quatre équations comme celle (h_1) que nous venons d'écrire, excepté qu'il y aura zéro dans les premiers membres, et, dans les seconds, quatre termes où les constantes inconnues C_1, C_2, C_3, C_4, affecteront des valeurs de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ou de leurs dérivées particularisées pour les abscisses z des extrémités de la barre ou tige. Trois de ces quatre équations du premier degré serviront à déterminer les trois rapports $\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}$, $\frac{\mathrm{C}_3}{\mathrm{C}_1}$, $\frac{\mathrm{C}_4}{\mathrm{C}_1}$ de ces inconnues à l'une d'entre elles. Substituant dans (h_1), la valeur de la fonction Z ne contiendra plus, ainsi, d'arbitraire qu'un seul multiplicateur constant C_1 qui, par la substitution ultérieure de Z dans l'expression (f_1) de u, se trouvera fondu dans les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des sinus et cosinus des multiples du temps, coefficients restés ainsi les seuls qui soient à déterminer pour le terme général de la série Σ.

Mais, ces trois mêmes rapports $\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}$, $\frac{\mathrm{C}_3}{\mathrm{C}_1}$, $\frac{\mathrm{C}_4}{\mathrm{C}_1}$ étant substitués dans la qua-

trième des quatre équations du premier degré en C_1, C_2, C_3, C_4, qui ont zéro pour un de leurs membres, C_1 lui-même disparaîtra, car tous les termes seront divisibles par C_1. Il restera l'équation *caractéristique* en m [analogue à (u)], que nous appellerons

$$(i_1) \qquad \varpi(\mathrm{m}) = 0,$$

toujours transcendante ou affectée de sinus tant circulaires qu'hyperboliques, en sorte que ses racines sont en nombre infini.

8. — *Relation générale propre à la détermination des coefficients des sinus et des cosinus des multiples du temps, de manière à satisfaire aux conditions initiales.* — Soient à remplir les conditions initiales de petits déplacements et de vitesses des points du système :

$$(j_1) \qquad (u)_{t=0} = \varphi(z), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z),$$

φ et ψ étant des fonctions de z compatibles avec les conditions limites ou d'extrémités de barre ou parties de barre (e), (f), (g) du n° 5, mais du reste quelconques, continues ou discontinues. Les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, devront satisfaire à

$$(j'_1) \qquad \Sigma\mathcal{B}Z = \varphi(z), \qquad \Sigma\mathcal{A}Z = \psi(z).$$

Pour les déterminer comme il a été fait au n° 5 pour un cas particulier, multiplions par $Z'd\mathrm{q}$, Z' étant la valeur de Z pour une valeur particulière m' de m, et intégrons pour le poids entier q du système ; nous avons

$$(j''_1) \quad \Sigma\mathcal{B}\int_{\mathrm{q}} ZZ'd\mathrm{q} = \int_{\mathrm{q}} Z'\varphi(z)\,d\mathrm{q}, \quad \Sigma\mathcal{A}\int_{\mathrm{q}} ZZ'd\mathrm{q} = \int_{\mathrm{q}} Z'\psi(z)\,d\mathrm{q}.$$

Nous allons prouver qu'on a toujours $\int_{\mathrm{q}} ZZ'd\mathrm{q}$ nul quand il entre dans Z et dans Z' deux racines différentes m, m' de l'équation caractéristique (i_1) $\varpi(\mathrm{m}) = 0$.

A cet effet, supposons d'abord que les sections et la matière de la barre ne varient que d'une manière *graduelle* et *continue* d'un bout à l'autre de sa longueur a, et qu'elle n'entraîne par conséquent aucun corps étranger Q dans son mouvement vibratoire. Multiplions par $Z'dz$ l'équation différentielle (g_1) ; ajoutons-la à une équation toute semblable où Z', m' sont mis pour Z, m, et multipliée par $-Zdz$; puis intégrons de $z=0$ à $z=a$, nous avons

$$(k_1)\ \frac{m^4 - m'^4}{g}\int_0^a ZZ'p\,dz = \int_0^a Z'\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)dz - \int_0^a Z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2}\right)dz.$$

Effectuons par parties, deux fois, l'intégration indiquée par le premier terme du second membre et désignons par 0, a en indices inférieur et supérieur, l'excès des valeurs pour $z=a$, sur les valeurs pour $z=0$, des quantités qui en sont affectées. Ce premier terme sera transformé, comme il est facile

de le vérifier par différentiation, en

$$(k'_1) \qquad \left[Z' \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial Z'}{\partial z}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right]_0^a - \int_0^a \frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

Transformons de la même manière le second terme du deuxième membre de (k_1), et substituons dans ce membre. Les deux intégrales comme celle qui forme le dernier terme de (k'_1) se détruiront, et il restera

$$(l_1) \quad \frac{m^4 - m'^4}{g}\int_0^a ZZ'p\,dz = \left[Z'\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial Z'}{\partial z}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial Z}{\partial z}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2} - Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2}\right)\right]_{z=0}^{z=a}.$$

Or les conditions limites (e) du nº 5, si l'on y remplace u par un quelconque des termes de la série donnant sa valeur (f_1), comme on a fait pour obtenir (g_1) par la substitution de ce terme général dans l'équation indéfinie (d'), donnent

$$(m_1) \quad \begin{cases} \text{A une extrémité libre} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0\,, \quad \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) = 0\,, \\ \text{A une extrémité appuyée} & Z = 0\,, \qquad \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0\,, \\ \text{A une extrémité encastrée} & Z = 0\,, \qquad \dfrac{\partial Z}{\partial z} = 0\,; \end{cases}$$

Et des équations semblables avec Z' au lieu de Z.

Il en résultera, pour chacune des six combinaisons possibles de conditions ou pareilles ou différentes aux deux extrémités de la barre, que l'un ou l'autre des deux facteurs des termes entre crochets dans le second membre de (l_1) sera nul soit pour $z = 0$, soit pour $z = a$.

Ce second membre est donc nul.

Il en résulte que si m et m′ sont deux racines différentes de l'équation (i_1) $\omega(\mathrm{m}) = 0$, propre à fournir toutes les valeurs de ce paramètre, en sorte que $\mathrm{m}^4 - \mathrm{m}'^4$ ne soit pas nul, on a, en remettant pour $p\,dz$ l'élément $d\mathrm{Q}$ du poids Q de la barre :

$$(n_1) \qquad \int_{\mathrm{Q}} ZZ'd\mathrm{Q} = 0\,.$$

9. — *Preuve que cette même relation* (n_1) *a lieu lorsque, dans le système, il y a discontinuité, à savoir variation brusque de la grandeur ou de la forme des sections d'une partie de barre à l'autre, même quand, à leur jonction il y a une masse étrangère vibrant avec elles.* — Posons, pour les déplacements transversaux dans ces deux portions envisagées comme deux barres soudées ensemble :

$$(o_1) \quad u = \Sigma Z\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\sin \mathrm{m}^2 t + \mathrm{B}\cos \mathrm{m}^2 t\right), \quad u_1 = \Sigma Z_1\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\sin \mathrm{m}^2 t + \mathrm{B}\cos \mathrm{m}^2 t\right),$$

où nous donnons au temps t les mêmes multiplicateurs m^2 parce que les diverses parties du système doivent vibrer avec les mêmes périodes (ce dont on se convaincrait bientôt, au besoin, si on laissait d'abord quelconques ces multiplicateurs) ; et nous y donnons les mêmes coefficients A et B, soit aux sinus, soit aux cosinus, afin que la condition nécessaire de jonction $(u)_{z=a} = (u_1)_{z=a}$ des deux barres se trouve remplie quel que soit t, par exemple quand $\sin m^2 t = 0$ et $\cos m^2 t = 1$, ou réciproquement.

En substituant ces expressions (o_1) dans la troisième condition définie (g) du n° 5 qui est relative à cette sorte de jonction de deux barres, elle donne, en divisant par le binôme trigonométrique en t, la valeur :

$$(p_1) \qquad \frac{m^4}{g} QZ_a = \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(EI \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_1 I_1 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} \right) \right]_{z=a} .$$

Écrivons une équation semblable avec m', Z', Z'_a, Z'_1 au lieu de m, Z, Z_a, Z_1 ; ajoutons celle-là (c'est-à-dire (p_1)) multipliée par Z'_a à celle-ci multipliée par $-Z_a$, et ajoutons y aussi deux équations comme celle (l_1), l'une pour l'étendue $z = 0$ à $z = a$ de la première barre, l'autre pour celle $z = a$ à $z = a + a_1$ de la seconde. Le premier membre sera, p_1 étant pour la deuxième barre, ce qu'est p pour la première,

$$(q_1) \qquad \frac{m^4 - m'^4}{g} \left(\int_0^a ZZ'p\,dz + QZ_a Z'_a + \int_a^{a+a_1} Z_1 Z'_1 p_1\,dz \right) .$$

Le second membre auquel cette expression doit être égale sera :

$$(r_1) \quad \left[-Z'\frac{\partial}{\partial z}\left(EI \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) + Z \frac{\partial}{\partial z}\left(EI \frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2} \right) + Z'\frac{\partial}{\partial z}\left(E_1 I_1 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} \right) - Z\frac{\partial}{\partial z}\left(E_1 I_1 \frac{\partial^2 Z'_1}{\partial z^2} \right) \right]_{z=a}$$

plus quatre quadrinômes comme les deux qui sont implicitement compris dans le second membre de (l_1), savoir deux spécifiés pour le point de jonction $z = a$, les deux autres pour les extrémités $z = 0$ et $z = a + a_1$. Ces deux derniers auront tous leurs termes nuls, quelles que soient les conditions de liberté, appui ou encastrement à ces extrémités de la double barre, d'après ce qu'on a vu, vers la fin du n° précédent 8, pour le second membre de (l_1). Quant aux deux quadrinômes qui répondent à la jonction $z = a$, le premier et le quatrième terme de celui qui est relatif à la première barre seront évidemment détruits par les deux premiers termes de (r_1), et les deux autres détruiront de même le premier et le quatrième terme du quadrinôme relatif à la seconde barre, en vertu de ce que la condition de jonction (f), $u = u_1$, exige, pour être remplie à chaque instant, qu'on ait :

$$(s_1) \qquad (Z_1)_{z=a} = (Z)_{z=a}, \text{ et de même } (Z'_1)_{z=a} = (Z_1)_{z=a} .$$

Quant au deuxième et au troisième terme du premier des quatre quadrinômes additifs, ils seront respectivement détruits par les termes de même rang du second quadrinôme, en vertu de ce que les deux dernières condi-

tions de raccordement (f) relatives aux directions et aux moments, exigent qu'on ait :

$$(s'_1) \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)_{z=a}, \quad \left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_{z=a} = \left(\mathrm{E_1 I_1}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2}\right)_{z=a}.$$

Tout le second membre de l'équation somme, dont (q_1) est le premier membre, *a donc zéro pour valeur.* La parenthèse trinôme que multiplie $\dfrac{\mathrm{m}^4 - \mathrm{m}'^4}{g}$ et qui, quand on comprend le corps Q dans le poids total $\mathfrak{q}$ du système, n'est autre chose que :

$$\int ZZ'd\mathfrak{q}\,,$$

est donc $= 0$ lorsque m et m′ sont deux racines différentes de l'équation (i_1) fournissant les valeurs de m.

Or, le même raisonnement peut être fait pour un nombre quelconque n de barres a, soudées bout à bout, avec ou sans corps étrangers à leurs jonctions, pour lesquelles on aura posé un pareil nombre d'expressions (f_1) de u, ayant toutes la même parenthèse trigonométrique binôme en t; d'où autant d'équations (g_1) donnant, pour les Z, des intégrales comme (h_1) à quatre constantes C, entre lesquelles les conditions aux extrémités ou aux points de jonction fournissent $4n$ équations du premier degré. Un nombre $4n - 1$ de ces équations servira à déterminer les $4n - 1$ rapports de constantes C à l'une d'entre elles, qui, elle-même, disparaitra non seulement des expressions de u en se fondant avec les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, mais encore de la $4n^{\text{ième}}$ équation où on aura substitué les valeurs tirées pour toutes les autres; en sorte que tous les termes seront divisibles par la constante C subsistante. Cette dernière des $4n$ équations en m et C ne contiendra donc plus d'inconnue que m. Ce sera la caractéristique (i_1) $\varpi\,(\mathrm{m}) = 0$ propre à fournir les valeurs de ce paramètre numérique, et dont le premier membre se trouvera être nécessairement un déterminant de tous les coefficients des C des $4n$ équations.

Dans ce même cas, aussi complexe qu'on veut, le polynôme qui remplacera le trinôme de la parenthèse de (q_1) sera, comme celui-ci, l'intégrale $\int_{\mathfrak{q}} ZZ'd\mathfrak{q}$ étendue aux éléments du poids total du système. Donc on a en général, les Z et Z′ étant relatifs à deux racines m, m′ inégales de $\varpi\,(\mathrm{m}) = 0$,

$$(t_1) \qquad \int_{\mathfrak{q}} ZZ'd\mathfrak{q} = 0.$$

10. — *Conséquence. Expression générale des coefficients à donner aux sinus et aux cosinus des multiples du temps pour satisfaire aux conditions initiales.* — Il suit de la relation (t_1) qu'en intégrant les équations posés (j'_1) multi-

pliées par $Z'd\mathfrak{q}$, tout disparaîtra dans les premiers membres excepté le terme pour lequel m est le même que dans le multiplicateur; d'où, pour les coefficients cherchés de l'expression (f_1) du déplacement transversal somme $\sum$ d'une infinité de déplacements variant pendulairement :

$$(u_1) \qquad B = \frac{\int_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{d}} Z\varphi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{d}} Z^2 d\mathfrak{q}}, \quad A = \frac{\int_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{d}} Z\psi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{d}} Z^2 d\mathfrak{q}};$$

les éléments $d\mathfrak{q}$ du poids total étant aussi bien ceux des poids *concentrés* Q que ceux des poids *disséminés* pour lesquels on a $d\mathfrak{q} = p\,dz$ (*).

(*) M. Boussinesq, dans la première partie d'un remarquable mémoire inséré aux *Comptes rendus*, 7 et 14 décembre 1874 (pages 1324 et 1407) sous le titre : *De deux lois simples de la résistance vive des solides*, a donné une équation, et des expressions, de A, B, plus générales que celles (t_1) et (u_1), car elles s'appliquent aux mouvements vibratoires de corps absolument quelconques, supposés, à volonté, avoir des parties *disséminées* et déformables, telles que des tiges, et des parties *concentrées*, telles que les corps rigides Q ci-dessus. A cet effet, dans les trois équations générales d'équilibre dynamique telles que

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\ldots\ldots = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\ldots\ldots = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

où ρ est la densité au point (x, y, z), et où $t_{xx},\ldots\ldots t_{xy}$ sont six fonctions connues des dérivées en x, y, z des petits déplacements, u, v, w parallèles aux trois coordonnées, il fait

$$(\beta) \qquad \left(u,\ v,\ w\right) = \sum\left(\frac{A}{k}\sin kt + B\cos kt\right)\left(X,\ Y,\ Z\right),$$

X, Y, Z, étant fonctions des trois coordonnées x, y, z : ce qui change les équations d'équilibre (α) en celles-ci où les T sont les t dans lesquels on a mis X, Y, Z à la place de x, y, z :

$$(\gamma) \quad \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \rho k^2 X = 0;\ldots\ldots + \rho k^2 Y = 0;\ \ldots\ldots + \rho k^2 Z = 0;$$

équations simplement différentielles dont celles (p_1), (q_1) sont des cas particuliers, et qui sont propres à donner les trois fonctions X, Y, Z si on les intègre de manière à satisfaire aux diverses conditions analogues à (m_1) applicables aux points de la surface du système.

Ensuite, si X', Y', Z', k' sont des valeurs de X, Y, Z, k qui correspondent à une intégrale simple quelconque, et si après avoir ajouté ces trois équations (γ) multipliées respectivement par $X'\rho\,d\omega$, $Y'\rho\,d\omega$, $Z'\rho\,d\omega$, l'on intègre pour toute l'étendue du système dont le volume total est appelé ω, en transformant, par le procédé souvent employé ci-dessus, l'intégrale pour tout ce volume en une intégrale pour sa surface sur les éléments de laquelle il y a des conditions de liberté ou d'assujettissement à remplir (opération dont celle qui a transformé le second membre de (k_1) a été une particularisation), l'on obtient $k^2\int_\omega (XX'+YY'+ZZ')\rho\,d\omega$ = une fonction, que M. Boussinesq démontre ne pas changer de grandeur quand on change le paramètre k qui entre dans X, Y, Z, en celle k' de ses valeurs qui entre dans X', Y', Z'. Or, continue-t-il, le trinôme $XX' + YY' + ZZ'$ ne change évidemment pas non plus de grandeur par une pareille permutation; donc si k' est différent de k on doit avoir nécessairement

$$(\zeta) \qquad \int_\omega (XX' + YY' + ZZ')\,\rho\,d\omega = 0;$$

11. — *L'équation en* m *ne peut pas avoir de racines imaginaires binômes, et on peut abstraire ses racines imaginaires monômes, ainsi que ses racines négatives.* — En effet, d'abord, à chaque racine binôme $\alpha + 6\sqrt{-1}$ si l'équation (i_1) $\varpi(\mathrm{m}) = 0$ en avait, répondrait sa conjuguée $\alpha - 6\sqrt{-1}$. En les prenant pour m et m′, elles donneraient par substitution, pour Z, Z′, des valeurs aussi conjuguées, ou de la forme $L + M\sqrt{-1}$, $L - M\sqrt{-1}$, d'où $ZZ' = L^2 + M^2$. Or, ainsi que l'a remarqué Poisson dans des questions analogues, cela est impossible d'après la relation générale (t') $\int_{\mathrm{q}} ZZ' d\mathrm{q} = 0$; car comme les éléments $d\mathrm{q}$ sont des quantités positives, on aurait zéro pour une somme de quantités positives.

En second lieu, l'équation en m peut avoir, il est vrai, des racines imaginaires monômes, et, même, toujours à chaque racine réelle positive m, répondront des racines $-\mathrm{m}$, $\mathrm{m}\sqrt{-1}$, $-\mathrm{m}\sqrt{-1}$. Or comme on a vu au au n° 5 sur un exemple, il en résultera des valeurs de u qui groupées quatre à quatre, feront des sommes égales à celle qui répond à m seul, multiplié par un certain coefficient, d'où le même illustre géomètre conclut, comme il a été fait à ce même n° 5, qu'on peut se restreindre aux seules racines réelles et positives sans altérer la généralité de la solution.

12. — *Calcul, sans intégrations, du dénominateur* $\int_{\mathrm{q}} Z^2 d\mathrm{q}$ *des formules donnant les coefficients* A, B *du sinus et du cosinus de multiples du temps.* — L'intégration qu'indique $\int_0^a Z^2 p\, dz$ et que nous avons effectuée au n° 6 pour un cas simple, devient longue et rebutante dans les cas plus complexes. On l'évite et l'on n'a à faire *qu'une différentiation* si on se reporte à l'expression suivante (l) du n° 7 où l'intégration se trouve, en quelque sorte, *déjà faite :*

$$(r_1) \quad \int_0^a ZZ'p\,dz = \frac{g \left\{ Z' \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial Z'}{\partial z}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial Z}{\partial z}\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2} - Z\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2}\right) \right\}_{z=0}^{z=a}}{\mathrm{m}^4 - \mathrm{m}'^4}$$

et si on met dans le second membre, pour la fonction Z, son expression déjà trouvée en z et m (avec m′ pour m dans les Z′), puis si on fait m′ = m après avoir remplacé le numérateur et le dénominateur de ce second mem-

relation qui, comme fait celle (t_1) $\int ZZ' d\mathrm{q} = 0$, donne le moyen de déterminer les coefficients A, B des (β) ; car si l'on doit avoir initialement $(u, v, w) = (\varphi, \chi, \psi)$, et $\frac{\partial (u, v, w)}{\partial t} = (\varphi_1, \chi_1, \psi_1)$ fonctions de x, y, z, d'où $\Sigma\, B\,(X, Y, Z) = (\varphi, \chi, \psi)$ et $\Sigma\, A\,(X, Y, Z) = (\varphi_1, \chi_1, \psi_1)$, nous n'avons qu'à multiplier les trois premières de ces égalités par X′, Y′, Z′, et ajouter ; tous les termes des Σ s'élimineront hors un seul, et on tirera :

$$(\gamma) \qquad B = \frac{\int (X\varphi + Y\chi + Z\psi)\,\rho\, d\omega}{\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\,\rho\, d\omega}, \quad A = \frac{\int (X\varphi_1 + Y\chi_1 + Z\psi_1)\,\rho\, d\omega}{\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\,\rho\, d\omega};$$

qui substitués dans les (β) donneront les déplacements u, v, w.]

bre par leurs dérivées prises par rapport à m'. Ce procédé ordinaire de recherche de la valeur d'une fraction prenant la forme $\frac{0}{0}$ peut-être, en effet, légitimement employé ici pour l'expression (v_1) ainsi préparée, puisque m et m' n'y sont encore, comme ce procédé l'exige, que des nombres quelconques pouvant être indéfiniment rapprochés avant d'être faits égaux, et non pas déjà des racines de l'équation transcendante qui, ensuite, en fournira les valeurs distinctes et distantes les unes des autres.

Comme, aux deux extrémités $z=0$, $z=a$, la barre sera, ou encastrée, ce qui exige $\frac{\partial Z}{\partial z}=0$, ou libre, ou bien simplement posée, ce qui exige $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$, les deux termes du milieu de l'accolade seront le plus souvent nuls, de sorte qu'on n'aura à traiter le plus ordinairement de cette manière que

$$\int_0^a ZZ'p\,dz=\frac{g}{m^4-m'^4}\left\{Z'\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)-Z\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2}\right)\right\}_{z=0}^{z=a};$$

et même, très souvent, le binôme restant sera nul à l'une des deux limites, soit celle $z=0$.

Des suppressions de ce genre, propres à simplifier l'opération, peuvent être faites ainsi d'avance, en y employant directement les diverses conditions limites auxquelles Z est astreinte et qui ont servi à constituer son expression en z et m (*); et, cela, même lorsque le système se composera de plusieurs barres a, a_1,...., cas général où dans le premier membre de (v_1) il y aura une somme $\int_0^a ZZ'p\,dz+\int_a^{a+a_1} Z_1Z'_1p_1\,dz+\ldots\ldots$ d'intégrales, et, dans le second membre, une somme de plusieurs quadrinômes, recouvrant tous le même dénominateur $m^4-m'^4$.

Le calcul de la vraie valeur du premier membre, auquel on n'aura plus à ajouter que des termes tels que QZ_a^2 pour avoir $\int_q Z^2 dq$, n'exigera donc *que des différentiations* par rapport à m', avec remplacement immédiat de m' par m regardé comme constant, ce qui sera facile.

15. — *Exemple de ce calcul du dénominateur* $\int_q Z^2 dq$ *des* (u_1), *opéré sans faire d'intégration.* — Cet exemple sera celui du cas simple (n° 4), de la barre prismatique homogène P de longueur $2a$, appuyée aux extrémités, avec le corps Q au milieu. Les trois conditions limites (q) pour $z=0$ et

(*) Bien entendu qu'en faisant ainsi des simplifications préalables, *l'on n'y emploiera pas la dernière de ces conditions*, ou celle qui ne sert, *toutes les autres ayant constitué Z*, qu'à fournir, comme nous avons dit au n° 9, l'équation $\varpi(m)=0$ en m seul. Son introduction dans le second membre de l'équation (v_1) ne servirait qu'à ôter aux m leur qualité de n'être encore que des nombres quelconques, et qu'à faire retomber inutilement dans l'équation déjà démontrée $\int_q ZZ'\,dq=0$.

$z=a$, auxquelles est astreinte la fonction Z tirée de l'équation du quatrième ordre (p), *conditions qui ont servi à déterminer la forme* (t) *de cette fonction*, permettent en faisant p, E, I constants, et en remplaçant d'abord dans l'équation (v_1) suivant les notations de ce n° et des suivants :

$$p \text{ par } \frac{P}{2a}, \quad m^2 \text{ par } \frac{m^2}{\tau}, \quad \text{ou} \quad \frac{m^4}{g} \text{ par } \frac{m^4}{g\tau^2} = m^4 \frac{2EI}{Pa^3},$$

permettent, dis-je, de réduire cette équation (v_1) à la suivante où il n'y a plus, au numérateur, que deux termes particularisés pour la seule seconde limite, qui est $z=a$:

$$(x_1) \qquad \int_0^a ZZ'p\,dz = \frac{Pa^3}{2} \frac{\left(Z' \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_{z=a} - \left(Z \frac{\partial^3 Z'}{\partial z^3}\right)_{z=a}}{m^4 - m'^4}.$$

En y attribuant à Z sa valeur ou son expression trouvée (t) $Z = \dfrac{\sin \frac{mz}{a}}{\cos m} - \dfrac{\text{sih} \frac{mz}{a}}{\text{coh}\, m}$, nous pouvons remplacer d'abord les $\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\right)_{z=a}$ par les valeurs $-\dfrac{2m^3}{a^3}$, $-2\dfrac{m'^3}{a^3}$ qui en résultent; ce qui, si l'on différentie ensuite haut et bas par rapport à m', en regardant m comme constant, et si, après, on fait $m'=m$, donne, pour la moitié de la barre :

$$(y_1) \quad \int_0^a Z^2 p\,dz = -P\left[\frac{\frac{\partial}{\partial m'}(m^3 Z_a - m'^3 Z_a)}{\frac{\partial}{\partial m'}(m^4 - m'^4)}\right]_{m=m'} = -P\frac{m^3 \frac{\partial Z_a}{\partial m} - 3m^2 Z_a}{-4m^3} = \frac{P}{4}\frac{\partial Z_a}{\partial m} - \frac{3P}{4m} Z_a$$

D'où il suit, vu que

$$(z_1) \qquad Z_a = \frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}; \qquad \frac{\partial Z_a}{\partial m} = \frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m}.$$

que pour tout le système $\mathfrak{q} = P + Q$ se composant des deux parties symétriques de la barre ayant la longueur a chacune, et du corps Q qui lui est uni, l'on a, vu $p = \dfrac{P}{2a}$,

$$(a_2) \quad \int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = 2\int_0^a Z^2 \frac{P}{2a} dz + QZ_a^2 = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m}\right) - \frac{3P}{2}\frac{Z_a}{m} + QZ_a^2.$$

Cette expression est la même chose que celle (d'_1) page 501 :

$$(b_2) \quad \int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{2}\left[\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m} + \frac{1}{m}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right)\right],$$

que nous avons trouvée au n° 6 par des intégrations; d'où la solution (e_1), autrement établie, du problème de la brusque impulsion transversale, par un corps Q avec une vitesse V, de la barre d'un poids P et de longueur $2a$, posée sur deux appuis aux extrémités, et dont on suppose ici (n° 13) que la pesanteur propre n'entre pas en jeu, non plus que celle du corps Q, ce qui peut être si le choc se fait horizontalement.

14. *Notations abréviatives diverses.* — Dans ce qui va suivre, nous ferons habituellement, pour abréger

$$(d_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin m = s\,,\quad \cos m = c\,,\quad \mathrm{sih}\, m = h\,,\quad \mathrm{coh}\, m = k\,; \\ \left(\text{d'où } s^2 + c^2 = 1\,,\ \ k^2 - h^2 = 1\,,\ \ \frac{\partial s}{\partial m} = c,\ \frac{\partial c}{\partial m} = -s,\ \frac{\partial h}{\partial m} = k,\ \frac{\partial k}{\partial m} = h\,.\right): \\ \sin\frac{mz}{a} = s_z\,,\quad \cos\frac{mz}{a} = c_z\,,\quad \mathrm{sih}\,\frac{mz}{a} = h_z\,,\quad \mathrm{coh}\,\frac{mz}{a} = k_z\,, \\ \left(Z,\frac{\partial Z}{\partial z},\ldots\ldots\right)_{z=0,a} = Z_0,\ Z_a,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_a,\ \text{etc.}\ldots\,; \\ \tau^2 = \frac{Pa^3}{2gEI} \text{ ou } \frac{Pa^3}{gEI} \text{ suivant que la barre aura une longueur } 2a \text{ ou une longueur } a. \end{array}\right.$$

15. *Autres exemples de chocs de barres prismatiques. — Barre encastrée aux deux bouts, heurtée au milieu.* — Soient $2a$ sa longueur, P son poids, Q celui du corps qui la heurte transversalement avec une vitesse V; nous aurons, vu la symétrie des deux moitiés, les mêmes équations de (k) à (s) qu'au n° 4 relatif à la barre appuyée, sauf

$$\text{dans } (m) \text{ et } (q)\,,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 = 0,\ \left[\text{au lieu de } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0 = 0\right].$$

D'où, entre les quatre coefficients C de l'intégrale (s)

$$C_1 + C_3 = 0\,,\quad C + C_2 = 0\,,\quad C\cos m - C_1 \sin m + C_2\,\mathrm{coh}\, m + C_3\,\mathrm{sih}\, m = 0\,;$$

$$C_3 = -C_1\,,\quad C_2 = -C\,,\quad C_1 = \frac{\cos m - \mathrm{coh}\, m}{\sin m + \mathrm{sih}\, m}\,.$$

Ce qui donne, en fondant C($\cos m - \mathrm{coh}\, m$) avec le $\mathcal{A}$ de (o) en un coefficient A :

$$(e_2)\qquad u = \sum \frac{\tau}{m^2} AZ \sin\frac{m^2 t}{\tau}\,,\quad \text{où}\quad Z = \frac{h_z - s_z}{k - c} - \frac{k_z - c_z}{h + s}\,;$$

le $\sum$ s'étendant à toutes les racines (il suffit, comme aux n°s 4 et 12, de celles qui sont réelles et positives) de l'équation en m qu'on obtient en substituant la valeur (e_2) de Z dans la condition

$$(r \text{ reproduite})\qquad Qm^4 Z_a + Pa^3\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = 0\,.$$

Comme on a, toutes réductions faites,

$$(f_2)\qquad Z_a=\frac{2(1-ck)}{(s+h)(c-k)},\quad \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a=-2\frac{m^3}{a^3}\frac{sk+ch}{(s+h)(c-k)},$$

cette équation en m, divisée par m^3 qui donnerait la racine $m=0$, étrangère à la question puisqu'elle rendrait (e_2) Z nul, est

$$(g_2)\qquad m(1-\cos m\,\text{coh}\,m)=\frac{P}{Q}(\sin m\,\text{coh}\,m+\cos m\,\text{sih}\,m).$$

On a, d'après (d_1) du n° 6, le coefficient

$$A=QVZ_a \text{ divisé par } 2\frac{P}{2a}\int_0^a Z^2dz+QZ_a^2;$$

et on obtiendra sans intégration, comme nous avons dit au n° 13, $\frac{P}{a}\int_0^a Z^2dz$ en calculant au moyen de différentiation par rapport à m' les deux termes de la fraction

$$\frac{P}{a}\int_0^a ZZ'dz=Pa^3\frac{Z'_a\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a-Z_a\left(\frac{\partial^3 Z'}{\partial z^3}\right)_a}{m^4-m'^4},$$

et faisant ensuite $m'=m$ dans leur quotient.

Or, on aura ainsi, en désignant pour un moment par s', c', h', k' des valeurs de s, c, h, k avec m' au lieu de m,

$$\frac{P}{a}\int_0^a ZZ'dz=\frac{Pa^3\left\{\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a(2-2c'k')-Z_a\frac{m'^3}{a^3}(2s'k'+2c')\right\}}{(m^4-m'^4)(c'-k')(s'+h')}.$$

Le dénominateur, différentié par rapport à m', est

$$-4m'^3(c'-k')(s'+h')+(m^4-m'^4)\frac{\partial}{\partial m'}[(c'-k')(s'+h')],$$

qui, quand on fait $m'=m$, se réduit à $-4m^3(c-k)(s+h)$. Si l'on différentie de même le numérateur par rapport à m' en regardant m comme constant, et si l'on fait ensuite $m'=m$, en ayant égard à ce que

$$-2(sk-ch)(sk+ch)+4ck(1-ck)=-2(k-c)^2,$$

l'on obtient, en ajoutant QZ_a^2,

$$\int_q Z^2dq=\frac{P}{a}\int_0^a Z^2dz+QZ_a^2=\frac{P}{(s+h)^2}+\frac{4Q(1-ck)^2-\frac{3P}{m}(1-ck)(sk+ch)}{(s+h)^2(c-k)^2}.$$

Jusqu'à présent, dans cette expression, m est, comme a été m', un nombre quelconque. Si maintenant on en fait une des racines de l'équation (g_2), l'on peut remplacer $-\frac{3P}{m}(1-ck)(sk+ch)$ par $-3Q(1-ck)^2$, ce qui réduit l'expression précédente à

$$(h_2) \qquad \int_0^a Z^2 dq = \frac{P}{(s+h)^2} + \frac{Q(1-ck)^2}{(s+h)^2(c-k)^2}.$$

D'où en substituant dans $A = \frac{QVZ_a}{\int Z^2 dq}$, puis dans $u = \sum \frac{\tau}{m^2} AZ \sin \frac{m^2 t}{\tau}$,

$$(i_2) \qquad u = V\tau \sum \frac{2}{m^2} \frac{(1-ck)(c-k)(s+h)}{(1-ck)^2 + \frac{P}{Q}(c-k)^2} Z \sin \frac{m^2 t}{\tau}.$$

16. *Barre de longueur a, encastrée à une extrémité et heurtée transversalement à l'autre.* — L'équation différentielle a toujours la forme (l) :

$$(i'_2) \qquad \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad \text{où } \tau^2 = \frac{Pa^3}{gEI} \left(\text{double du } \tau^2 = \frac{Pa^3}{2gEI} \text{ du n}^\circ\ 4\right).$$

Les conditions sont

$$(u)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=a} = 0, \quad \left[\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Pa^3}{Q}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right]_{z=a} = 0;$$

qui donnent, en faisant encore $u = \sum \mathcal{A} \frac{\tau}{m^2} Z \sin \frac{m^2 t}{\tau}$,

$$(i''_2) \quad m^4 Z = a^4 \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} \text{ partout, et } Z_0 = 0, \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_a = 0, \left(Qm^4 Z + Pa^3 \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = 0$$

d'où une solution

$$(j_2) \qquad u = \sum \frac{\tau}{m^2} AZ \sin \frac{m^2 t}{\tau}, \quad \text{où } Z = \frac{\operatorname{ch}\frac{mz}{a} - \cos\frac{mz}{a}}{\operatorname{ch} m + \cos m} - \frac{\operatorname{sh}\frac{mz}{a} - \sin\frac{mz}{a}}{\operatorname{sh} m + \sin m}.$$

Et, comme on a ainsi

$$Z_a = \frac{2(sk - ch)}{(s+h)(c+k)}, \quad \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = \frac{m^3}{a^3} \frac{-2 + 2ck}{(s+h)(c+k)},$$

la dernière des conditions (i''_2), la seule non employée pour la construction de l'expression de Z, donne, en l'y substituant, l'équation en m

$$(j'_2) \qquad m \frac{\sin m \operatorname{ch} m - \cos m \operatorname{sh} m}{1 + \cos m \operatorname{ch} m} = \frac{P}{Q}.$$

Le dénominateur du coefficient $A = \dfrac{QVZ_a}{\frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz + QZ_a^2}$ s'obtiendra en opérant comme nous avons fait pour la barre encastrée aux deux bouts ; nous aurons ainsi

$$\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz + QZ_a^2 = \frac{P}{(c+k)^2} + \frac{4Q(sk-ch)^2 - \frac{3}{m}(1+ch)(sk-ch)}{(c+k)^2(s+h)^2};$$

expression qui, au moyen de l'équation (j_2) en m, peut être réduite à

$$\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{(c+k)^2} + \frac{Q(sk-ch)^2}{(s+h)^2(c+k)^2}.$$

En sorte qu'on a pour la solution :

$$(k_2) \qquad u = V\tau \sum \frac{2}{m^2} \frac{(sk-ch)(s+h)(c+k)}{(sk-ch)^2 + \frac{P}{Q}(s+h)^2} Z \sin\frac{m^2 t}{\tau}.$$

17. *Barre appuyée aux deux extrémités et heurtée ailleurs qu'au milieu.* — Ce problème offre un exemple du cas où la barre doit être regardée comme composée de deux autres qui se raccordent au point recevant le choc. Je l'ai résolu de la manière suivante en 1865 (*Compte rendu*, 3 juillet, p. 35, troisième complément, etc.).

Soient b et b_1 les longueurs des deux parties que sépare le point heurté, dans cette barre prismatique appuyée aux deux extrémités et ayant une longueur $2a = b + b_1$, avec un poids P ; Q étant celui du corps qui vient la heurter transversalement avec une vitesse V, à l'époque $t = 0$.

Soient u et u_1, au bout d'un temps quelconque t, les déplacements transversaux très petits de points ayant des abscisses z et z_1, comptées respectivement à partir des deux appuis, et par conséquent en sens opposés. On aura, pour les deux parties b, b_1 :

$$(l_2) \qquad \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad \tau^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u_1}{\partial z_1^4} = 0, \quad \text{si } \tau^2 = \frac{Pa^3}{2gEI};$$

à intégrer pour les conditions d'extrémité et de raccordement suivantes, vu que EI est le même pour les deux parties :

$$(m_2) \begin{cases} (u)_{z=0} = 0, \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0 ; (u_1)_{z_1=0} = 0, \left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)_{z_1=0} = 0, \ (u)_{z=b} = (u_1)_{z_1=b_1} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=b} = -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=b_1}, \quad \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=b} = \left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)_{z_1=b_1}. \end{cases}$$

Enfin, toujours au point de raccordement $z = b$, on doit avoir pour l'équi-

libre [(g) du n° 3] entre l'inertie, à l'époque t, du poids Q ayant frappé un élément de barre mi-partie dans les deux portions b, b_1, et les réactions opposées par leur matière, en deçà et au delà, aux efforts tranchants mis continuellement en jeu par le mouvement de ce corps avec la barre,

$$-\frac{Q}{g}\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{Q}{g}\frac{d^2 u_1}{dt^2} = -\mathrm{EI}\frac{d^3 u}{dz^3} = \mathrm{EI}\frac{d^3 u_1}{dz_1^3};$$

condition pouvant être écrite, en multipliant par $-\frac{g\tau^2}{Q} = -\frac{\mathrm{P}a^3}{2\mathrm{QEI}}$,

$$(n_2)\qquad \tau^2\frac{d^2 u}{dt^2} = \tau^2\frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{\mathrm{P}a^3}{2\mathrm{Q}}\left(\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{d^3 u_1}{dz_1^3}\right) \text{ pour } z = b, \text{ ou } z_1 = b_1.$$

Les équations (l_2) seront résolues par des expressions u ou $u_1 = \Sigma\,(\mathrm{Z}$ ou $\mathrm{Z}_1)\sin\frac{m^2 t}{\tau}$, Z et Z_1 étant des expressions trigonométriques quadrinômes en z et z_1 comme celle (h_1) du n° 7. Sans donner le détail de la détermination facile des rapports de sept de leurs huit coefficients constants C_1, C_2,.... au huitième, on peut reconnaître que les équations (l_2) et les conditions (m_2) seront satisfaites en prenant

$$(o_2)\quad \begin{cases} u = \sum \frac{\tau}{m^2}\mathrm{AZ}\sin\frac{m^2 t}{\tau}, & \text{si } \mathrm{Z} = \dfrac{\sin\frac{mb_1}{a}\sin\frac{mz}{a}}{\sin m\cos m} - \dfrac{\mathrm{sih}\frac{mb_1}{a}\,\mathrm{sih}\frac{mz}{a}}{\mathrm{sih}\, m\,\mathrm{coh}\, m}; \\[2ex] u_1 = \sum \frac{\tau}{m^2}\mathrm{AZ}_1\sin\frac{m^2 t}{\tau}, & \text{si } \mathrm{Z}_1 = \dfrac{\sin\frac{mb}{a}\sin\frac{mz_1}{a}}{\sin m\cos m} - \dfrac{\mathrm{sih}\frac{mb}{a}\,\mathrm{sih}\frac{mz_1}{a}}{\mathrm{sih}\, m\,\mathrm{coh}\, m}. \end{cases}$$

En effet, elles satisfont évidemment, outre les deux équations (l_2), les conditions (m_2) 1, 2, 3, 4, 5, 7 : et, quant à la sixième qui donne $\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)_b + \left(\frac{d\mathrm{Z}_1}{dz_1}\right)_{b_1} = 0$, elle revient, divisée par $\frac{m}{a}$, vu la formule connue du sinus circulaire d'une somme et la formule toute semblable pour son sinus hyperbolique, à $\dfrac{\sin\left(\frac{mb}{a} + \frac{mb_1}{a}\right)}{\sin m\cos m} - \dfrac{\mathrm{sih}\left(\frac{mb}{a} + \frac{mb_1}{a}\right)}{\mathrm{sih}\, m\,\mathrm{coh}\, m} = 0$, qui est une identité vu que, $b + b_1$ étant égal à $2a$, chacun des deux termes est égal à 2.

Et, quant à la condition (n_2), elle sera satisfaite si les m sont pris tels qu'on ait

$$(p_2)\qquad -m^4(\mathrm{Z})_b = -m^4(\mathrm{Z}_1)_{b_1} = \frac{\mathrm{P}a^3}{2\mathrm{Q}}\left[\left(\frac{d^3\mathrm{Z}}{dz^3}\right)_b + \left(\frac{d^3\mathrm{Z}_1}{dz_1^3}\right)_{b_1}\right];$$

équation où le binôme entre crochets, étant développé, se réduit à $-\frac{m^3}{a^3}$ multiplié par la somme des deux mêmes quotients que nous venons de trouver égaux chacun à 2. En sorte qu'on a, pour déterminer les valeurs

de m, l'équation transcendante

$$(q_2) \qquad mZ_b = mZ_{1b_1} = \frac{2P}{Q}, \text{ ou } m\left(\frac{\sin\frac{mb}{a}\sin\frac{mb_1}{a}}{\sin m\cos m} - \frac{\text{sih}\frac{mb}{a}\text{sih}\frac{mb_1}{a}}{\text{sih}\, m\,\text{coh}\, m}\right) = \frac{2P}{Q};$$

que l'on a débarrassée du facteur m^3, car la racine $m=0$ donnerait $\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2t}{\tau} = t$, et par conséquent un terme de la forme Ct, ne pouvant exister dans les solutions de problèmes de barres qui soient assujetties de manière à rester immobiles si elles étaient rigides (Voy. n°s 18 à 23).

On peut remarquer aussi que cette équation (q_2), lorsque $b=b_1=a$, se confond avec celle (u) $m(\tang m - \text{tah}\, m) = \frac{2P}{Q}$ du n° 4.

Reste à déterminer le coefficient A. Sa valeur sera celle (c_1) du n° 5 ou (u_1) du n° 9, $A = \frac{\int Z\psi(z)\, d\mathfrak{q}}{\int Z^2 d\mathfrak{q}}$ applicable à un système quelconque, d'un poids total $\mathfrak{q}$, de barres jointives et de corps étrangers Q qu'elles entraînent dans leur mouvement; ce qui reviendra ici, la vitesse initiale ψ étant $=$ V pour le poids Q et $=0$ pour la barre, à

$$(r_2) \qquad A = \frac{QVZ_b}{QZ_b^2 + \frac{P}{2a}\left(\int_0^b Z^2 dz + \int_0^{b_1} Z_1^2 dz_1\right)},$$

où Z_{1b_1} pourrait être mis pour Z_b, puisqu'ils sont égaux d'après les (o_2).

La parenthèse du dénominateur peut être calculée par deux intégrations. On les évite en se servant de l'expression suivante obtenue comme il a été dit au n° 12, et où les accents désignent ce que deviennent, pour m' mis à la place de m, les quantités non accentuées:

$$(s_2) \quad \int_0^b ZZ'dz + \int_0^{b_1} Z_1 Z_1' dz_1 = \frac{a^4}{m^4 - m'^4}\left\{Z_b'\left[\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_b + \left(\frac{\partial^3 Z_1}{\partial z_1^3}\right)_{b_1}\right] - Z_b\left[\left(\frac{\partial^3 Z_1'}{\partial z^3}\right)_b + \left(\frac{\partial^3 Z_1'}{\partial z_1^3}\right)_{b_1}\right]\right\};$$

ou, vu que nous avons trouvé que les termes des binômes différentiels entre crochets, comme celui de (p_2), ont, en effectuant les triples différentiations, pour valeurs $-\frac{4m^3}{a^3}$, $-\frac{4m'^3}{a^3}$,

$$(t_2) \qquad \frac{P}{2a}\left(\int_0^b ZZ'dz + \int_0^{b_1} Z_1 Z_1' dz_1\right) = 2P\,\frac{-m^3 Z_b' + m'^3 Z_b}{m^4 - m'^4};$$

d'où, en faisant $m'=m$ après avoir différentié le numérateur et le dénominateur par rapport à m',

$$(t_2') \qquad \frac{P}{2a}\left(\int_0^b Z^2 dz + \int_0^{b_1} Z_1^2 dz_1\right) = \frac{P}{2}\left(\frac{\partial Z_b}{\partial m} - \frac{3}{m}Z_b\right);$$

$$(u_2) \qquad \int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{2}\left(\frac{\partial Z_b}{\partial m} - \frac{3Z_b}{m}\right) + QZ_b^2.$$

Or on a, d'après (o_2),

$$(v_2)\qquad Z_b = Z_{1b_1} = \frac{\sin\frac{mb}{a}\sin\frac{mb_1}{a}}{\sin m\cos m} - \frac{\operatorname{sih}\frac{mb}{a}\operatorname{sih}\frac{mb_1}{a}}{\operatorname{sih} m \operatorname{coh} m};$$

Si, vu $b+b_1=2a$, l'on remplace les dénominateurs respectivement par

$$\frac{1}{2}\sin 2m = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{mb}{a}+\frac{mb_1}{a}\right),\quad \frac{1}{2}\operatorname{sih} 2m = \frac{1}{2}\operatorname{sih}\left(\frac{mb}{a}+\frac{mb_1}{a}\right).$$

et si l'on développe ces deux sinus de sommes, on obtient, en substituant dans (v_2) et divisant par les numérateurs, l'expression

$$(x_2)\qquad Z_b = \frac{2}{\cot\frac{mb}{a}+\cot\frac{mb_1}{a}} - \frac{2}{\operatorname{coth}\frac{mb}{a}+\operatorname{coth}\frac{mb_1}{a}},$$

qu'il s'agit de différentier pour obtenir $\frac{\partial Z_b}{\partial m}$. La différentiation, vu qu'on a, en général, $\frac{\partial}{\partial x}\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{coth} x = \frac{-1}{\operatorname{sih}^2 x}$, donnera facilement

$$(y_2)\qquad \frac{\partial Z_b}{\partial m} = \frac{b_1\sin^2\frac{mb}{a}+b\sin^2\frac{mb_1}{a}}{2a\sin^2 m\cos^2 m} - \frac{b_1\operatorname{sih}^2\frac{mb}{a}+b\operatorname{sih}^2\frac{mb_1}{a}}{2a\operatorname{sih}^2 m\operatorname{coh}^2 m}.$$

Cette valeur de $\frac{\partial Z_b}{\partial m}$ étant une fois obtenue, nous pouvons maintenant traiter m comme une racine de l'équation (q_2) donnant $Z_b = \frac{2P}{mQ}$. Si l'on met cette valeur de Z_b dans (u_2), il s'y opère, entre le terme $QZ^2_b = Q\frac{4P^2}{m^2Q^2}$ et le terme $\frac{-3P}{2m}Z_b = \frac{-3P^2}{m^2Q}$, une réduction semblable à celles que nous avons déjà eues aux nos 6, 14 et 15, et nous avons définitivement la solution très simple

$$(z_2)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = V\tau\sum\frac{4}{m^3}\dfrac{Z\sin\frac{m^2t}{\tau}}{\frac{\partial Z_b}{\partial m}+\frac{2P}{m^2Q}};\ u_1 = \text{la même chose avec } Z_1 \text{ au lieu de } Z; \\ \text{où } Z, Z_1 \text{ et } \frac{\partial Z_b}{\partial m} \text{ ont les valeurs données par } (o_2) \text{ et } (y_2). \end{array}\right.$$

Nous y reviendrons au no 49 en donnant les expressions approchées des flèches de courbure, etc., résultant du premier terme des $\sum$ développés. Remarquons seulement ici que cette expression (z_2) se ramène à celle (e_1) de la fin du no 6 du cas de heurt au milieu, en faisant $b=b_1=a$.

18. — *Barre libre ou pivotante. — Termes algébriques à ajouter à la somme $\sum$ de termes transcendants et périodiques.* — Ce n'est pas seulement par des expressions transcendantes en z et t telles que les séries ci-dessus, que l'équation différentielle générale (d) ou (d') du quatrième ordre des mouvements transversaux u d'une barre élastique peut être résolue.

Ces séries $\sum$ suffisent lorsque la barre est, ou posée sur deux points fixes, ou encastrée quelque part, *de manière à assurer son immobilité si elle était rigide;* car son élasticité, si on la lui restitue, lui fera prendre seulement des mouvements vibratoires que les termes transcendants représentent.

Mais lorsque la barre est libre, ou lorsqu'elle n'a qu'un point fixe autour duquel elle puisse librement pivoter, la solution devra offrir, hors du $\sum$, des termes algébriques.

Cette partie algébrique pourra être tirée, quelquefois, de la série trigonométrique $\sum$; ce sera alors son terme répondant à la racine m $= 0$ de l'équation transcendante fournissant les valeurs en nombre infini de ce paramètre m ou m; et cette partie exceptionnelle représentera, en quelque sorte, une première vibration dont la période serait infinie.

Mais, comme nous allons voir, il n'en sera pas toujours ainsi. Il n'y a point de raison, en effet, pour qu'une expression de forme périodique puisse fournir la valeur convenable d'un terme qui ne l'est pas; et d'ailleurs, ce passage du fini à l'infini est toujours délicat et sujet à erreur.

Il conviendra donc de calculer séparément ces termes algébriques, au moyen des conditions d'équilibre dynamique de translation et de rotation du système, considéré comme de forme invariable, c'est-à-dire en posant, pour ce système supposé rigide, les équations de conservation des quantités de mouvement et des aires et en en tirant les valeurs des déplacements u, supposés rester très petits ainsi que le temps t pendant lequel ils s'opèrent (car ce ne sont que de très petits déplacements qu'on se propose de déterminer dans cette analyse).

Ensuite, la partie vibratoire, exprimée par la série $\sum$, sera déterminée séparément aussi; car, comme on va le voir, son paramètre m ou m, et les coefficients A, B des sinus et cosinus des multiples des temps qui y entrent, seront les mêmes que si la partie entière, ou en dehors du $\sum$, n'existait pas.

Ce n'est pas, du reste, dans les seuls cas de liberté complète et de libre pivotement qu'il faudra des termes algébriques à l'expression de u. Il y en aura encore lorsqu'il se joindra, aux impulsions brusques, des impulsions graduelles telles que celles qu'imprime la pesanteur pendant le mouvement de déformation; mais nous verrons que ces termes, pouvant alors contenir l'abscisse z à des degrés supérieurs au premier, seront en z seul, au lieu d'être en z et t.

19. — *Barre prismatique libre heurtée transversalement à ses deux extrémités.* — Soient a sa longueur, P son poids, q et Q les poids qui la heurtent avec des vitesses v et V à ses extrémités $z=0$, $z=a$, dans des directions parallèles entre elles et à un des deux axes principaux d'inertie de toutes les sections; et soient

$$(a_5)\qquad \frac{Pa^3}{g\mathrm{EI}}=\tau^2,\qquad q+P+Q=\mathfrak{q},\ \text{poids du système.}$$

On intégrera [les indices 0 et a représentant toujours (n° 14) des particularisations pour $z=0$, $z=a$]:

$$(a'_5)\left\{\begin{aligned}&\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}=0,\quad \text{pour}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0=0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_a=0,\\ &\tau^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0+\frac{Pa^3}{q}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_0=0,\quad \tau^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_a-\frac{Pa^3}{Q}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_a=0.\end{aligned}\right.$$

$$(a''_5)\left\{\begin{aligned}&\text{et pour}: (u)_{t=0}=0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\varphi(z),\ \varphi\ \text{étant une fonction qui est}\\ &=v\ \text{pour}\ z=0,\ =V\ \text{pour}\ z=a;\ \text{et}=0\ \text{pour toute autre valeur de}\ z.\end{aligned}\right.$$

Prenons pour l'inconnue u, une expression comme la suivante où C, C′, m, A et la fonction Z de z et de m aient les valeurs convenables,

$$(b_5)\qquad u=\left(C+C'\frac{z}{a}\right)t+\sum ZA\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2t}{\tau}.$$

Déterminons d'abord C et C′ de manière que la partie $\left(C+C'\frac{z}{a}\right)t$ satisfasse à l'égalité, avant et après le choc, soit de la somme des quantités de mouvement, soit de la somme de leurs moments ou aires autour de l'origine $z=0$, nous aurons

$$(c_5)\left\{\begin{aligned}&qv+QV=q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=0}+Q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=a}+\int_0^a\frac{\partial u}{\partial t}\frac{P}{a}dz=qC+Q(C+C')+\frac{P}{a}\int_0^a\left(C+C'\frac{z}{a}\right)dz,\\ &QVa=Qa\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=a}+\int_0^a\frac{\partial u}{\partial t}z\frac{P}{a}dz=Q(C+C')a+\frac{P}{a}\int_0^a\left(C+C'\frac{z}{a}\right)z\,dz;\end{aligned}\right.$$

d'où résulte, en tirant C, C′ et substituant :

$$(d_5)\quad \left(C+C'\frac{z}{a}\right)t=\frac{2QV}{P}t\,\frac{-1+2\left(1+3\frac{Q}{P}\right)\frac{qv}{QV}+3\frac{z}{a}\left[1+2\frac{q}{P}-\left(1+2\frac{Q}{P}\right)\frac{qv}{QV}\right]}{1+4\frac{Q+q}{P}+12\frac{Qq}{P^2}}.$$

En second lieu, substituons (b_5) à u dans les cinq premières équations à satisfaire (a'_5). *Le terme algébrique* $\left(C+C'\frac{z}{a}\right)t$, *ou* (d_5), *n'y fournira rien,*

en sorte qu'on aura, *comme si ce terme n'existait pas*, pour déterminer la fonction Z,

$$(e_5)\qquad m^4 Z = a^4 \frac{\partial^4 Z}{\partial z^4};$$

$$(f_5)\quad \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_a = 0;\ m^4 Z_0 - \frac{Pa^3}{q}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_0 = 0,\ m^4 Z_a + \frac{Pa^3}{Q}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = 0.$$

Si en résolvant, comme dans les deux questions précédentes, l'équation (e_5) en Z par la somme de quatre produits des deux sinus et des deux cosinus de $\frac{mz}{a}$ par des constantes, l'on détermine les rapports de trois de celles-ci à la quatrième au moyen des trois premières conditions (f_5), on trouve, avec les notations (d_2) du n° 14,

$$(g_5)\qquad Z = (k-c)(h_z + s_z) - (h-s)(k_z + c_z) + \frac{2mq}{P}(sh_z + hs_z);$$

m ayant pour valeurs toutes les racines de l'équation transcendante qui suit, résultant de la substitution de (g_5) pour Z dans la quatrième et dernière condition (f_5); équation, dont il suffira pour les mêmes raisons qu'au n° 11, de prendre les racines réelles et positives; et qui a été débarrassée du facteur m^3 donnant la racine $m=0$ que nous excluons de la série :

$$(h_5)\qquad 1 - ck + m\frac{Q+q}{P}(sk - ch) + 2\frac{Qq}{P^2}m^2 sh = 0.$$

Reste à déterminer les coefficients A sous le $\sum$ de manière à satisfaire aux deux conditions initiales (a''_5). La première, $(u)_{t=0} = 0$ est déjà remplie par cela seul que la partie algébrique est affectée de t, et que nous n'avons point mis, sous le $\sum$, de terme en $\cos\frac{m^2 t}{\tau}$. La seconde de ces deux conditions (a''_5) le sera si les A sont tels qu'on ait

$$(i_5)\qquad C + C'\frac{z}{a} + \sum AZ = \psi(z).$$

Multiplions cette équation par $Zd\mathfrak{q}$ et intégrons pour la totalité du poids $\mathfrak{q}$ du système. On a d'abord

$$\int_{\mathfrak{q}} Zd\mathfrak{q} = qZ_0 + QZ_a + \frac{P}{a}\int_0^a Zdz,\qquad \int_{\mathfrak{q}} Z\frac{z}{a}d\mathfrak{q} = QaZ_a + \frac{P}{a}\int_0^a Z\frac{z}{a}dz;$$

et, en tenant compte des relations suivantes entre les sinus et cosinus tant

circulaires qu'hyperboliques :

$$
(j_5)\begin{cases}
\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a s_z\,dz = \dfrac{1-c}{m},\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a c_z\,dz = \dfrac{s}{m},\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a h_z\,dz = \dfrac{k-1}{m},\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a k_z\,dz = \dfrac{h}{m}\\[2ex]
\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a s_z\dfrac{z}{a}\,dz = \dfrac{s-mc}{m^2},\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a c_z\dfrac{z}{a}\,dz = \dfrac{ms+c-1}{m^2},\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a h_z\dfrac{z}{a}\,dz = \dfrac{mk-h}{m^2},\\[2ex]
\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a k_z\dfrac{z}{a}\,dz = \dfrac{mh-k+1}{m^2},\quad c^2+s^2=1,\quad k^2-h^2=1,
\end{cases}
$$

on trouve, en effectuant les calculs :

$$
(j'_5)\begin{cases}
\displaystyle\int_{\mathfrak{q}} Z\,d\mathfrak{q} = 2\frac{P}{m}(1-ck) + 2(Q+q)(sk-ch) + \frac{4Qq}{P}\,msh,\\[2ex]
\displaystyle\int_{\mathfrak{q}} Z\frac{z}{a}\,d\mathfrak{q} = \text{la même chose};
\end{cases}
$$

quantités nulles puisqu'elles ne sont que le produit, par $\frac{2P}{m}$, du premier membre de l'équation caractéristique (h_5) à second membre nul, donnant toutes les valeurs du paramètre m qui sont différentes de zéro. On a donc

$$
(k_5)\qquad \int_{\mathfrak{q}}\left(C + C'\frac{z}{a}\right)Z\,d\mathfrak{q} = 0. \quad (*)
$$

(*) Cette propriété des fonctions de l'abscisse z appelées Z, de donner $\int_{\mathfrak{q}} Z\,d\mathfrak{q} = 0$, $\int_{\mathfrak{q}} Zz\,d\mathfrak{q} = 0$ n'est qu'une conséquence obligée des théorèmes généraux de conservation des quantités de mouvement et d'aire, dont les équations d'équilibre dynamique (e_5) et (f_5) ne sont, par le fait, que des applications.

En effet, si l'on appelle u' la série Σ de l'expression (b_5) de u, et que pour plus de généralité nous écrirons

$$
u' = \sum Z\left(A\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau} + B\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right)
$$

cette somme u' de termes tous périodiques est la partie *vibratoire* de u, déterminée par les actions moléculaires et réciproques. Comme ces actions sont égales et directement opposées deux à deux, et ont leurs composantes transversales égales aux produits $\frac{d\mathfrak{q}}{g}\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}$, on doit avoir, en vertu des deux principes cités de mécanique, en différentiant deux fois u' par rapport à t et en faisant la somme $\int$ pour tous les éléments $d\mathfrak{q}$ du système :

$$
\int_{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q}\sum Z\left(-A\frac{m^2}{\tau}\sin\frac{m^2 t}{\tau} - B\frac{m^4}{\tau^2}\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right) = 0,
$$

$$
\int_{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q}\sum Zz\left(-A\frac{m^2}{\tau}\sin\frac{m^2 t}{\tau} - B\frac{m^4}{\tau^2}\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right) = 0.
$$

Or les vibrations simples ou pendulaires, dont la superposition constitue chaque déplacement, sont indépendantes, comme on sait, les unes des autres : chacune d'elles est due, pour chaque élément $\frac{d\mathfrak{q}}{g}$ de masse, à la partie des forces réciproques $\frac{d\mathfrak{q}}{g}\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}$ relative à un des termes de la série, ou à une valeur particulière du paramètre m. Les deux équations qu'on vient d'écrire auront donc lieu encore si on ôte le signe Σ, ou si on les applique à

Il s'ensuit que la partie algébrique $\left(C + C' \frac{z}{a}\right) t$ de u est comme non avenue dans cette opération ayant pour objet la détermination des coefficients A de la série, et qu'on a, comme aux n°s 5 et 9,

$$(l_5) \qquad A = \frac{\int_{\mathfrak{q}} Z \psi(z)\, d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q}} = \frac{qvZ_0 - QVZ_a}{qZ_0^2 + QZ_a^2 + \frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz};$$

---

l'un quelconque des termes des séries qu'il représente. Alors, on peut diviser ces équations par le binôme trigonométrique, et il reste

$$\int_{\mathfrak{q}} Z\, d\mathfrak{q} = 0, \qquad \int_{\mathfrak{q}} Zz\, d\mathfrak{q} = 0,$$

ou ce qu'il fallait démontrer,

Mais il convient de confirmer autrement ce théorème utile et de montrer qu'il s'applique généralement à tout système de barres et de corps vibrant avec elles.

Pour cela reportons-nous à la sous-note du n° 10, page 507, où l'on a considéré avec M. Boussinesq, suivant ses trois dimensions, un système vibrant quelconque $\mathfrak{q} = \rho g \omega$, composé, ainsi qu'il l'exprime, de parties élastiques *disséminées*, comme nos barres P, et de parties *concentrées*, comme nos corps heurtants Q. Appelons toujours x, y, z les coordonnées primitives ou de repos, d'un élément ou une molécule $d\mathfrak{q}$, mais x_1, y_1, z_1 celles du point de l'espace qu'aurait occupé $d\mathfrak{q}$ au bout d'un petit temps t si le système avait été rendu rigide au moment du choc qui s'y est opéré; enfin $x_1 + u$, $y_1 + v$, $z_1 + w$ les coordonnées réelles ou effectives, à ce même temps t, du même élément $d\mathfrak{q}$ du système élastique qui a été ébranlé ou modifié par ce choc.

En vertu des théorèmes des quantités de mouvement et des aires, appliqués à ce système soit entièrement libre, soit librement pivotant autour d'un point ou d'un axe fixe, ou en vertu, ce qui revient au même, de la destruction deux à deux des actions mutuelles de ses points, les six sommes

$$\int_{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t}, y_1 \frac{\partial z_1}{\partial t} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial t}, z_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} - x_1 \frac{\partial z_1}{\partial t}, x_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - y_1 \frac{\partial x_1}{\partial t}\right)$$

seront et resteront égales à six constantes, représentant les trois composantes totales des quantités initiales de mouvement, et leurs trois moments de rotation autour des axes fixes des x, y, z. Et l'on aura aussi l'égalité, respectivement aux six mêmes constantes, des trois sommes

$$\int_{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q} \left[\frac{\partial (x_1 + u)}{\partial t}, \frac{\partial (y_1 + v)}{\partial t}, \frac{\partial (z_1 + w)}{\partial t}\right],$$

et de trois autres dont la première est

$$\int_{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q} \left[\left(y_1 + v\right) \frac{\partial (z_1 + w)}{\partial t} - \left(z_1 + w\right) \frac{\partial (y_1 + v)}{\partial t}\right].$$

Retranchant, des six nouvelles égalités qui en résultent, les six premières posées, où ne figurent que les x_1, y_1, z_1, sans les u, v, w, les six constantes disparaissent, et on a

1° les trois équations

$$(\alpha) \qquad \int_{\mathfrak{q}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) d\mathfrak{q} = 0$$

2° trois autres équations dont la première est

$$(\beta) \qquad \int_{\mathfrak{q}} \left[\left(y_1 \frac{\partial w}{\partial t} - z_1 \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(v \frac{\partial z_1}{\partial t} - w \frac{\partial y_1}{\partial t}\right) + \left(v \frac{\partial w}{\partial t} - w \frac{\partial v}{\partial t}\right)\right] d\mathfrak{q} = 0.$$

Comme u, v, w représentent évidemment les déplacements de pure déformation locale et vibratoire des petites parties dans lesquelles le système peut être conçu divisé, l'on peut, de

valeur qui substituée, ainsi que celle (g_5) de Z et celle (d_5) de $\left(C + C'\frac{z}{a}\right)t$ dans l'expression (b_5) de u, donnera la solution complète du problème des *petits* déplacements u, à parties tant périodiques que non périodiques, des divers points de la barre heurtée par les deux corps q et Q.

---

ces équations (β), retrancher, comme petits du second ordre, les binômes tels que $\left(v\frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial v}{\partial t}\right)$ contenant des produits des u, v, w, par leurs dérivées. Or, on pourra effacer de la même manière les binômes tels que $v\frac{\partial z_1}{\partial t} - w\frac{\partial y_1}{\partial t}$. En effet (comme l'a fait remarquer le même auteur), dans les problèmes de résistance vive dont la solution dépend de la recherche des déplacements élastiques, les vitesses d'ensemble ou de translation et de rotation, $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_1}{\partial t}$ ne sont transmises, à partir des points qui se sont heurtés, que de proche en proche par l'effet des mêmes forces élastiques mises en jeu, que les vitesses relatives ou vibratoires $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$: elles ne sont donc pas d'un ordre de grandeur supérieur à celles-ci, engendrées par les mêmes causes ou actions mutuelles, au moins tant que les forces élastiques restent exprimables linéairement, ou que les *limites de l'élasticité* (comme on dit) ne sont point dépassées. Les produits tels que $v\frac{\partial z_1}{\partial t}$, ou leurs différences deux à deux, sont donc négligeables au même titre que les produits tels que $v\frac{\partial w}{\partial t}$, ou leurs différences. Donc comme x_1, y_1, z_1 sont toujours supposés ne différer que très peu de x, y, z, on peut écrire, au lieu des (β),

$$(\gamma)\quad \int_q \left(y\frac{\partial w}{\partial t} - z\frac{\partial v}{\partial t}\right) dq = 0, \quad \int_q \left(z\frac{\partial u}{\partial t} - x\frac{\partial w}{\partial t}\right) dq = 0, \quad \int_q \left(x\frac{\partial v}{\partial t} - y\frac{\partial u}{\partial t}\right) dq = 0.$$

Ceci posé, il a été montré, à la sous-note citée du n° 10, p. 507, que, des équations générales d'équilibre dynamique d'un système quelconque, telles que $\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, l'on pouvait déduire des valeurs des déplacements relatifs ou vibratoires u, v, w, comptés à partir des situations de repos, en y faisant

$$(\delta)\qquad u, v, w = \sum\left(\frac{A}{k}\sin kt + B\cos kt\right)\left(X, Y, Z\right),$$

où X, Y, Z, sont des fonctions des coordonnées x, y, z et du paramètre k (le m² ou $\frac{m^2}{\tau}$ des problèmes des barres) dont les valeurs, en nombre infini, répondant, chacune, à un des systèmes d'intégrales simples, ou à un des termes de la série Σ, sont les racines de l'équation qui résulte de l'élimination des constantes d'intégration entre les équations de condition à remplir aux limites ou aux jonctions des diverses parties.

Or il est facile de se convaincre qu'on aura les mêmes équations $\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \ldots = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots$ et, par suite les mêmes expressions (δ) lorsque, comme dans le cas actuel, les u, v, w sont comptés à partir des points (x_1, y_1, z_1) où se sont transportées les situations moyennes des points (x, y, z) du système libre ; car on a, pour les différences $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ représentant des déplacements d'*ensemble*, c'est-à-dire des translations et des rotations, trois expressions telles que celles (56) $a + \gamma y - \beta z$, $b + \alpha z - \gamma x$, $c + \beta x - \alpha y$, du § 21, page 134. Or les six petites fonctions du temps a, b, c, α, β, γ ne donnent évidemment rien dans les expressions des six déformations élémentaires $\partial_x, \ldots g_{xy}$ dont dépendent les tensions $t_{xx}, \ldots t_{xy}$; et elles ne donneront rien non plus dans les $\frac{\partial^2 (u, v, w)}{\partial t^2}$, car il est facile de

20. — *Suite. Valeur du dénominateur* $\int_q Z^2 d\,q$ *des coefficients* A, *fonctions du paramètre m.* — Il faut, pour obtenir cette valeur, calculer $\int_0^a Z^2 dz$. On le fera sans intégration, comme nous avons déjà eu occasion de le dire, en prenant l'équation (l_1) du n° 8, page 504, qui, pour EI constant $=\frac{Pa^3}{g\tau^2}$, p aussi constant $=\frac{P}{a}$, $m^2=\frac{m^2}{\tau}$, et en supprimant du second membre les 2e et 5e termes entre accolades vu (f_5) $\frac{d^2Z}{dz^2}$ nul aux deux limites 0 et a, devient :

$$\int_0^a ZZ'dz=\frac{a^4}{m^4-m'^4}\left(Z'\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}-Z\frac{\partial^3 Z'}{\partial z^3}\right)_{z=0}^{z=a},$$

dont la vraie valeur, pour $m=m'$, obtenue en différentiant le numérateur et le dénominateur par rapport à m' et faisant ensuite $m'=m$, est

$$\int_0^a Z^2dz=\frac{a^4}{-4m^3}\left[\frac{\partial Z_a}{\partial m}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a-Z_a\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a-\frac{\partial Z_0}{\partial m}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_0+Z_0\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_0\right].$$

En développant le calcul et en se servant du résultat pour composer la

---

voir que les équations dont on tire les valeurs de ces six fonctions du temps seront satisfaites par l'égalité à zéro de leurs six dérivées $\frac{\partial^2(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)}{\partial t^2}$, comme il arrive pour la partie algébrique (d_5) de notre solution du n° 19.

On peut donc (ce qui est du reste en harmonie avec un théorème démontré par Clebsch au § 14, page 53) prendre, dans le cas actuel, pour u, v, w, les mêmes expressions (δ) que lorsqu'ils sont comptés à partir de l'état de repos.

Or, comme les équations (α), (β) s'appliquent à tout mouvement possible, elles doivent être vérifiées par chaque système d'intégrales simples dont l'ensemble forme la série Σ. Substituons donc ces expressions (δ), sans le signe Σ, dans celles (α) et (γ). Il en résulte, en divisant tout par le binôme $(A\cos kt - Bk\sin kt)$, les six suivantes :

$$(\varepsilon)\qquad \int_q\Big(X,\ Y,\ Z,\ yZ-zY,\ zX-xZ,\ xY-yX\Big)d\,q=0.$$

Elles offrent, dans toute leur généralité, *ce qui était à démontrer*, ou ce dont les égalités (j_5') $\int_q Z d\,q=0$, $\int_q Zz d\,q=0$, offrent des particularisations pour la barre libre dont le mouvement est le sujet de notre n° 19.

On peut donc, dans les problèmes de mouvement des barres ou tiges élastiques libres ou pivotantes autour de points ou d'axes fixes, établir *séparément* la partie algébrique ou de solidification, et la partie transcendante ou vibratoire, de leur mouvement. Et même on peut généralement, ce qui est encore mieux, ne s'occuper que de celle-ci, qui seule intéresse le problème de la résistance de la matière, sans craindre que la non-prise en considération de celle-là *soit une cause d'erreur.*

valeur de $\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz + q\,Z_0^2 + QZ_a^2$, on trouve

$$(m_5)\quad \int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = P\left[\frac{5}{m}(sk - ch)(1 - ck) + (h - s)^2\right] + q\,[12sh(1-ck) + 4(h-s)^2 +$$

$$+ 2m(k - c)(h - s)] + \frac{q^2}{P}[6msh(sk - ch) + 2m^2(h^2 - s^2)] + 4Q\left(sk - ch + \frac{2mq}{P}sh\right)^2.$$

Tel est le dénominateur de la valeur (l_5) du coefficient A. Son numérateur est

$$(n_5)\quad \int_{\mathfrak{q}} Z\psi(z)\,d\mathfrak{q} = qvZ_0 + QVZ_a = -2(h - s)\,qv + 2\left(sk - ch + \frac{2mq}{P}sh\right)QV.$$

Substituant dans (l_5), puis, avec (g_5) Z, dans le $\sum$ faisant la seconde partie de (b_5) dont la première partie est donnée par (d_5), $(C + C't)$, on a la composition complète de la valeur, à un instant t quelconque, du déplacement de tout point de la barre libre (ou suspendue par un bout à un long fil) et heurtée aux deux bouts. La seconde partie seule, la partie vibratoire, intéresse la résistance de la matière de la barre à de pareils chocs.

21. — *Cas particuliers du problème de la barre libre du n° 19. Observations sur les conséquences théoriques de sa solution ci-dessus.* — Nous ne développerons cette solution que pour deux cas particuliers dont l'un (le second) celui de la barre pivotante, a un intérêt pratique réel, mais qui tous deux fournissent des conséquences théoriques à remarquer, pouvant se présenter dans divers autres cas et les éclairer.

1er cas. — *Barre libre heurtée à un seul bout.* — La solution en sera obtenue simplement en faisant dans les formules (g_5), (h_5), (d_5), (m_5), (b_5), $q = 0$, d'où :

$$(o_5)\quad Z = (k - c)(h_z + s_z) - (h - s)(k_z + c_z).$$

$$(p_5)\quad \text{Équation en } m:\quad m(\sin m \operatorname{coh} m - \cos m \operatorname{sih} m) + \frac{P}{Q}(1 - \cos m \operatorname{coh} m) = 0;$$

$$(q_5)\quad \begin{cases} u = 2\,\dfrac{5\frac{z}{a} - 1}{4 + \frac{P}{Q}}\,Vt + 2V\tau \sum \dfrac{1}{m^2}\,\dfrac{\left(sk - ch\right)Z\sin\frac{m^2 t}{\tau}}{\frac{1}{Q}\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q}} \\[2ex] \text{avec } \dfrac{1}{Q}\displaystyle\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = 4(sk - ch)^2 + \dfrac{P}{Q}\left[(h - s)^2 + \dfrac{5}{m}(sk - ch)(1 - ck)\right]. \end{cases}$$

Cette valeur du dénominateur $\frac{1}{Q}\int_{\mathfrak{q}} Z^2\,d\,\mathfrak{q}$ peut être très simplifiée si pour $\frac{P}{Qm}(1 - ck)$ on met sa valeur $-(sk - ch)$ tirée de l'équation (p_5) en

m ; ce qui donne

$$(r_5) \qquad u = 2\,\frac{3\frac{z}{a}-1}{4+\frac{P}{Q}}\,Vt + 2V\tau \sum \frac{(sk-ch)\,Z \sin\frac{m^2t}{\tau}}{(sk-ch)^2+\frac{P}{Q}(h-s)^2}.$$

2e cas. — *Barre heurtée à un bout et pivotant autour de l'autre* où on la suppose traversée par une goupille fixe. — On obtient la solution y relative en faisant dans les (d_5), (g_5), (h_5), (m_5), (n_5),

$$r = 0\,; \quad \text{puis,} \quad q = \infty\,; \text{ d'où :}$$

(s_5) Équation en m, obtenue en divisant celle (h_5) par $\frac{qmsh}{P}$ et faisant $\frac{1}{q} = 0$,

$$sk - ch + 2m\frac{Q}{P}sh = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\cos m}{\sin m} - \frac{\operatorname{ch} m}{\operatorname{sh} m} = -2m\frac{Q}{P}\,;$$

et on a la valeur de u en divisant haut et bas par q la partie algébrique (d_5) de(b_5), et par q^2 le produit de (g_5) Z par (l_5) $A = \dfrac{qrZ_0 + QVZ_a}{\int_q Z^2 dq}$; $\int_q Z^2 dq$ étant fourni par (m_5); puis faisant $r = 0$, $\frac{1}{q} = 0$, $\frac{1}{q^2} = 0$. On a ainsi

$$(t_5) \qquad u = \frac{\frac{z}{a}}{1+\frac{P}{3Q}}\,Vt + 2V\tau \sum \frac{1}{m^2}\,\frac{\left(\frac{s_z}{s}+\frac{h_z}{h}\right)\sin\frac{m^2t}{\tau}}{4+\frac{P}{2Q}\left[\frac{h^2-s^2}{h^2s^2} - \frac{3}{m}\left(\frac{c}{s}-\frac{k}{h}\right)\right]}.$$

Le second terme du dénominateur se simplifie en y mettant pour le binôme entre parenthèse sa valeur $-\frac{2mQ}{P}$ tirée de l'équation (s_5) en m, d'où

$$(u_5) \qquad u = \frac{\frac{z}{a}}{1+\frac{P}{3Q}}\,Vt + 2V\tau \sum \frac{1}{m^2}\,\frac{\frac{\sin\frac{mz}{a}}{\sin m}+\frac{\operatorname{sh}\frac{mz}{a}}{\operatorname{sh} m}}{1+\frac{P}{2Q}\left(\frac{1}{\sin^2 m}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 m}\right)}\sin\frac{m^2t}{\tau}.$$

22. — *Particularités curieuses. Calcul de ce qui est obtenu si l'on suppose la partie transcendante* $\sum$ *applicable à la racine* $m=0$ *dont on a dégagé les équations en* m, (h_5), (p_5), (s_5). — On a ce *premier terme* du $\sum$ en supposant d'abord que m est seulement très petit et mettant pour ses sinus et cosinus

leurs développements

$$\left.\begin{array}{r} s \\ \text{et } h \end{array}\right\} = m \mp \frac{m^3}{6} + \frac{m^5}{120} \mp \frac{m^7}{5040} + \ldots\ldots, \qquad \left.\begin{array}{r} c \\ \text{et } k \end{array}\right\} = 1 \mp \frac{m^2}{2} + \frac{m^4}{24} \mp \frac{m^6}{720} + \frac{m^8}{40320} \mp \ldots$$

$$(r_5)\left\{\begin{array}{l} \text{d'où} \quad h - s = \frac{m^3}{3}\left(1 + \frac{m^4}{840} + \ldots\right), \qquad h + s = 2m\left(1 + \frac{m^4}{120} + \ldots\right), \\ h^2 - s^2 = \frac{2m^4}{3}\left(1 + \frac{m^4}{105} + \ldots\right), \quad sk - ch = \frac{2m^3}{3}\left(1 - \frac{m^4}{210} + \ldots\right), \\ 1 - ck = \frac{m^4}{6}\left(1 - \frac{m^4}{420} + \ldots\right), \qquad sh = m^2\left(1 - \frac{m^4}{90} + \ldots\right), \\ \frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau} = t. \end{array}\right.$$

Substituant dans les secondes parties $2V\tau\sum$, (q_5) et (t_5), du déplacement u, et divisant haut et bas par m^6, puis faisant $m^4 = 0$, on trouve pour ces barres heurtées à un bout :

1° Barre libre : le $2V\tau\sum = 2\,\dfrac{3\frac{x}{a} - 1}{4 + \frac{P}{Q}}\,Vt.$

2° Barre pivotante : le $2V\tau\sum = \dfrac{\frac{x}{a}}{1 + \frac{P}{3Q}}\,Vt;$

c'est-à-dire que les parties transcendantes, prises sous leurs premières formes dans lesquelles m représente un nombre encore quelconque, donnent, si on le fait nul (ce qui revient à calculer le terme de la série $\sum$ où m a pour valeur particulière la racine $m = 0$ des équations devant fournir toutes les valeurs de m) *donnent*, dis-je, *précisément, pour les déplacements*, *les parties algébriques qui existeraient seules pour les premiers instants si la barre était rigide.*

Ainsi la partie algébrique est comme ce qui vient, aux premiers instants *d'une vibration dont la période serait infinie.*

Mais si l'on fait ainsi $m = 0$ dans les expressions de u sous leurs formes simplifiées (r_5) et (u_5), on n'a pas, à beaucoup près, la même chose. On trouve en effet pour les dénominateurs $\frac{1}{Q}\int Z^2 dQ$ (toujours après avoir ôté le facteur m^6 existant haut et bas), des nombres *quatre fois plus petits*, et par conséquent, pour les valeurs du terme en $m = 0$ du $2V\tau\sum$, des *expressions quadruples* des parties algébriques à quoi se réduiraient les déplacements *si la barre était rigide ou n'entrait aucunement en vibration.*

Cela est curieux, mais ne doit ni étonner, ni faire soupçonner aucune erreur. En effet, les transformations des expressions (q_5) et (t_5) de u en celles

(r_5) et (u_5) sont fondées sur des équations (p_5) et (s_2) en m excluant la racine $m = 0$, ou applicables *seulement aux valeurs non nulles* de ce paramètre. Faire $m = 0$ dans des expressions applicables *seulement à des racines non nulles* n'était donc aucunement permis (*).

Mais cette concordance de la partie algébrique avec ce que devient la partie transcendante pour $m = 0$ *n'est point générale*.

En effet, si nous mettons pour les sinus et cosinus de m leurs développements dans la partie transcendante de l'expression (b_5) du cas général de deux corps heurtants en divisant haut et bas par m^6, et faisant ensuite $m^4 = 0$, l'expression (m_5) nous donne d'abord, pour $\frac{1}{m^6}\int Z^2\,dp$, le dénominateur de (d_5) multiplié par $\frac{4}{9}(P + 3q)$; puis, en substituant, on a

$$(x_5)\qquad \sum AZ\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau} = \frac{2QV}{P}\,\frac{\left[-1+\frac{3z}{a}\left(1+\frac{2q}{P}\right)\right]\left(1-\frac{P}{2P+6Q}\cdot\frac{qv}{QV}\right)}{1+4\frac{Q+q}{P}+12\frac{Qq}{P^2}}.$$

Or, cette expression ne se confond avec celle (d_5) du petit déplacement de la barre rigide *que lorsque* $v = 0$, c'est-à-dire lorsque sa première extrémité, pouvant au reste être unie à un corps q, est, *ou non heurtée*, ou *fixe*.

Il convient donc, comme nous avons dit au n° 16, de ne point compter sur la racine $m = 0$ qui s'offre dans les solutions. Il convient même de l'abstraire, en déterminant séparément, par la mécanique des systèmes invariables, la partie algébrique; et cette partie pourrait être abstraite elle-même comme n'intéressant nullement le problème de la résistance vive de la matière de la barre aux chocs qu'elle peut éprouver.

25. — *Cas de barre pivotante heurtée, traité directement.* — Cette barre, de longueur a, de poids P, étant fixe au point $z = 0$, et heurtée au point $z = a$ par un poids Q avec une vitesse V, on a

$$\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad \text{à résoudre pour}$$

$$u_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_a = 0,\ \left(\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Pa^3}{Q}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_a = 0,\ (u)_{t=0} = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \begin{cases}\text{V pour } z = 0\\ \text{0 pour } z \text{ tout}\\ \text{autre.}\end{cases}$$

(*) On trouve une autre particularité singulière en substituant aux sinus et aux cosinus de m leurs développements dans l'équation en m, comme nous aurons occasion de le faire ci-après pour des solutions *approximatives* de problèmes de barres non libres. L'équation générale (h_5) en m devient en effet, après la substitution des (r_5), en ôtant le facteur commun m^4 :

$$\left(1 + 4\frac{Q+q}{P} + 12\frac{Qq}{P^2}\right) - m^4\left(\frac{1}{420} + 2\frac{Q+q}{105\,P} + \frac{2\,Qq}{15P^2}\right) + \ldots\ldots = 0,$$

équation qui a pour premier terme le dénominateur de la partie algébrique (d_5) du déplacement u, en sorte qu'en en tirant m^4, l'on a une expression dont le numérateur est précisément ce dénominateur d'une formule fournie par le théorème de la mécanique élémentaire pour le mouvement des corps rigides.

La solution, en ne s'occupant que de la partie périodique qui, comme nous avons vu au n° 19, peut être traitée en abstrayant l'autre, sera

$$(y_5)\qquad u = \sum \frac{\tau}{m^2} AZ \sin \frac{m^2 t}{\tau}, \quad \text{si}$$

$$(z_5)\quad (Z)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_a = 0,\ m^4 Z_a + \frac{Pa^3}{Q}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = 0,\ \sum AZ = \begin{cases} \text{V pour } z = a, \\ \text{0 pour toute autre valeur de } z. \end{cases}$$

à quoi on satisfait en prenant :

$$(z_5')\quad Z = \frac{\sin \frac{mz}{a}}{\sin m} + \frac{\text{sih}\,\frac{mz}{a}}{\text{sih}\, m}, \text{ d'où } Z_a = 2,\ \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = \frac{m^3}{a^3}\left(\frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m} - \frac{\cos m}{\sin m}\right),$$

si m est fourni par les racines réelles et positives de l'équation suivante qui résulte de la substitution des (z_5') dans la quatrième condition définie (z_5),

$$(z_5'')\qquad \frac{\cos m}{\sin m} - \frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m} = \frac{2Qm}{P},$$

et si, pour satisfaire à la cinquième condition (z_5) on prend, vu que $Z_a = 2$,

$$A = \frac{QVZ_a}{\int_q Z^2 dq} = \frac{2QV}{\frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz + 4Q};$$

où le $\int_0^a Z^2 dz$, afin d'éviter une intégration pénible, sera calculé par

$$\left(\int_0^a ZZ' dz\right)_{m'=m} = \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial m'} a^4 \left[Z'_a \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a - Z_a \left(\frac{\partial^3 Z'}{\partial z^3}\right)_a \right]}{\frac{\partial}{\partial m'}(m^4 - m'^4)} \right\}_{m'=m}$$

ou, comme $Z_a = 2$ donne $dZ_a = 0$, et vu la valeur (z_5') de $\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a$ ainsi que la relation $\text{sih}^2 m - \text{coh}^2 m = -1$,

$$\frac{P}{a}\int_0^a Z^2 dz = \frac{Pa^3}{-4m^3}\left\{ -2\frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{m^3}{a^3}\left(-\frac{\cos m}{\sin m} + \frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m}\right)\right]\right\}$$
$$= -\frac{P}{4}\left[-\frac{6}{m}\left(\frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m} - \frac{\cos m}{\sin m}\right) - 2\left(\frac{1}{\sin^2 m} - \frac{1}{\text{sih}^2 m}\right)\right];$$

et, en définitive

$$u = \sum \frac{\tau}{m^2} Z \frac{2QV \sin \frac{m^2 t}{\tau}}{4Q + \frac{P}{2}\left[\frac{1}{\sin^2 m} - \frac{1}{\text{sih}^2 m} - \frac{3}{m}\left(\frac{\cos m}{\sin m} - \frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m}\right)\right]};$$

expression pareille à la partie $2V\tau\sum$ de (t_5) obtenue par la particularisation pour $r = 0$, $q = \infty$ des expressions compliquées des nos 19 et 20, et où l'on

peut, puisqu'il n'est plus question de racines $m = 0$, remplacer $\frac{\cos m}{\sin m} - \frac{\text{coh}\, m}{\text{sih}\, m}$ par (z''_5) $\frac{2Qm}{P}$, ce qui produira la même simplification qui s'est offerte aux n°s 6, 14, 15 et 21 ; d'où, en abstrayant la partie algébrique précédant le $\sum$ et donnée au n° 22,

$$(z'''_5) \qquad u = V\tau \sum \frac{2}{m^2} \frac{\dfrac{\sin \frac{mz}{a}}{\sin m} + \dfrac{\text{sih} \frac{mz}{a}}{\text{sih}\, m}}{1 + \dfrac{P}{2Q}\left(\dfrac{1}{\sin^2 m} - \dfrac{1}{\text{sih}^2 m}\right)} \sin \frac{m^2 t}{\tau};$$

déplacement vibratoire qui est zéro aussi bien au bout mobile $z = a$ qu'au bout fixe $z = 0$.

24. — *Impulsions graduelles ou tranquilles.* — J'appelle ainsi (fin du n° 1) celles qui ne sont point *brusques* ou qui s'opèrent sans *des chocs* et qui pourtant ne laissent pas de mettre en jeu de proche en proche, dans un temps fini, l'élasticité, ainsi que l'inertie des diverses parties des pièces et d'y provoquer des vibrations ou d'y contribuer.

C'est ce que produit, par exemple, pendant que s'accomplit la flexion d'une barre horizontale appuyée aux deux bouts, *le poids* du corps qui l'a heurtée verticalement au milieu et qui continue d'agir verticalement sur elle après le choc ; c'est à quoi contribue même le poids propre des parties de la pièce pendant qu'elles descendent. Un effet de ce genre est encore amené si une force de direction quelconque agit continûment sur un point d'une pièce élastique avec une intensité ou constante ou variable en fonction donnée du temps, comme celle qui est exercée sur un balancier de machine par la tige d'un piston. Un effet analogue s'opère si une extrémité ou toute autre partie d'une barre est astreinte (par exemple à cause de sa liaison avec une manivelle) à un mouvement obligatoire, aussi fonction du temps et qui est transmis aux autres parties par l'inertie et les ressorts moléculaires.

Dans les solutions ci-dessus de problèmes d'impulsions brusques, nous avons négligé les poids des pièces ou barres, et ceux des corps heurtants. Cela est permis (avons-nous dit à la fin du n° 2), tantôt comme approximation, tantôt parce que la barre n'est heurtée qu'horizontalement, en sorte que la pesanteur ne contribue en rien à la flexion qui lui est imprimée.

Mais si une barre horizontale est heurtée et fléchie *verticalement*, il faut, pour l'exactitude, tenir compte de l'effet contributif des poids, ou revenir à l'équation différentielle complète (d) du n° 2, en mettant dans la parenthèse du dernier terme la gravité g au lieu de la force transversale supposée quelconque $\mathfrak{g}$, ce qui donne au lieu de (d), en multipliant par g :

$$(d_4) \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{p}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\right) = 0.$$

25. — *Mouvements d'une barre horizontale appuyée aux deux bouts et heurtée verticalement au milieu par un corps rigide, calculés en tenant compte de l'action graduelle de son poids propre ainsi que de celui* Q *de ce corps et aussi de celui* Q' *d'un autre corps que (pour plus de généralité) l'on suppose être uni à la barre et recevoir le coup.* — Nous appelons, comme au n° 4, P le poids de la barre prismatique et homogène de longueur $2a$, V la vitesse du choc, et nous faisons encore, pour abréger :

$$(b_4) \qquad \frac{Pa^3}{2gEI} = \tau^2, \quad P + Q + Q' = \mathcal{Q};$$

en sorte que $\mathcal{Q}$ est le poids total du système dont $d\mathcal{Q}$ sera un élément quelconque.

L'équation à intégrer est ainsi

$$(c_4) \qquad \tau^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g\right) + a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0,$$

avec les conditions-limites, semblables à celles (m) du n° 4,

$$(d_4) \qquad (u)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=a} = 0;$$

et avec la suivante au lieu de celle (n), p. 496, vu la mise en compte des poids Q et Q', et des inerties des deux corps unis à une tranche élémentaire de la barre, pour faire équilibre aux efforts tranchants s'exerçant de part et d'autre sur les bases de cet élément mince, à chaque instant du mouvement simultané de la barre et de ces corps :

$$(e_4) \quad Q + Q' - \frac{Q + Q'}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_a = -2EI\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_a \text{ ou } \tau^2\left(\frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} - g\right) = \frac{Pa^3}{Q + Q'}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_a.$$

On fera disparaître les termes $-g$ des parenthèses de cette équation (e_4) et de celle (a_4) en posant

$$(e'_4) \qquad u = u_1 + U,$$

u_1 étant une inconnue auxiliaire, qui représente ce que seraient les déplacements u des points de la barre si les poids n'y agissaient qu'au repos. On obtient ce déplacement purement statique u_1 en ôtant, des équations ci-dessus (c_4), (e_4) le terme dynamique $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, c'est-à-dire en résolvant l'équation simplement différentielle

$$-g\tau^2 + a^4\frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} = 0, \quad \text{avec la condition } -g\tau^2 = \frac{Pa^3}{Q + Q'}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3}\right)_{z=a}.$$

Une première intégration faite en déterminant la constante de manière que pour $z = a$ la dérivée du troisième ordre ait la valeur $\frac{-g\tau^2(Q + Q')}{Pa^3}$, donne

$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} = \frac{g\tau^2}{a^4}(z - a) - g\tau^2\frac{Q + Q'}{Pa^3};$$

d'où, en intégrant de nouveau, eu égard aux conditions-limites (d_4), *les mêmes pour* u_1, *que pour* u,

$$(f_4)\qquad u_1 = \frac{g\tau^2}{24}\left(8\frac{z}{a} - 4\frac{z^3}{a^3} + \frac{z^4}{a^4}\right) + \frac{g\tau^2}{3P}\cdot(Q+Q')\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right);$$

ou, en mettant pour $g\tau^2$ sa valeur $\frac{Pa^3}{2EI}$,

$$(f_4)\qquad u_1 = \frac{Pa^3}{48EI}\left(8\frac{z}{a} - 4\frac{z^3}{a^3} + \frac{z^4}{a^4}\right) + \frac{Q+Q'}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right);$$

ce qui offre l'équation connue de la forme que prend sous son poids propre P et sous une charge $Q+Q'$ au milieu, une pièce appuyée de longueur $2a$. On l'aurait obtenue directement comme à l'ordinaire en posant, autour de l'axe horizontal du moment $-EI\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ des forces élastiques s'exerçant à travers la section σ, l'équilibre de rotation entre ces forces et 1° la réaction $-\frac{P+Q+Q'}{2}$ de l'appui $z=0$, agissant avec un bras de levier z; 2° le poids $\frac{P}{2a}z$ de la portion de la barre entre cet appui et σ, pour un bras de levier moyen égal à la moitié $\frac{z}{2}$ de sa longueur.

L'expression u_1+U de u, substituée avec cette valeur (f_4) de u_1 dans les équations (c_4), (d_4), (e_4) du problème actuel, les réduit, comme on se le proposait, à la forme de celles du problème résolu au n° 4, savoir à

$$(g_4)\quad \tau^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0,\ (U)_0 = 0,\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_a = 0,\ \tau^2\frac{\partial^2 U_a}{\partial t^2} = \frac{Pa^3}{Q+Q'}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\right)_a;$$

équations dont les quatre premières sont résolues par

$$(h_4)\quad U = \sum Z\left(\frac{\tau}{m^2}A\sin\frac{m^2 t}{\tau} + B\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right),\qquad \text{où } Z = \frac{\sin\frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih}\frac{mz}{a}}{\operatorname{coh} m};$$

le $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de m, racines de l'équation qu'on a en portant cette expression de U dans la dernière condition (g_4), équation qui est :

$$(i_4)\qquad m^4 Z_a + \frac{Pa^3}{Q+Q'}\left(\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3}\right)_a = 0.$$

Si l'on y met pour Z son expression (h_4) qui déjà satisfait, par sa forme, aux autres conditions, on a, pour déterminer toutes les valeurs de ce paramètre m.

$$(j_4)\qquad m\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m}\right) = \frac{2P}{Q+Q'}.$$

Et les coefficients du sinus et du cosinus doivent être déterminés par les expressions générales (u_1) du n° 10, page 507 :

$$(k_4) \qquad B = \frac{\int_q Z\Phi(z)\,dq}{\int_q Z^2 dq}, \qquad A = \frac{\int_q Z\Psi(z)\,dq}{\int_q Z^2 dq}.$$

$\Phi(z)$, valeur initiale de U, devra être la valeur initiale de u diminuée de la valeur (f_4) de u_1. Or la valeur initiale de u, ou ce qu'on a appelé $\varphi(z)$ dans tout ce qui précède, est ici le déplacement éprouvé par le point de la demi-barre dont l'abscisse est z, à l'instant $t = 0$ qui a précédé l'arrivée du corps heurtant Q; c'est donc la partie de la flexion statique u_1 exprimée par (f_4'), qui est due seulement au poids P de la barre et au poids additionnel q' qui déjà lui était uni. En retranchant de u_1 cette valeur initiale $\varphi(z)$ de u, il ne reste évidemment que la partie de (f_4') affectée seulement du poids heurtant Q, prise en signe contraire. Donc, il faut faire, dans les (k_4), (Voyez pour $\Psi(z)$ au n° 6, l'explication qui a été donnée à une sous-note)

$$(l_4) \quad \begin{cases} \Phi(z) = (U)_{t=0} = -\dfrac{Qa^3}{6EI}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{z}{a} - \dfrac{1}{2}\dfrac{z^3}{a^3}\right) = -\dfrac{g\tau^2}{3}\dfrac{Q}{P}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{z}{a} - \dfrac{1}{2}\dfrac{z^3}{a^3}\right); \\ \Psi(z) = \psi(z) = V \text{ pour le poids Q dont l'abcisse est } z = a, \\ \qquad \text{et } = 0 \text{ pour tout le reste.} \end{cases}$$

On aura pour le numérateur de B

$$(m_4) \qquad \int_q Z\Phi(z)\,dq = (Q + q')\,\Phi(a)\,Z_a + 2\frac{P}{2a}\int_0^a Z\Phi(z)\,dz.$$

Pour en calculer le second terme, des intégrations par parties donnent $\left(\text{eu égard à ce qu'en général } \dfrac{\partial \,.\, \text{sih}\, x}{\partial x} = \text{coh}\, x;\ \dfrac{\partial \,.\, \text{coh}\, x}{\partial x} = \text{sih}\, x\right)$,

$$\int_0^a z \sin\frac{mz}{a}\,dz = \left(-\frac{az}{m}\cos\frac{mz}{a} + \frac{a^2}{m^2}\sin\frac{mz}{a}\right)_0^a;$$

$$\int_0^a z\, \text{sih}\frac{mz}{a}\,dz = \left(\frac{az}{m}\,\text{coh}\frac{mz}{a} - \frac{a^2}{m^2}\,\text{sih}\frac{mz}{a}\right)_0^a;$$

$$\int_0^a z^3 \sin\frac{mz}{a}\,dz = \left[\left(-\frac{az^3}{m} + \frac{6a^3z}{m^3}\right)\cos\frac{mz}{a} + \left(\frac{3a^2z^2}{m^2} - \frac{6a^4}{m^4}\right)\sin\frac{mz}{a}\right]_0^a;$$

$$\int_0^a z^3\, \text{sih}\frac{mz}{a}\,dz = \left[\left(\frac{az^3}{m} + \frac{6a^3z}{m^3}\right)\text{coh}\frac{mz}{a} - \left(\frac{3a^2z^2}{m^2} + \frac{6a^4}{m^4}\right)\text{sih}\frac{mz}{a}\right]_0^a.$$

Comme ces expressions s'annulent à la limite inférieure $z = 0$, on trouve, d'après la valeur (h_4) de Z,

$$(m_4') \qquad \int_0^a Z\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) = -\frac{2a}{m} + \frac{3a}{m^4}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right),$$

On a ainsi

$$(Q+Q')\Phi(a)Z_a = -(Q+Q')\frac{g\tau^2}{5}\frac{Q}{P}Z_a;$$

$$\frac{P}{a}\int_0^a Z\Phi(z)\,dz = -\frac{P}{a}\frac{g\tau^2}{5}\frac{Q}{P}\left[-\frac{2a}{m}+\frac{5a}{m^4}\left(\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right)\right].$$

Comme l'équation (j_4) en m donne $Z_a = \frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m} = \frac{2P}{(Q+Q')m}$, si l'on ajoute ces deux expressions pour avoir celle (m_4), la première des deux détruit ce qui vient du premier terme $-\frac{2a}{m}$ entre crochets de la deuxième, et il reste, pour le numérateur (m_4) de B :

$$(n_4)\qquad \int_{\mathfrak{q}} Z\Phi(z)\,d\mathfrak{q} = -\frac{2Pg\tau^2}{m^5}\frac{Q}{Q+Q'}.$$

Celui $\int_{\mathfrak{q}} Z\Psi(z)\,d\mathfrak{q}$ de A est (comme au n° 5 puisque Q seul avait une vitesse), QVZ_a, qui est ici $= QV\frac{2P}{(Q+Q')m}$; et leur dénominateur est, aussi comme (d_2) du n° 6 ou (b_2) du n° 15 p. 510, sauf $(Q+Q')$ au lieu de Q,

$$(o_4)\qquad \int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{2}\left[\frac{1}{\cos^2 m}-\frac{1}{\text{coh}^2 m}+\frac{1}{m}\left(\frac{\sin m}{\cos m}-\frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right)\right] =$$
$$= \frac{P}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m}-\frac{1}{\text{coh}^2 m}+\frac{2P}{(Q+Q')m^2}\right).$$

On a, en conséquence, pour le déplacement cherché u, en substituant les (k_4) A, B dans l'expression (h_4) de U, et en y ajoutant pour avoir u, celle (f_4) de u_1, cette expression (qui se trouvait dans le Mémoire de 1857 dont un extrait se voit au *Compte rendu* de la séance du 10 août, p. 257) :

$$(p_4)\quad \begin{cases} u = \frac{5Pa^3}{48EI}\left(\frac{8}{5}\frac{z}{a}-\frac{4}{5}\frac{z^3}{a^3}+\frac{1}{5}\frac{z^4}{a^4}\right)+\frac{(Q+Q')a^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)+ \\ \quad + \frac{Q}{Q+Q'}\sum\frac{4}{m^3}\dfrac{\dfrac{\sin\frac{mz}{a}}{\cos m}-\dfrac{\text{sih}\frac{mz}{a}}{\text{coh}\, m}}{\dfrac{1}{\cos^2 m}-\dfrac{1}{\text{coh}^2 m}+\dfrac{2P}{m^2(Q+Q')}}\left(V\tau\sin\frac{m^2 t}{\tau}-\frac{g\tau^2}{m^2}\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right); \end{cases}$$

expression où l'on peut remarquer une certaine analogie avec celle qui a été donnée pour les déplacements *longitudinaux* des points d'une barre pesante fixée à un bout et heurtée à l'autre, par Poncelet, et où se trouvent ajoutés, à celle qui avait été donnée par Navier en série de termes affectés de sinus de multiples du temps, des termes algébriques et une seconde série, affectée de cosinus, afin de tenir compte, comme nous venons de faire, de l'ef-

fet additionnel du poids de la barre et du corps heurtant, tant après le choc qu'avant (*).

Nous reviendrons sur cette expression aux nos 35 et 51, où nous traiterons des solutions simples fournies par le premier et le plus influent terme de la série $\sum$ et qui, même avec une expression purement algébrique donnée à la valeur de m entrant dans ce terme, fournit souvent des solutions d'une approximation très suffisante, et qui sont susceptibles d'être obtenues élémentairement comme nous avons dit au n° 1.

Nous pouvons remarquer dès à présent quelle est, dans cette solution (p_4), la part de ce que j'y appelle l'*impulsion graduée*, produite ici par l'action des *poids* Q, Q′ et P. Le premier des deux termes hors du $\sum$, et la partie du second qui est affectée de Q′, y sont étrangers, car ils représentent l'effet purement *statique*, ou *sans impulsion*, du poids P de la barre et du poids additionnel Q′ antérieurement à l'ébranlement. Mais cette part dynamique ou impulsive de la pesanteur est représentée à la fois par la partie du deuxième terme hors du $\sum$ affectée du poids Q, n'entrant en jeu qu'à partir du choc, et par le second terme $-\frac{g\tau^2}{m^2}\cos\frac{m^2t}{\tau} = -\frac{Pa^3}{2EI\,m^2}\cos\frac{m^2t}{\tau}$ de la parenthèse du $\sum$ (terme contenant m qui dépend à la fois de P, de Q et de Q′).

En effet, si l'on efface ce terme, et les deux hors du $\sum$ ainsi que le coefficient $\frac{Q}{Q+Q'}$, qui affecte cette série, l'on retombe sur notre expression (e_1) du n° 6 où nous négligions les effets des poids et qui ne convenait exactement, ainsi, qu'à une impulsion brusque s'exerçant horizontalement sur le milieu de la barre.

26. — *Exemples de pure impulsion graduelle. Barre verticale prismatique d'un poids* P *appuyée aux deux bouts, unie, en son point milieu, à une masse d'un poids* Q *et éprouvant l'impulsion tranquille, ou sans choc à ce même point, d'une force horizontale constante* q. — Puisque tous les mouvements, supposés toujours petits, sont ici horizontaux, les poids n'agissent point. Il faut donc retrancher le terme $-g$ qui figurait à côté de la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ à l'équation aux différences partielles (c_4) du n° précédent ; et il faut, dans l'équation de

(*) *Introduction à la mécanique industrielle*, note du n° 322, p. 410 (1829) ou 446 (1870). Poncelet y revient au n° 325, p. 424 (1829) ou 460 (1870), mais c'est seulement pour la supposition que la barre portait déjà, à l'extrémité heurtée, ce second corps Q′ qui reçoit le choc du corps Q.

Voyez d'ailleurs ce que nous avons dit à la première sous-note du n° 1, sur la possibilité d'arriver à une solution, en termes finis, de la question du choc *longitudinal*, et d'en tirer des conclusions que les séries ne peuvent faire apercevoir.

condition (e_4), mettre la force q au lieu des deux premiers termes $Q + Q'$, en ne laissant que Q sans Q' au terme suivant, ce qui donne à résoudre :

$$(q_4)\left\{\begin{aligned} &\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad \text{avec } (u)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_a = 0,\\ &\text{et}\quad q - \frac{Q}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_a = -2EI\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_a; \end{aligned}\right.$$

à quoi l'on peut joindre les conditions initiales quelconques

$$(r_4)\qquad (u)_{t=0} = \varphi(z),\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z).$$

Pour se débarrasser du terme q, faisons encore (e_4) $u = u_1 + U$, la partie u_1 étant purement statique ou ce qui satisfait aux équations (q_4) sans les termes dynamiques $\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\frac{Q}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_a$. On trouve, la première équation étant ainsi réduite à $\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0$, sous les conditions exprimées par les autres, ainsi qu'on a fait pour obtenir (f_4') au numéro précédent,

$$(s_4)\qquad u_1 = \frac{qa^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right).$$

Mettant, pour u, U augmenté de cette valeur de u_1, on a toutes les équations (q_4) avec U au lieu de u, sauf le terme q de moins dans la dernière, ce qui donne pour U la même expression (h_4) $U = \sum \cdots$ qu'au numéro précédent, et toujours avec l'équation transcendante (j_4) pour déterminer m, mais sans Q'; et, pour déterminer les coefficients A, B de la série, les conditions initiales

$$(t_4)\left\{\begin{aligned} &(U)_{t=0} = (u)_{t=0} - u_1 = \varphi(z) - u_1 = \varphi(z) - \frac{qa^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right),\\ &\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z); \end{aligned}\right.$$

d'où, formules (u_1) du n° 10, ou (k_4) du numéro précédent,

$$(u_4)\qquad A = \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{q}} Z\psi(z)\,d\mathrm{q}}{\displaystyle\int_{\mathrm{q}} Z^2\,d\mathrm{q}},\qquad B = \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{q}} Z[\varphi(z) - u_1]\,d\mathrm{q}}{\displaystyle\int_{\mathrm{q}} Z^2\,d\mathrm{q}},$$

expressions où Q doit toujours figurer pour sa masse, portion de la masse totale $\frac{\mathrm{q}}{g} = \frac{P+Q}{g}$ du système, quoiqu'il n'agisse ici que par son inertie et non

par son poids. Les dénominateurs auront la même expression (o_4), avec $\varrho' = 0$, qu'au numéro précédent. Le numérateur de A peut être laissé sous la forme où nous venons de l'écrire. Celui de B aura une première partie qu'on peut, de même, écrire simplement $\int_{\mathfrak{q}} Z\varphi(z)\, d\mathfrak{q}$ tant qu'on ne spécifiera pas la forme de $\varphi(z)$; et on aura pour le reste, savoir

$$(v_4) \qquad -\int_{\mathfrak{q}} Zu_1 d\mathfrak{q} = -QZ_a(u_1)_{z=a} - 2\frac{P}{2a}\int_0^a Zu_1 dz\,.$$

Vu la valeur (s_4) de u_1, qui pour $z=a$, se réduit à $\frac{qa^3}{6EI}$, et l'équation en m donnant $Z_a = \frac{2P}{Qm}$; et vu aussi la valeur (m'_4) de $\int_0^a Z\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)dz$, cette expression revient à

$$-\frac{Pqa^3}{3mEI} - \frac{P}{a}\frac{qa^3}{6EI}\left[-\frac{2a}{m} + \frac{3a}{m^4}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m}\right)\right].$$

Le premier terme de cette expression, comme dans le calcul de l'expression analogue (n_4) du n° 25, détruit ce qui vient de $-\frac{2a}{m}$ dans le second, et il reste, en remplaçant $\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m}$ par $\frac{2P}{Qm}$:

$$\text{Numérateur de B} = \int_{\mathfrak{q}} Z\varphi(z)\, d\mathfrak{q} - \frac{qa^3}{6EI}\cdot\frac{12P}{Q}\cdot\frac{P}{2m^3}.$$

On a ainsi la solution

$$(x_4)\left\{\begin{aligned}
&u = \sum Z\left(\frac{\tau}{m^2}\frac{\int_{\mathfrak{q}} Z\psi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q}}\sin\frac{m^2 t}{\tau} + \frac{\int_{\mathfrak{q}} Z\varphi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q}}\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right)\\
&\qquad + \frac{qa^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3} - 12\frac{P}{Q}\sum\frac{P}{2m^3}\frac{Z\cos\frac{m^2 t}{\tau}}{\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q}}\right);\\
&\text{où} \qquad Z = \frac{1}{\cos m}\sin\frac{mz}{a} - \frac{1}{\operatorname{coh} m}\cos\frac{mz}{a};\\
&\int_{\mathfrak{q}} Z^2 d\mathfrak{q} = \frac{P}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\operatorname{coh}^2 m} + \frac{2P}{Qm^2}\right);\ \int_{\mathfrak{q}} Z\varphi(z)\,d\mathfrak{q} = QZ_a\varphi(a) + \frac{P}{a}\int_0^a Z\varphi(z)\,dz;
\end{aligned}\right.$$

expression qui se partage, comme on voit, en deux parties, l'une due à l'état initial, caractérisé par les fonctions $\varphi(z) = (u)_{t=0}$, $\psi(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}$ où $\psi(z)$ pourrait comprendre, comme dans les problèmes précédents, une vitesse

d'impulsion brusque; l'autre, due à l'action de la force q supposée partir sans vitesse de l'état *naturel* où aucune flexion n'était produite.

27. *Même barre sollicitée de même, quand la force horizontale q, dont elle subit l'impulsion graduelle ou tranquille, varie d'intensité avec le temps au lieu de rester constante.* — Soit

$$(y_4) \qquad q = f(t)$$

la fonction du temps exprimant l'intensité de cette force. Voici le procédé général trouvé par Duhamel en 1830 pour déduire, de toute expression telle que celle (x_4) donnant, au bout du temps t des déplacements u dus à l'action d'une force constante q à laquelle ont pu se joindre les effets de déformations et de vitesses initiales quelconques, les déplacements qui auraient lieu si cette force avait une intensité variable avec le temps suivant une loi connue (*).

On commence par mettre, dans cette expression complète de u, à la place de q sa valeur initiale

$$(q)_{t=0} = f(0);$$

ce qui donne, *pour l'époque t*, c'est à dire l'époque où le temps t aura été écoulé, une première partie du déplacement cherché u, à savoir celle que produirait une force $f(0)$ supposée agir continuement avec la même intensité pendant tout ce temps t, et unir son effet à ce qui est dû à l'état initial.

Puis, en mettant en œuvre le principe de la superposition des effets des forces, et en appelant ε toute portion du temps total t, comptée à partir de $t = 0$, l'on ajoute les déplacements qui seraient séparément produits pour l'époque t par les accroissements successifs $dq = f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ de la force; chacun étant supposé s'exercer sur le système avec une intensité constante depuis l'instant marqué par ε où cette portion dq a commencé son action jusqu'à l'instant final marqué par t. Ce temps d'action de la force $f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ est $t - \varepsilon$, et l'on obtiendra évidemment la portion du déplacement u produite par cet élément $dq = f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ de l'intensité de la force, en mettant, dans la partie de l'expression (x_4) donnant l'effet, pendant le temps t de la seule force q sans déformations ni vitesses initiales :

$$f'(\varepsilon)\,d\varepsilon \text{ à la place de } q; \qquad t - \varepsilon \text{ à la place de } t.$$

En ajoutant tous ces déplacements partiels, on aura le déplacement total.

Le procédé se réduit donc :

(*) Duhamel en avait émis la première idée dans son *Mémoire* de 1829 *sur la méthode relative au mouvement de la chaleur dans des corps plongés dans un milieu dont la température varie avec le temps*. (*Journal de l'École polytechnique*, 11e cahier, 1833). Il l'a développée l'année suivante dans son *Mémoire sur les vibrations d'un système quelconque de points matériels*, présenté le 23 avril 1830 (même *Journal*, 25e cahier, 1834, p. 1 à 36), quant à son application aux corps élastiques dont quelques points sont soumis soit à des déplacements obligatoires, soit à des forces aussi variables avec le temps.

1° A mettre dans l'expression complète (x_4) du déplacement qui est dû, au bout du temps t, à une force constante q et à l'état initial donné :

$f(0)$ à la place de cette force q,

ce qui donne une première portion du déplacement cherché qu'on désire avoir pour le temps final t;

2° Pour avoir l'autre portion, à mettre dans la partie de l'expression de u, indépendante de l'état initial et due à la force q :

$f'(\varepsilon)d\varepsilon$ à la place de q, $t-\varepsilon$ à la place de t;

et à intégrer de $\varepsilon=0$ à $\varepsilon=t$ l'expression qui résultera de cette double substitution : car ce sera ajouter ensemble les effets partiels produits pour l'époque finale t, par ces forces partielles $dq=f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$, chacune pendant son temps propre d'action.

En opérant ainsi sur l'expression (x_4) de u, nous aurons trois parties : 1° la série Σ qui forme son premier terme, sans la modifier; 2° le second terme, affecté de $\frac{qa^3}{6\mathrm{EI}}$, en mettant $f(0)$ au lieu de q; 3° ce même second terme, en y mettant $f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ pour q et $t-\varepsilon$ pour t, puis intégrant de 0 à t. Dans cette intégration, la partie $\frac{a^3}{6\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)\int_0^t f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$, où le temps ne se trouve pas, se réunira naturellement à la portion $\frac{a^3}{6\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)f(0)$, si simplement on y met $f(t)$ au lieu $f(0)$ ou $f'\varepsilon d\varepsilon$, car on a bien

$$f(0)+\int_0^t f'(\varepsilon)\,d\varepsilon=f(t).$$

On obtiendra en conséquence si l'on fait, pour l'intégration par rapport à ε, passer sous le signe Σ le $q=f'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ qui est hors de la parenthèse de la deuxième partie de (x_4) et si pour Z et $\int_{\mathfrak{q}} \mathrm{Z}^2 d\mathfrak{q}$ on met leurs valeurs,

$$(z_4)\left\{\begin{aligned} u=&\sum \mathrm{Z}\left(\frac{\tau}{m^2}\frac{\int_{\mathfrak{q}}\mathrm{Z}\psi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}}\mathrm{Z}^2d\mathfrak{q}}\sin\frac{m^2t}{\tau}+\frac{\int_{\mathfrak{q}}\mathrm{Z}\varphi(z)\,d\mathfrak{q}}{\int_{\mathfrak{q}}\mathrm{Z}^2d\mathfrak{q}}\cos\frac{m^2t}{\tau}\right)+\\ &+\frac{a^3}{6\mathrm{EI}}\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)f(t)-\frac{2a^3f(0)}{\mathrm{EI}}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\sum\frac{\mathrm{P}}{2m^3}\frac{\mathrm{Z}\cos\frac{m^2t}{\tau}}{\int_{\mathfrak{q}}\mathrm{Z}^2d\mathfrak{q}}\\ &-\frac{2\mathrm{P}a^3}{\mathrm{QEI}}\sum\frac{1}{m^3}\frac{\dfrac{\sin\frac{mz}{a}}{\cos m}-\dfrac{\mathrm{sih}\frac{mz}{a}}{\mathrm{coh}\, m}}{\dfrac{1}{\cos^2 m}-\dfrac{1}{\mathrm{coh}^2 m}+\dfrac{2\mathrm{P}}{\mathrm{Q}m^2}}\int_0^t\cos\frac{m^2}{\tau}(t-\varepsilon)f'(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Des quatre termes de cette expression, les trois premiers auraient pu être posés *à priori* : c'est le dernier facteur du quatrième, que la méthode de Duhamel a appris à déterminer.

28. *Mouvements de la même barre verticale quand son point milieu a subi transversalement un petit déplacement invariable.* — Soit α ce déplacement invariable après lequel le point milieu est supposé reprendre son repos ; les déplacements successifs u de tous les autres points seront régis par

$$(a_5)\quad \begin{cases} \tau^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0\,; \\ (u)_{z=0} = 0,\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=a} = 0,\ (u)_{z=a} = \alpha \text{ quel que soit } t, \end{cases}$$

ainsi que par des conditions initiales quelconques qu'expriment les (r_4) du n° 26, mais où les fonctions φ et ψ devront avoir une forme compatible avec $(u)_{z=a} = \alpha$ constamment.

Cette dernière condition (a_5), $(u)_a = \alpha$, remplace, comme l'on voit, la condition d'équilibre dynamique posée dans les problèmes précédents entre l'inertie du corps entraîné Q et les efforts tranchants s'exerçant de part et d'autre sur les deux sections limitant l'élément de barre auquel il est joint. Ici, que ce corps Q soit uni ou non à la barre, son inertie n'entre point en jeu.

Faisons, comme ci-dessus, $u = u_1 + U$, la partie u_1 étant purement statique. La résolution des équations (a_5) avec u_1 mis au lieu de u, et en réduisant la première à $\dfrac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} = 0$, donne, comme pour (s_4) du n° 26 :

$$(b_5)\qquad u_1 = \alpha\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right).$$

Et maintenant, posons l'expression

$$(c_5)\qquad u = \alpha\left(\frac{2}{3}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) + \sum Z\left(A\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau} + B\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right),$$

qui est propre à satisfaire aux (a_5) si la fonction Z de z et de m satisfait à

$$\tau^2 Z + a^4\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} = 0,\ (Z)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_a = 0,\ \alpha + \sum Z_a\left(A\frac{\tau}{m^2}\sin\frac{m^2 t}{\tau} + B\cos\frac{m^2 t}{\tau}\right) = \alpha\,.$$

Les quatre premières de ces conditions donnent à Z, comme dans les précédents problèmes, la forme

$$(d_5)\qquad Z = \frac{\sin\dfrac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\operatorname{sh}\dfrac{mz}{a}}{\operatorname{ch} m},$$

et la cinquième ne peut être satisfaite, quel que soit le temps t, que si l'on a

$Z_a = 0$, ce qui impose que les valeurs du paramètre m soient les racines de l'équation transcendante

$$(e_3) \qquad \frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m} = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} m - \operatorname{tah} m = 0.$$

Voyons quelles seront ces racines.

Comme la tangente hyperbolique tah m est toujours positive, égale à zéro pour $m = 0$, et à 1 pour $m = \infty$, cette équation ne peut être satisfaite que par des valeurs de m dont la tangente tang m est positive, et au plus égale à 1, c'est-à-dire par m compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, π et $\frac{5\pi}{4}$, 2π et $\frac{9\pi}{4}$, 3π et $\frac{13\pi}{4}$, etc.

Dans le premier intervalle, on n'a tang $m =$ tah m que pour $m = 0$, car pour toute autre valeur de m,

$$\operatorname{tang} m = m + \frac{m^3}{3} + \frac{2m^5}{15} + \frac{17m^7}{315} + \frac{62m^9}{2835} + \frac{1382m^{11}}{155925} + \dots$$

est toujours supérieur à

$$\operatorname{tah} m = m - \frac{m^3}{3} + \frac{2m^5}{15} - \frac{17m^7}{315} + \frac{62m^9}{2835} - \dots$$

Dans le deuxième intervalle, on a $\operatorname{tang} \frac{5\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tah} \frac{5\pi}{4} = 0,99922$;

Dans le troisième : $\operatorname{tang} \frac{9\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tah} \frac{9\pi}{4} = 0,999998$.

D'où il suit qu'on peut prendre pour racines, vu le degré d'approximation dont nous nous contentons

$$m = 0, \quad \frac{5\pi}{4} = 3,927, \quad \frac{9\pi}{4} = 7,069, \quad \frac{13\pi}{4} = 10,210 \dots,$$

$$\operatorname{tang} m = \operatorname{tah} m = 0, \qquad 1, \qquad 1, \qquad 1, \dots$$

Cette possibilité d'obtenir de l'équation (d_3) des valeurs de m en nombre infini, et rapidement croissantes, étant constatée, poursuivons la solution.

Quelles que soient les formes des fonctions φ et ψ entrant dans les conditions limites données $(u)_{t=0} = \varphi(z)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z)$, si on multiplie par $\frac{P}{a} Z dz$ les équations qui en résultent

$$(f_3) \qquad \varphi(z) = \alpha\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) - \sum BZ, \quad \psi(z) = \sum AZ.$$

et si on les intègre de $z = 0$ à $z = a$, on peut en tirer les coefficients B, A sans avoir besoin d'ajouter $QZ_a\,\varphi(a)$, $QZ_a\psi(a)$ aux premiers membres, ni

BQZ_a^2, AQZ_a^2 aux seconds, car d'après (e_5), on a $Z_a = 0$. On obtient donc

$$(g_5)\qquad B = \frac{\frac{P}{a}\int_0^a Z\varphi(z)\,dz - \frac{P}{a}\alpha\int_0^a Z\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right)dz}{\frac{P}{a}\int_0^a Z^2dz}, \qquad A = \frac{\frac{P}{a}\int_0^a Z\psi(z)\,dz}{\frac{P}{a}\int_0^a Z^2dz}.$$

L'expression (m'_4) nous a déjà donné la valeur $-\frac{2a}{m} + \frac{3a}{m^4}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right)$, ici réduite à $-\frac{2a}{m}$, de la seconde des intégrales du numérateur de B; et celle du dénominateur, aussi obtenue ci-dessus, qui est $\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m}\right)$ $-\frac{3a}{m}\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\text{sih}\, m}{\text{coh}\, m}\right)$ se réduit à son premier terme $\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m}\right)$.

Mais, d'après l'équation (e_5) en m élevée au carré, on a

$$\frac{1-\cos^2 m}{\cos^2 m} = \frac{\text{coh}^2 m - 1}{\text{coh}^2 m}, \quad \text{d'où}\ \frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\text{coh}^2 m} = 2\,\frac{1-\cos^2 m}{\cos^2 m} = 2\,\text{tang}^2 m,$$

quantité égale à zéro pour la racine $m=0$, et égale à 2 pour toutes les autres, dont la tangente est $=1$; en sorte qu'on a

$$(h_5)\qquad \int_0^a Z^2dz = a.$$

Substituant, séparant la partie affectée de α et abstrayant la racine $m=0$ qui annule Z, on a définitivement pour solution

$$(i_5)\qquad u = \sum Z\left[\frac{1}{a}\frac{\tau}{m^2}\left(\int_0^a Z\psi(z)\,dz\right)\sin\frac{m^2t}{\tau} + \frac{1}{a}\left(\int_0^a Z\varphi(z)\,dz\right)\cos\frac{m^2t}{\tau}\right] +$$

$$+\ \alpha\left\{\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3} + \sum\frac{2}{m}Z\cos\frac{m^2t}{\tau}\right\}; \quad \text{où}\ Z = \frac{\sin\frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\text{sih}\frac{mz}{a}}{\text{coh}\, m};$$

expression où l'on pourrait, avec une très grande approximation, remplacer m par $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$, dans les séries Σ, qui seront convergentes vu les dénominateurs m^2, m; en donnant à n toutes les valeurs entières de $n=1$ à $n=\infty$.

29. *Mouvements de la même barre, quand son point milieu est astreint à un mouvement transversal, fonction donnée du temps.* — On passera du cas précédent, où ce point n'éprouvait qu'un déplacement invariable α, à celui où il éprouve un déplacement variable

$$\alpha = F(t),$$

par la même méthode de Duhamel qui a servi, au nº 27, à passer du cas

d'une force constante q agissant sur ce point, au cas d'une force variable $q = f(t)$; c'est-à-dire que :

1° L'on fera d'abord $\alpha = F(0)$ dans l'expression complète (i_5) afin d'avoir pour l'époque t les déplacements u des divers points de la barre, déterminés tant par l'état initial que définissent les fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$, que par le petit déplacement $F(0)$, auquel on astreint immédiatement son point milieu.

2° Pour évaluer, afin de les joindre à cette première partie de u, les autres parties dues à la suite des petits déplacements additionnels $F'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ du point central, produisant leurs effets pendant des temps successivement décroissants $t - \varepsilon$, l'on remplacera, dans la partie de (i_5) affectée de α, α par $F'(\varepsilon)\,d\varepsilon$, t par $t - \varepsilon$, et l'on intégrera de $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon = t$. Il en résultera, comme on a $F(0) + \int_0^t F'(\varepsilon)\,d\varepsilon = F(t)$,

$$(j_5)\quad \left\{ \begin{aligned} & u = \text{la première ligne ou le premier } \sum \text{ de } (i_5) + \\ & + F(0) \sum \frac{2}{m} Z \cos\frac{m^2 t}{\tau} + \left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) F(t) + \sum \frac{2}{m} \int_0^t \cos\frac{m^2(t-\varepsilon)}{\tau} F'(\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

La masse $\frac{Q}{g}$ du corps supposé uni à la barre n'entre point dans cette formule (j_5), pas plus que dans la formule (i_5) dont elle est déduite. Elle est cependant complète si le mouvement obligatoire désigné par $\alpha = F(t)$ est uniforme, car alors, l'inertie de Q n'entre toujours pas en jeu. Mais il en sera autrement si ce mouvement est *varié*, car l'inertie dont il s'agit fournira une force variable $-\frac{Q}{g}F''(t)$ produisant son effet comme faisait la force variable $q = f(t)$ du n° 27. Il faudra donc alors, pour compléter l'expression (j_5) des déplacements u, y ajouter les trois derniers termes de la formule (z_4) de la fin du même numéro où l'on aura mis $-\frac{Q}{g}F'(t)$, $-\frac{Q}{g}F'(0)$, et $-\frac{Q}{g}F''(\varepsilon)$ à la place de $f(t)$, $f(0)$, $f'(\varepsilon)$. Nous n'insisterons point sur cette circonstance.

30. — *Autre procédé plus simple pour évaluer les effets d'impulsion graduée dus, soit à une force, soit à un déplacement obligatoire variant en fonction donnée du temps.* — Ce procédé, aperçu ou entrevu par Poisson en 1818 (*), mais mis en lumière et heureusement transformé par M. Phillips, dans un remarquable Mémoire de 1864 (**), donne des résultats ordinairement plus simples que le procédé général de Duhamel des n°s 27 et 29; mais son application exige que les fonctions $f(t)$, $F(t)$ du temps aient des formes particulières, susceptibles, par exemple, en les multipliant par des

(*) *Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques*, etc. (*Mémoires de l'Institut*, t. II. Voir au § 2, intitulé *Nouvelle manière*, etc.).

(**) *Solution de divers problèmes dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps sont des fonctions données du temps*, lu le 15 février 1864 (*Comptes rendus*, p. 317), et imprimé au *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. IX, n° de janvier 1864.

fonctions transcendantes de l'abscisse z, comme celles que nous avons appelées Z, de satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en t et du quatrième ordre en z, qui régit les vibrations transversales dont nous nous occupons. Telles sont les fonctions de t, périodiques, ou exponentielles, ou entières ne dépassant pas le second degré.

Donnons-en un exemple où la fonction est périodique, comme il arrive généralement dans les mécanismes. Supposons que la barre verticale de longueur $2a$ et de poids P, appuyée aux deux bouts, que nous avons considérée aux numéros précédents, soit astreinte, en son point milieu $z=a$, à un mouvement alternatif d'une période $\frac{2\pi}{\omega}$ et d'excursion $2r$, comme si le mouvement était commandé par une extrémité d'une longue bielle horizontale rigide, dont l'autre extrémité serait unie au bouton d'une manivelle de rayon r; en sorte qu'on ait, pour le déplacement obligatoire de ce point milieu

$$(k_5) \qquad (u)_{z=a} = r - r\cos\omega t,$$

d'où successivement, pour $\omega t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots.$

$$u_a = 0,\ r,\ 2r,\ r,\ 0,\ r,\ \ldots.$$

Faisons

$$\tau^2 = \frac{\mathrm{P}a^3}{2g\mathrm{EI}} \text{ comme ci-dessus, et } \omega = \frac{n^2}{\tau}.$$

La détermination des déplacements des divers points de la barre dépendra de la solution de l'équation

$$(l_5) \qquad \tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \text{ avec } (u)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = 0;\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_a = 0;$$

$$(m_5) \qquad \text{ainsi qu'avec } (u)_{z=a} = r - r\cos\frac{n^2 t}{\tau};$$

et du reste, avec des conditions initiales quelconques

$$(n_5) \qquad (u)_{t=0} = \varphi(z),\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{t=0} = \psi(z),$$

pourvu que les fonctions φ et ψ soient compatibles avec les quatre conditions (l_5) et (m_5) aux points particuliers $z=0$, $z=a$.

Faisons

$$u = u_1 + \mathrm{U},$$

la partie u_1 étant composée de manière à satisfaire à l'équation différentielle et aux trois conditions (l_5) ainsi qu'à celle (m_5), ce qui est possible d'après la forme de celle-ci, *sauf à astreindre ensuite la somme* $u_1+\mathrm{U}$ à satisfaire *à toutes*, y compris les conditions initiales (n_5).

Comme l'équation du 4e ordre peut être satisfaite par tout produit de

fonctions de z et de t tel que ceux dont nous avons fait usage jusqu'ici, mais peut l'être aussi en y ajoutant toute fonction entière de z d'un degré n'excédant pas le troisième, puisqu'une pareille fonction n'ajoute rien ni à $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$ ni à $\frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}$, nous essayerons, les D, C′, A′, B′ étant des constantes,

$$(o_5)\left\{\begin{array}{l} u_1 = D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 z^3 + \\ + \left(C'_0 \sin\frac{nz}{a} + C'_1 \cos\frac{nz}{a} + C'_2 \operatorname{sih}\frac{nz}{a} + C'_3 \operatorname{coh}\frac{nz}{a}\right)\left(A'\frac{\tau}{n^2}\sin\frac{n^2 t}{\tau} + B'\cos\frac{n^2 t}{\tau}\right). \end{array}\right.$$

En substituant dans les conditions (l_5), $(u_1)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_a = 0$ on a successivement :

$$D_0 = 0,\ C'_1 + C'_3 = 0,\ \text{puis } D_2 = 0,\ -C'_1 + C'_3 = 0\ ;\ \text{puis } D_1 + 3D_3 a^2 = 0,\ C'_0 \cos n + C'_2 \operatorname{coh} n = 0$$

$$\text{d'où}\quad u_1 = D_1\left(z - \frac{z^3}{3a^2}\right) + C'_0\left(\sin\frac{nz}{a} - \frac{\cos n}{\operatorname{coh} n}\operatorname{sih}\frac{nz}{a}\right)\left(A'\frac{\tau}{n^2}\sin\frac{n^2 t}{\tau} + B'\cos\frac{n^2 t}{\tau}\right).$$

La condition (m_5), à remplir aussi quel que soit t, donne

$$D_1 \cdot \frac{2}{3} a = r, \qquad A' = 0, \qquad B'C'_0\left(\sin n - \cos n\frac{\operatorname{sih} n}{\operatorname{coh} n}\right) = -r.$$

Tirant les valeurs de D_1, de $B'C'_0$, on a, en substituant, cette expression cherchée de la première partie du déplacement u :

$$(p_5)\qquad u_1 = r\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) - r\frac{\dfrac{\sin\frac{nz}{a}}{\cos n} - \dfrac{\operatorname{sih}\frac{nz}{a}}{\operatorname{coh} n}}{\dfrac{\sin n}{\cos n} - \dfrac{\operatorname{sih} n}{\operatorname{coh} n}}\cos\frac{n^2 t}{\tau},\quad \text{où } n = \sqrt{\omega\tau}\ ;$$

expression résultant de la composition d'un déplacement statique ou indépendant du temps et d'un déplacement périodique ou alternatif à période sensible $\frac{2\pi}{\omega}$, généralement bien plus longue que celles des mouvements intérieurs d'une infinité d'ordres, et superposés, qui constituent les vibrations élastiques.

Pour avoir la seconde partie de u, appelée U, qui donnera ces derniers mouvements, substituons à u la somme $u_1 + U$ dans l'équation différentielle et dans les conditions (l_5), (m_5), nous aurons, eu égard à ce que la première partie, u_1, y satisfait déjà :

$$\tau^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0,\ (U)_{z=0} = 0,\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=a} = 0,\ (U)_{z=a} = 0.$$

équations satisfaites quel que soit t, par une série

$$U = \sum \left(C_0 \sin \frac{mz}{a} + C_1 \cos \frac{mz}{a} + C_2 \operatorname{sih} \frac{mz}{a} + C_3 \operatorname{coh} \frac{mz}{a} \right) \left(A_1 \frac{\tau}{m^2} \sin \frac{m^2 t}{\tau} + B_1 \cos \frac{m^2 t}{\tau} \right)$$

si l'on a

$$C_1 + C_3 = 0, \quad -C_1 + C_3 = 0, \quad C_0 \cos m = -C_2 \operatorname{coh} m, \quad C_0 \sin m = -C_2 \operatorname{sih} m.$$

Les trois premières de ces égalités réduisent les quatre coefficients C à un seul, C_0 qui peut être fondu avec ceux A', B', en faisant $C_0 A' \cos m = A$; $C_0 B' \cos m = B$; et les deux dernières, divisées l'une par l'autre, donnent l'équation à laquelle doit satisfaire le paramètre m. On a ainsi

$$(q_5) \qquad U = \sum Z \left(A \frac{\tau}{m^2} \sin \frac{m^2 t}{\tau} + B \cos \frac{m^2 t}{\tau} \right). \text{ où } Z = \frac{\sin \frac{mz}{a}}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} \frac{mz}{a}}{\operatorname{coh} m};$$

les m, pour les termes successifs de la série, étant toutes les racines (il suffit comme aux n°s 4, etc. de celles qui sont réelles et positives) de l'équation transcendante

$$(r_5) \qquad \frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m} = 0,$$

équation pareille à celle (e_5) à laquelle a déjà conduit le problème du n° 28, et qui donne, à cela près de 8 dix millièmes pour la première et plus petite racine, 2 millioniémes pour la seconde, etc., et en abstrayant celle $m = 0$,

$$m = \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \frac{13\pi}{5}, \ldots\ldots$$

en sorte qu'on peut avec une approximation suffisante faire

$$m = \left(i + \frac{1}{4} \right) \pi, \text{ et prendre le } \sum \text{ de } i = 1 \text{ à } i = \infty.$$

Reste à déterminer les coefficients A et B de l'expression (q_5) de U, de manière à satisfaire aux conditions initiales

$$(s_5) \qquad (U)_{t=0} = \varphi(z) - (u_1)_{t=0}, \text{ et } \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi(z),$$

$$\left[\text{car on a } \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \text{ d'après l'expression } (p_5) \text{ de } u_1 \right].$$

Mettant pour les premiers membres de ces équations leurs valeurs $\sum AZ$ et $\sum BZ$, puis, multipliant par $Z\,dz$ et intégrant de 0 à a, tous les termes des deux séries disparaissent hors un seul eu égard à l'équation (r_5), en m, comme dans toutes les solutions ci-dessus; et on en tire, en mettant

dans le second membre de la première, pour $(u_1)_{t=0}$ sa valeur tirée de (p_5):

$$(t_5)\ \mathrm{B} = \frac{1}{\int_0^a Z^2 dz} \int_0^a \left\{ \varphi(z) - r\left(\frac{3}{2}\frac{z}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{a^3}\right) + r\, \frac{\dfrac{\sin\frac{nz}{a}}{\cos n} - \dfrac{\mathrm{sih}\frac{nz}{a}}{\mathrm{coh}\, n}}{\dfrac{\sin n}{\cos n} - \dfrac{\mathrm{sih}\, n}{\mathrm{coh}\, n}} \right\} Z dz,\quad \mathrm{A} = \frac{\int_0^a \psi(z) Z dz}{\int_0^a Z^2 dz}.$$

Les parties de la première intégrale qui ne dépendent pas de $\varphi(z)$ se trouvent toutes calculées, ainsi que le dénominateur commun $\int Z^2 dz$, aux numéros précédents, Mettant les valeurs de B, A dans (q_5) U et ajoutant (p_5) u_1, on aura le déplacement cherché u, dont nous nous dispenserons d'écrire l'expression facile à construire ainsi.

51. — *Balancier de machine à vapeur oscillant autour d'une situation horizontale; sa flexion, sa vibration et sa résistance quand il est soumis à l'action et à l'impulsion graduelle de forces périodiquement variables s'exerçant sur ses extrémités par des bielles restant sensiblement verticales.* — Ce problème est plus important que les précédents (*).

On peut bien se former une première idée des plus grandes dilatations des parties d'une pareille pièce, et, par suite, des dimensions transversales à lui donner pour que sa matière y résiste d'une manière permanente, en calculant ses flexions sous l'action purement statique des forces, approximativement supposées égales, qui agissent aux extrémités et dont les plus grandes intensités, périodiquement prises, sont généralement à peu près connues.

On peut même y ajouter, pour un peu plus d'approximation, l'action des poids $d\mathrm{q} = p dz$ de ses éléments et même celle de leurs inerties, d'intensités $-\frac{p dz}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ introduites aussi dans le calcul comme si c'étaient des efforts statiques, en attribuant aux déplacements u les valeurs fournies par la solution de première approximation dont nous parlons. On n'aura toujours ainsi, évidemment, qu'une solution incomplète, car les vibrations transversales de divers ordres, dues à la variabilité des efforts et à leur transmis-

(*) Tredgold a été le premier, nous le croyons, à émettre quelques idées théoriques sur ce sujet délicat (*Essai sur la force du fer fondu*, section XI, nos 257, 262, 289, 294). Mais ce n'était de la part du célèbre ingénieur qu'un tâtonnement, car il assimile inexactement l'action graduée des bielles à des chocs lorsque d'abord il conseille, à propos des tiges des pistons moteurs (sans doute en appliquant le principe avancé par Young, énoncé à la deuxième sous-note du n° 1 ci-dessus) *de ne jamais donner à ces tiges une vitesse de plus de* 1m,52 *par seconde* « afin que le refoulement de son propre poids n'y produise pas d'altération permanente; » et puis ensuite lorsque, pour les balanciers, il calcule la section à leur donner de la même manière que si, encastrés à l'endroit autour duquel ils tournent, ils étaient heurtés, à l'endroit qui reçoit le mouvement, par un poids égal à la pression du piston, animé de sa vitesse, dans l'instant où *le produit de ces deux quantités* est le plus grand possible, etc.

sion non instantanée, augmentent ces dilatations partielles et le danger des ruptures ou des énervations qu'elles peuvent amener, ou immédiatement ou à la longue.

Il est donc désirable de savoir résoudre le problème du calcul complet de ces vibrations.

On ne pourrait y arriver exactement (comme l'observe M. Phillips pour un problème plus simple, celui de la résistance longitudinale d'une bielle) qu'en tenant compte des circonstances de la distribution de la vapeur sous le piston uni à la bielle motrice, etc., et aussi, en attribuant à la bielle opposée ou opératrice un mouvement en rapport avec celui de la manivelle du volant qu'elle doit faire mouvoir, etc.

Mais, comme ce dernier mouvement peut être attribué aussi à une force de réaction sensiblement constante de la roue opératrice, montée sur l'arbre du volant, ce qui donne à l'effort de la bielle une loi périodique assez simple, nous attribuerons la même loi à la force motrice agissant du côté opposé; et nous donnerons, en adoptant de pareilles suppositions, tout au moins une idée de la manière dont la solution de ce problème pourrait être utilement obtenue.

Supposons que le balancier soit prismatique (vu que le même calcul, avec un peu plus de complication seulement, pourrait être appliqué à un balancier à coupe longitudinale doublement parabolique ou d'égale résistance). Supposons ses deux bras égaux chacun à a, sa masse $=\frac{P}{g}$. Appelons toujours E l'élasticité longitudinale de ses fibres, I le moment d'inertie de sa section quelconque σ; u les déplacements verticaux des points de son bras moteur ou de droite; u_1 ceux de son bras opérateur ou de gauche, à des distances z et z_1 du pivot pris comme origine commune de ces abscisses comptées dans deux sens opposés; et appelons q, q_1, les efforts verticaux de traction, dans les sens u, u_1, exercés par les bielles. Les équations à résoudre seront, en abstrayant ici les pesanteurs des bras ainsi que celles des bielles de transmission des efforts :

$$(y_5)\left\{\begin{array}{ll} \text{Bras de droite} & \tau^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^4\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4}=0, \\ \text{avec} & (u)_{z=0}=0,\ \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=a}=0,\ \mathrm{EI}\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right)_{z=a}+q=0, \\ \text{Bras de gauche} & \tau^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+a^4\dfrac{\partial^4 u_1}{\partial z_1^4}=0, \\ \text{avec} & (u_1)_{z_1=0}=0,\ \left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)_{z_1=a}=0,\ \mathrm{EI}\left(\dfrac{\partial^3 u_1}{\partial z_1^3}\right)_{z_1=a}+q_1=0. \end{array}\right.$$

et avec ces conditions de raccordement des deux bras se joignant à l'origine des z et z_1 :

$$(z_5)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=0}=0,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=0}=\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2}\right)_{z_1=0},$$

ainsi qu'avec ces conditions initiales quelconques, mais de formes telles qu'elles soient compatibles avec les autres conditions posées :

$$(a_6)\quad \left\{\begin{array}{ll} (u)_{t=0} = \varphi(z), & \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z), \\ (u_1)_{t=0} = \varphi_1(z_1), & \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi_1(z_1). \end{array}\right.$$

Quant à la forme à assigner aux expressions des efforts verticaux q et q_1 exercés par les bielles, observons que si, du côté gauche, l'on appelle $-Q_1$ l'effort opérateur qu'exerce, tangentiellement à sa circonférence, une roue montée sur l'arbre du volant, et d'un rayon égal à la longueur r_1 de la manivelle, effort qui est rendu sensiblement constant lorsque le volant a un moment d'inertie de grandeur suffisante, et si ω est la vitesse angulaire de la manivelle, on doit prendre, le temps t étant supposé compté à partir de l'instant où celle-ci est horizontale,

$$q_1 = -2Q_1 \cos \omega t.$$

En effet q_1 devra avoir son maximum négatif pour l'angle $\omega t = 0$, son maximum positif pour $\omega t = \pi$: il devra être nul aux *points morts* où $\omega t = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; enfin, comme l'espace parcouru *verticalement* par le bouton de la manivelle pendant le temps dt est $\omega r_1\, dt \cos \omega t$, le travail de la force q_1 pendant le parcours d'une demi-circonférence est $r_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q_1 \cos \omega t\, d(\omega t)$; intégrale qui, si l'on y fait $q_1 = -2Q_1 \cos \omega t$ est justement égale à $-Q_1 \pi r_1$ c'est-à-dire au travail de la force tangentielle constante $-Q_1$; en sorte que l'expression posée pour q_1 est bien ce qu'il faut pour que cette force verticale entretienne le mouvement du mécanisme en fournissant, à la fin de chaque période, le travail opérateur qui a été dépensé pendant sa durée.

Or, du côté droit, on peut attribuer approximativement la même loi à l'effort moteur q s'exerçant au moyen du piston d'une machine à double effet, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, et qui a aussi deux points morts et deux points de valeurs maxima l'une positive, l'autre négative.

Nous mettrons en conséquence, dans la 4[e] et la 8[e] équation (y_5), pour les deux forces q et q_1, eu égard à ce que, tantôt tractions, tantôt impulsions, elles ne changent de signe qu'ensemble, avec $\cos \omega t$:

$$(b_6)\quad \left\{\begin{array}{ll} q = 2Q \cos \omega t, & q_1 = 2Q_1 \cos \omega t, \\ \text{où nous ferons } \omega = \dfrac{n^2}{\tau}, & \tau^2 \text{ étant } = \dfrac{Pa^3}{2gEI}. \end{array}\right.$$

Nous poserons

$$u = v + U, \qquad u_1 = v_1 + U_1 ;$$

l'inconnue auxiliaire v devant satisfaire d'abord à l'équation différentielle (y_5) en u, ce qu'elle fera si l'on prend, les C étant des constantes,

$$v = \left(C \sin \frac{nz}{a} + C' \cos \frac{nz}{a} + C'' \operatorname{sih} \frac{nz}{a} + C''' \operatorname{coh} \frac{nz}{a} \right) \cos \frac{n^2 t}{\tau};$$

expression qui satisfera aussi aux trois conditions particulières (y_5) en u, si ces quatre constantes ont entre elles les relations

$$(c_6) \quad \begin{cases} C' + C''' = 0, \quad -C \sin n - C' \cos n + C'' \operatorname{sih} n + C''' \operatorname{coh} n = 0, \\ EI \dfrac{n^3}{a^3} (-C \cos n + C' \sin n + C'' \operatorname{coh} n + C''' \operatorname{sih} n) + 2Q = 0. \end{cases}$$

Nous ferons usage dans la recherche des valeurs de v et v_1 en z, z_1 et n, et ensuite de U et U_1 en z, z_1 et une autre constante m, des notations abréviatives :

$$(d_6) \quad \begin{cases} \sin n = s', & \cos n = c', & \operatorname{sih} n = h', & \operatorname{coh} n = k' \\ \sin \dfrac{nz}{a} = s'_z; & \cos \dfrac{nz}{a} = c'_z, & \operatorname{sih} \dfrac{nz}{a} = h'_z & \operatorname{coh} \dfrac{nz}{a} = k'_z \\ \sin m = s, & \cos m = c, & \operatorname{sih} m = h & \operatorname{coh} m = k \\ \sin \dfrac{mz}{a} = s_z, & \cos \dfrac{mz}{a} = c_z, & \operatorname{sih} \dfrac{mz}{a} = h_z, & \operatorname{coh} \dfrac{mz}{a} = k_z. \end{cases}$$

Les deux premières conditions (c_6) donnent C′ et C‴ en C et C″, d'où

$$(e_6) \qquad v = \left[Cs'_z + C''h'_z + \frac{Cs' - C''h'}{c' + k'} (k'_z - c'_z) \right] \cos \frac{n^2 t}{\tau};$$

et la troisième condition (c_6) donne entre les deux coefficients subsistants C et C″ la relation (vu $c'^2 + s'^2 = 1$, $k'^2 - h'^2 = 1$) :

$$(f_6) \qquad (-1 + s'k' - c'h') C + (1 + s'h' + c'k') C'' = -\frac{2Qa^3}{n^3 EI (c' + k')}.$$

Pour le bras de gauche on trouvera analogiquement une expression

$$(e'_6) \qquad v_1 = \left[C_1 s'_{z_1} + C''_1 h'_{z_1} + \frac{C_1 s' - C''_1 h'}{c' + k'} (k'_{z_1} - c'_{z_1}) \right] \cos \frac{n^2 t}{\tau};$$

avec une relation

$$(f'_6) \qquad (-1 + s'h' - c'k') C_1 + (1 + s'h' + c'k') C''_1 = -\frac{2Q_1 a^3}{n^3 EI (c' + k')}.$$

Pour déterminer C, C″, C_1, C''_1, il faut deux autres équations: elles seront fournies par les deux conditions de raccordement (z_5) des deux bras, appliquées à v et à v_1 au lieu de u et u_1 d'où en divisant par $\frac{n}{a}$ ou $\frac{n^2}{a^2}$ et par $\cos \frac{n^2 t}{\tau}$,

$$(g_6) \qquad \text{De } \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right)_0 = 0, \quad (C + C_1) + (C'' + C'') = 0$$

$$(g'_6)\qquad \text{De}\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial^2 z_1}\right)_0 = 0, \qquad s'(C - C_1) - h'(C'' - C''_1) = 0.$$

En combinant la somme des deux équations (f_6), (f''_6) avec celle (g_6), on obtient immédiatement les valeurs de $C + C_1$, $C'' + C''_1$. En combinant leur différence avec l'équation (g'_6) on obtient $C - C_1$, $C'' - C''_1$: d'où, facilement, les quatre inconnues C. En les substituant dans (e_6), (e'_6) l'on a pour les premières partie v, v_1 des inconnues u, u_1, eu égard à ce que $n = \sqrt{\omega t}$,

$$(h_6)\quad \left\{ \begin{aligned} v = \frac{2\omega^3 \cos \omega t}{n^3 \mathrm{EI}(c' + k')} \Bigg\{ & \frac{Q - Q_1}{2(c' + k')(c'h' - s'k')} \left(h' \sin \frac{nz}{a} + s' \,\mathrm{sih} \frac{nz}{a} \right) \\ & - \frac{Q + Q_1}{4(1 + c'k')} \left[- \sin \frac{nz}{a} + \mathrm{sih} \frac{nz}{a} + (s' + h') \left(\cos \frac{nz}{a} - \mathrm{coh} \frac{nz}{a} \right) \right] \Bigg\} \end{aligned} \right.$$

v_1 = la même chose en mettant z_1 pour z et donnant le signe — au premier des deux termes entre accolades.

Reste à calculer U, U_1. La règle générale pour obtenir ces sortes de secondes parties est simplement d'imposer aux sommes telles que $v + U$, $v_1 + U_1$ *de satisfaire à toutes les équations et conditions du problème, sauf, après les avoir posées, à en réduire l'expression en raison de ce à quoi les parties* v, v_1 *satisfont déjà ;* réduction qui ne modifiera, ici, que les conditions telles que $\mathrm{EI}\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_a + 2Q \cos \omega t = 0$, en faisant simplement disparaître, comme on le désirait, leur terme affecté du temps. On aura ainsi

$$(i_6)\quad \tau^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0, \quad \text{avec}\ (U)_{z=0} = 0,\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{z=a} = 0,\ \left(\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}\right)_{z=a} = 0,$$

avec la même chose en U_1 et z_1 ; et avec les conditions de raccordement (z_5) ayant U, U_1 au lieu de u, u_1 ;

enfin avec les conditions initiales suivantes, puisque si l'on fait $t = 0$ dans les (h_6) v, v_1, on a leur valeur pour $\cos \omega t = 1$, et leurs dérivées en t nulles :

$$(j_6)\quad \left\{ \begin{aligned} & (U)_{t=0} = \varphi(z) - (v)_{\cos \omega t = 1}, \qquad (U_1)_{t=0} = \varphi_1(z_1) - (v_1)_{\cos \omega t = 1}, \\ & \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi(z), \quad \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{t=0} = \psi_1(z_1). \end{aligned} \right.$$

On satisfera à la première ligne de (i_6), les A, B, C étant des constantes, par

$$(k_6)\quad \left\{ \begin{aligned} & U = \sum ZT, \quad \text{où}\ T = A \frac{\tau}{m^2} \sin \frac{m^2 t}{\tau} + B \cos \frac{m^2 t}{\tau}; \\ & Z = C_0 \sin \frac{mz}{a} + C_1 \cos \frac{mz}{a} + C_2 \,\mathrm{sih} \frac{mz}{a} + C_3 \,\mathrm{coh} \frac{mz}{a} ; \end{aligned} \right.$$

$$C_1 + C_3 = 0, \quad - C_0 s - C_1 c + C_2 h + C_3 k = 0, \quad - C_0 c + C_1 s + C_2 k + C_3 h = 0;$$

d'où l'on peut tirer trois des coefficients C, comme multiples du quatrième ; et comme celui-ci se trouvera fondu dans les A, B de T, on peut l'abstraire et prendre en conséquence

$$(l_6)\quad Z=(1+sh+ck)\sin\frac{mz}{a}+(1-sh+ck)\,\mathrm{sih}\frac{mz}{a}+(sk-ch)\left(\cos\frac{mz}{a}-\mathrm{coh}\frac{mz}{a}\right).$$

La deuxième ligne de (i_6) sera satisfaite par

$$U_1=\sum Z_1T_1,\ \text{où } Z_1 = \text{une expression comme } (l_6) \text{ avec } z_1 \text{ au lieu de } z.$$

Quant aux conditions de raccordement (z_5) avec U et U_1 pour u et u_1, à remplir quel que soit le temps, comme la seconde sera

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0 T=\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z_1^2}\right)_0 T_1 \text{ et comme on trouve } \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)_0=\frac{m^2}{a^2}(sk-ch)(-1-1)=\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z_1^2}\right)_0,$$

il faudra qu'on ait

$$T_1=T$$

ou les mêmes coefficients A, B des termes en $\sin\frac{m^2t}{\tau}$, $\cos\frac{m^2t}{\tau}$ dans U_1 que dans U.

La seconde condition de raccordement $\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0+\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\right)_0=0$ revient, par une raison semblable, à $0=2\frac{m}{a}(1+sh+ck+1-sh+ck)$, ce qui donne en supprimant le facteur $\frac{4m}{a}$ ne fournissant qu'une racine $m=0$ étrangère à notre problème,

$$(m_6)\qquad 1+\cos m\,\mathrm{coh}\,m=0.$$

C'est l'équation transcendante très simple donnée par Poisson, dans sa solution du problème des vibrations d'une barre libre aux deux bouts (*) et déjà trouvée par D. Bernouilli (**) et par Euler (***), qui sans s'occuper, comme Poisson, de leurs amplitudes et de comparer sous ce rapport celles de divers ordres qui se superposent, déterminaient surtout la *durée* ou le *son fondamental* de la vibration ayant la plus longue période.

C'est cette équation (m_6) qui fournira, par ses racines en nombre infini, les valeurs de m à mettre dans les termes successifs des séries $\sum$ exprimant U et U_1 (****).

(*) *Mécanique*, 2e édition, 1833, n° 521, équation (a), p. 377.

(**) Académie de Saint-Pétersbourg, volume de 1741-1743.

(***) *Methodus inveniendi*, etc..... *Additamentum de curvis elasticis*, 1744, n° 70, p. 287.

(****) Comme coh$m$ est toujours positif, les cos$m$ ne peuvent être que négatifs, et les m ne peuvent être compris qu'entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{2}$..... Nous avons trouvé

Les coefficients A, B du sinus et du cosinus de $\frac{m^2 t}{\tau}$ devant satisfaire à $\sum BZ = (U)_{t=0}$, $\sum AZ = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0}$, auront, d'après les expressions générales (n_1) du n° 9, $B = \int_q Z(u)_{t=0}\, dq$, $A = \int_q Z\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} dq$ divisés par $\int_q Z^2 dq$, et d'après (j_6), les valeurs:

$$(o_6)\quad \left\{\begin{aligned} B &= \frac{\int_0^a Z\left[\varphi(z) - (v)_{\cos\omega t=1}\right] dz + \int_0^a Z_1\left[\varphi_1(z_1) - (v_1)_{\cos\omega t=1}\right] dz_1}{\int_0^a Z^2 dz + \int_0^a Z_1^2 dz_1},\\ A &= \frac{\int_0^a Z\psi(z)\, dz + \int_0^a Z_1\psi_1(z_1)\, dz_1}{\text{même dénominateur}}.\end{aligned}\right.$$

Les deux parties du dénominateur sont égales et pourront être calculées d'après l'expression (l_3) de Z.

Nous n'insisterons pas sur la solution, dont nous croyons avoir posé les bases, de ce problème complexe et délicat, solution qui, une fois développée, fournira la connaissance des plus grandes dilatations à contenir dans de justes limites, en réglant les dimensions de cet organe de mécanisme, soumis à des forces toujours variables, le faisant fléchir et vibrer alternativement dans deux sens opposés.

32. — *Applications numériques des précédentes solutions rigoureuses de problèmes de résistance vive d'une barre élastique brusquement heurtée. — Courbes représentatives du mouvement des points de cette barre.* — Nous prendrons pour exemple la barre appuyée aux deux bouts et heurtée au milieu, considérée au n° 6, et au n° 25 où on l'a envisagée dans des circonstances différentes.

Au n° 6, où nous avons abstrait sa pesanteur (dont l'effet est souvent négligeable et est même nul si elle est heurtée horizontalement), il a été trouvé pour le déplacement transversal u à une distance z de l'extrémité immobile de chacune des deux moitiés de la barre prismatique d'une longueur $2a$, d'un poids P, heurtée au milieu avec une vitesse V par un corps d'un poids Q, une expression (e_1) où le premier terme du dénominateur peut, d'après l'équation en m, être remplacé par $\frac{2P}{Q}$ ce qui donne, en

pour ces diverses valeurs

$m = 1,88638;\ 7,85475;\ 14,13717;\ 20,42035;\ 26,70354;\ 32,98672;\ 39,26991;\ 45,55309;\dots$

d'où environ

$m^2 = 3,557;\quad 61,70;\quad 199,8;\quad 417,0;\quad 712,9;\quad 1088,3;\quad 1542,1;\quad 2975,1;\dots$

On voit que les périodes $\frac{2\pi\tau}{m^2}$ des vibrations seront rapidement décroissantes d'un terme de la série Σ au terme suivant.

divisant par $V\tau = V\sqrt{\dfrac{Pa^3}{2gEI}}$ qui est une constante donnée,

$$(p_6) \qquad \frac{u}{V\tau} = \sum \frac{4}{m^3} \frac{\dfrac{\sin \dfrac{mz}{a}}{\cos m} - \dfrac{\operatorname{sih} \dfrac{mz}{a}}{\operatorname{coh} m}}{\dfrac{1}{\cos^2 m} - \dfrac{1}{\operatorname{coh}^2 m} + \dfrac{2}{m^2}\dfrac{P}{Q}} \sin m^2 \frac{t}{\tau};$$

Le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines réelles et positives de l'équation

$$(q_6) \qquad m\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{\operatorname{sih} m}{\operatorname{coh} m}\right) = \frac{2P}{Q}.$$

Comme u est une ligne, V une vitesse, c'est-à-dire le quotient d'une ligne par un temps, et τ un temps, les diverses valeurs du second membre de (p_6) sont des nombres qui, une fois calculés pour diverses grandeurs du rapport $\frac{P}{Q}$, donneront la suite des déplacements u des divers points de la barre pour des grandeurs quelconques de son poids P, de son élasticité de flexion EI et de la vitesse V du corps qui l'aura heurtée.

Afin de résoudre l'équation en m, nous avons, par le calcul d'une suite de valeurs de m ($\tang m - \operatorname{tah} m$) pour des valeurs de m comprises entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{2}$,.... déterminé de premières approximations que la méthode *naturelle* et prompte d'approximations successives nous a permis de resserrer ; d'où ce tableau, où

$$m_0, \quad m_1, \quad m_2, \quad m_3, \ldots$$

sont les valeurs de m par ordre croissant de grandeur

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
Pour $\frac{P}{Q}$ très petit	$\left(\frac{3P}{Q}\right)^{\frac{1}{4}}$	$\frac{5\pi}{4} + \frac{4}{5\pi}\frac{P}{Q}$	$\frac{9\pi}{4} + \frac{4}{9\pi}\frac{P}{Q}$	$\frac{13\pi}{4} + \frac{4}{13\pi}\frac{P}{Q}$	....	....	....
Pour $\frac{P}{Q} = \frac{1}{10}$	0.73135	3.93132	7.08250	10.21980	13.35913	16.49932	19.63996
$= \frac{1}{4}$	0.90428	3.98564	7.10260	10.23395	13.37008	16.50330	19.64330
$= \frac{1}{2}$	1.04799	4.03652	7 13400	10.25664	13.38770	16.52269	19.65969
$= 1$	1.19161	4.11972	7.18994	10.29839	13.42093	16.55021	19.68824
$= 2$	1.319648	4.25720	7.28084	10.37041	13.48020	16.60045	19.72671
Très grand	$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{Q}{2P}\right)$	$\frac{3\pi}{2}\left(1 - \frac{Q}{2P}\right)$	$\frac{5\pi}{2}\left(1 - \frac{Q}{2P}\right)$	$\frac{7\pi}{2}\left(1 - \frac{Q}{2P}\right)$	....	....	....

Si, pour avoir la *flèche dynamique* de courbure, que nous appellerons

$$f_D$$

nous nous bornons à un seul terme de la série $\sum$, savoir, au plus influent de beaucoup, le premier, celui où entre la racine m_0, cette valeur maximum des déplacements produits par le choc sera l'expression (p_6) pour $z = a$ et pour $\sin \frac{m^2 t}{\tau} = 1$, d'où, en remplaçant le numérateur par $\frac{2P}{mQ}$:

$$(q_6') \qquad f_D = \frac{4V\tau}{m_0^2 + \frac{Q}{2P} m_0^4 \left(\frac{1}{\cos^2 m_0} - \frac{1}{\operatorname{coh}^2 m_0}\right)}$$

Mais rien ne dit que la somme $\sum$ ait son maximum pour la valeur $= 1$ de tous les sinus, qui prennent, d'ailleurs, cette valeur à des instants différents; et il convient, pour d'autres raisons encore, de connaître les formes successives que prend à divers instants la barre heurtée.

Pour obtenir, à cet effet, en cinq points de chaque demi-barre, savoir les points

$$(r_6) \qquad z = \quad 0{,}2a, \quad 0{,}4a \quad 0{,}6a, \quad 0{,}8a, \quad a \text{ (le milieu)},$$

les valeurs (p_6) de $\frac{u}{V\tau}$ relatives à autant d'instants ou de valeurs de $\frac{t}{\tau}$ qu'on veut, un calcul tout numérique aurait été extrêmement long. Nous y avons donc suppléé par une méthode graphique : elle consiste à tracer d'abord une suite de sinusoïdes qui ont 1° pour bases ou demi-spires les moitiés

$$\frac{\pi}{m^2}$$

des temps, divisés par τ, des périodes d'oscillation, ou de ce qui, ajouté à une valeur quelconque de $\frac{t}{\tau}$, fait repasser $\sin \frac{m^2 t}{\tau}$ par les mêmes grandeurs ; 2° pour hauteurs, ou plus grandes ordonnées, les valeurs des parties de $\frac{u}{V\tau}$ fournies par les 1er, 2e, 3e.... termes de la série (p_6) qui répondent à $\sin \frac{m^2 t}{\tau} = 1$. Une fois ces sinusoïdes tracées, ce qui est très facile à faire avec toute l'exactitude désirable, si on les met les unes au-dessus des autres et si l'on additionne, au compas, eu égard aux signes, les uns positifs, les autres négatifs, leurs diverses ordonnées *répondant à une même abscisse quelconque* $\frac{t}{\tau}$, on aura, pour le temps t correspondant, qui s'est écoulé de-

puis l'instant $t = 0$ de l'acte du choc, la valeur de $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$ ou le déplacement transversal u subi par un quelconque des cinq points (r_6) de chaque demi-barre. Voici le tableau des *bases* et des *hauteurs* calculées des courbes sinusoïdales.

Bases $\frac{\pi}{m^2}$ des sinusoïdes.

Pour $m =$	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
Pour $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$ . .	2.860460	0.192813	0.061728	0.029864	0.017528	0.011508
1. .	2.212492	0.185103	0.060770	0.029622	0.017442	0.011469
2. . .	1.803982	0.174981	0.059263	0.029212	0.017288	0.011400

$$\text{Hauteurs } \frac{4}{m^5} \frac{\frac{1}{\cos m} \sin \frac{mz}{a} - \frac{1}{\operatorname{coh} m} \operatorname{sih} \frac{mz}{a}}{\frac{1}{\cos^2 m} - \frac{1}{\operatorname{coh}^2 m} + \frac{2}{m^2}\frac{P}{Q}} \text{ des sinusoïdes.}$$

Pour $m =$		m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$	$\frac{z}{a} = 0.2$	0.218451	—0.028057	0.007112	—0.002205	0.000509	0.000098
	0.4	9.418463	—0.039118	0.001980	9.002035	—0.000907	—0 000194
	0.6	0.581994	—0.029091	—0.006813	0.000293	0.001111	0.000285
	0.8	0.691812	—0 007100	—0.005075	—0.001069	—0.001140	—0.000383
	1	0.731794	0.005661	0.000666	0.000163	0.000057	0.000025
$\frac{P}{Q} = 1$	$\frac{z}{a} = 0.2$	0.141875	—0.025132	0.006466	—0.002060	0.000477	0.000098
	0.4	0.271440	—0.032139	0.001662	0.001932	—0.000857	—0.000194
	0.6	0.376876	—0 022425	—0.006251	0.000218	0.001057	0.000283
	0.8	0.447171	—0.002807	—0.004267	—0.002354	—0.001094	—0.000380
	1	0.472516	0.008358	0.001119	0.009291	0.000105	0.000047
$\frac{Q}{P} = 2$	$\frac{z}{a} = 0.2$	0.087462	—0.017521	0.005463	—0.001816	0 000895	0.000097
	0.4	0.167095	—0.025611	0.001212	0.001749	—0.000769	—0.000191
	0.6	0.151491	—0.014885	—0.005358	0.000107	0.000959	0.000278
	0.8	0.274039	0.001146	—0.005128	—0.002024	—0.001008	—0.000370
	1	0.289243	0.009928	0.001658	0 000468	0.000179	0.000082

Nos sinusoïdes ont été tracées à l'échelle de $0^{m},20^{c}$ pour les valeurs 1, soit des abscisses, soit des ordonnées, ce qui fait deux centimètres pour chaque $\frac{t}{\tau} = 0,1$ et chaque $\frac{u}{\sqrt{\tau}} = 0,1$. Nous avons obtenu ainsi, dans chacune des trois hypothèses $P = \frac{Q}{2}$, $P = Q$, $P = 2Q$, deux séries de courbes.

Les courbes de la première série donnent, par leurs ordonnées répondant à des abscisses $\frac{t}{\tau}$ qui croissent de 0,05 en 0,05, et pour chacun des cinq points de la demi-barre, la suite des valeurs de $\frac{u}{V\tau}$ jusqu'à $\frac{t}{\tau}=2,25$ pour les deux premiers cas et $\frac{t}{\tau}=1,9$ pour le troisième. Ces cinq courbes partant du même point ($u=0$, $t=0$) ne reviennent, au bout de ces temps, couper l'axe des abscisses $\frac{u}{V\tau}=0$, qu'en des points légèrement différents les uns des autres, ce qui montre qu'à aucun instant la barre ne retourne exactement à son état primitif. Ces courbes, représentant la loi et la suite du mouvement de chacun des cinq points, sont fort sinueuses; cela vient de ce que le mouvement résulte de la superposition de vibrations ayant des durées et des amplitudes de moins en moins grandes, dont chacune a son *rebond* bien avant celui de l'oscillation principale provenant du premier terme du $\sum$ ou de la valeur m_0 de m.

Toutes ces courbes serpentantes sont, pour $t=0$, ou à l'origine, tangentes à l'axe des abscisses, avec lequel, même, elles se confondent dans de très petites étendues, parce que l'ébranlement ne se transmet pas instantanément du point milieu aux points d'appui.

Il y a exception, bien entendu, pour les courbes relatives à $z=0$. La tangente y fait un angle demi-droit avec l'axe; et cela devait être, car, à l'instant initial, les vitesses ne sont nulles qu'en exceptant le point milieu qui reçoit le choc, et où $\frac{du}{dt}=V$; ce qui donne bien 1 pour la tangente trigonométrique, quotient de $d\frac{u}{V\tau}$ par $d\frac{t}{\tau}$, de l'angle fait avec l'axe des abscisses par le premier élément de la courbe représentative du mouvement du point milieu.

Ces courbes, surtout pour les points proches des appuis, s'élèvent même d'abord au-dessus de l'axe des abscisses $u=0$, aussitôt s'en être détachées; en sorte que, par une sorte de réaction, les u commencent par y être négatifs. C'est ce que nous avons rendu très sensible, ainsi que le retard de la mise en mouvement aux points proches des appuis, par un dessin spécial où les échelles sont 25 fois plus grandes, mais où les cinq courbes ne s'étendent que jusqu'à l'instant $\frac{t}{\tau}=0,1$ (*).

53. *Suite des applications, Courbes donnant les formes successivement prises par la barre heurtée. Plus grande flèche au milieu.* — Ces courbes,

(*) Les planches, trop grandes pour trouver place ici, sont gravées depuis longtemps Nous espérons les faire paraître dans un des prochains volumes des *Mémoires de l'Académie*.

qui sont celles de la *deuxième série* dont nous avons parlé, se composent avec les mêmes ordonnées $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$ que les courbes de mouvement ou de la première série, mais ces ordonnées étant contemporaines, ou relatives, pour chaque courbe, à une seule valeur de $\frac{t}{\tau}$; et les abscisses étant maintenant, non plus les temps, mais les distances $z=0,2a$, $0,4a$, $0,6a$, $0,8a$, a, des points de la barre à chacune de ses extrémités. Ces courbes donnent les états successifs de la barre (avec amplification de ses flexions) depuis l'instant du choc, jusqu'à celui où le déplacement total $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$ au milieu devient le plus grand possible, en allant un peu au delà, ou dans le commencement du second quart de période qui est le temps du retour. Même, pour le cas $P=Q$, un second dessin donne les états jusqu'à un instant $\frac{t}{\tau}=2.25$ où le retour à l'état primitif se trouve accompli et légèrement dépassé.

Les courbes des cas $P=\frac{1}{2}Q$ et $P=2Q$ ont été tracées de $t=0,1\tau$ en $t=0,1\tau$. On en a tracé deux fois plus, ou à des intervalles $t=0,05\tau$ pour le cas $P=Q$.

Elles tournent généralement leur concavité en haut; cependant, au point $z=0,2a$, par suite des réactions ou rebonds dont nous avons parlé, elles tournent leur convexité. Pour les courbes $t=0,3\tau$, la courbure au milieu disparaît, et même se présente dans un sens opposé à celui qu'elle avait pour $t=0,1\tau$, et qu'elle reprend ensuite à partir de $t=0,4\tau$. Ces singularités remarquables proviennent des oscillations des 2e, 3e,... ordres, se superposant à celles du premier.

Nous avons obtenu ainsi la plus grande flèche centrale de courbure exactement, ou avec un nombre suffisant de termes de la série $\sum$, pour les trois cas $P=\frac{1}{2}Q$, Q, $2Q$. Comme elle est à très peu près ce qui vient du premier terme où $m=m_0$, nous avons complété le tableau suivant en calculant, pour les cas $P=\frac{1}{4}Q$ et $4Q$, ce seul terme.

Pour $\frac{P}{Q}=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
La plus grande flèche $u_a=$	$1.091\sqrt{\tau}$	$0.739\sqrt{\tau}$	$0.477\sqrt{\tau}$	$0.297\sqrt{\tau}$	$0.167\sqrt{\tau}$
a lieu environ pour $t=$	1.92τ	1.34τ	1.18τ	0.82τ	0.78τ

34. — *Suite des applications. — Plus grande courbure prise par la barre heurtée, et calcul de la résistance* VIVE *ou* DYNAMIQUE *de cette barre soumise à une impulsion transversale brusque.* — Ce calcul de résistance se fonde,

comme on sait, sur la connaissance non de la *flèche*, mais de la *plus grande courbure* prise par la fibre moyenne de la barre, ou du maximum de $-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; car la plus grande dilatation des fibres ou ce à quoi l'on a coutume d'imposer une certaine limite, a pour valeur, comme on le sait aussi, cette dérivée seconde multipliée par la demi-épaisseur de la barre dans le sens de u ou de ses flexions.

Notre analyse complète, par séries transcendantes, des vibrations de la barre, peut seule donner une évaluation rationnelle de cette dilatation, ou de ce qu'il faut limiter s'il est admis que la cohésion est autant mise en péril par les dilatations de très courte durée produites par les vibrations de deuxième, troisième, quatrième ordre, que par celles de durée appréciable qui sont l'effet de la vibration principale ou dont la période est la plus longue.

Si, pour obtenir cette valeur de $-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, on différentiait deux fois nos expressions de u ou $\frac{u}{\sqrt{\tau}}$, on aurait une série non convergente ou extrêmement peu convergente qui ne pourrait servir. Mais nos tracés de courbes peuvent donner ce quotient différentiel du second ordre avec une approximation très suffisante pour les applications.

En effet, pour mesurer la courbure d'un petit arc N_0NN_1 d'une quelconque de nos courbes (n° 33) d'états successifs de la barre, nous supposerons d'abord que son milieu N est au point le plus bas de cette courbe; et si nous l'assimilons à une portion de parabole ayant son axe vertical, son sommet en N et une corde $N_0N_1 = c$, son équation, de la forme $x^2 = 2Ay$ fournira $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{A}$, valeur de la courbure; et comme on a, pour sa flèche f, égale aux ordonnées de ses extrémités N_0, N_1, $f = \frac{1}{2A}\left(\frac{c}{2}\right)^2$, l'on obtient pour la courbure $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8f}{c^2}$. Or il est facile de voir que si le petit arc remplacé par une portion de parabole à axe vertical, et dont N est le milieu, est pris partout ailleurs qu'au bas d'une des courbes, on aura la même expression pour sa courbure, c *représentant alors la projection de sa corde sur l'axe des z, ou la différence* $z_1 - z_0$ *des abscisses de ses points extrêmes* N_1, N_0; *enfin f étant sa petite flèche mesurée parallèlement aux u entre son point milieu N et sa corde.* On a donc, avec toute l'approximation désirable, ces petites lignes étant mesurées en un endroit quelconque d'une quelconque des courbes du n° 33,

$$(r_6) \qquad \text{la courbure } -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{8f}{c^2}.$$

Or, on reconnaît facilement sur les tracés cités à ce n° 33 que le point de plus grande courbure n'est pas, pour toutes les courbes, à leur milieu; mais que, dans la courbe où cette courbure maximum a sa grandeur la plus considérable, *c'est au milieu qu'elle se trouve.*

Il en résulte qu'on peut y mesurer la flèche pour un arc égal à deux divisions $0,2\,a$ de la barre, aussi bien et même mieux sur les courbes du nº 32 que sur celles du nº 33. Nous avons reconnu ainsi :

Que pour le cas $P = \frac{1}{2} Q$ la plus grande courbure a lieu aux instants $t = 1,25\tau$ et $t = 1,65\tau$ ou un peu avant et un peu après celui ($t = 1,54\tau$) où la flèche de la barre a le plus de grandeur.

Pour le cas $P = Q$ la plus grande courbure a lieu pour $t = 0,75\tau$ et $t = 1,1\tau$ ou très peu avant et sensiblement après l'instant ($t = 0,82$) de la plus grande flèche.

On a trouvé ainsi, respectivement, des courbures $2,60\,\frac{V\tau}{a^2}$, $1,75\,\frac{V\tau}{a^2}$, $1,50\,\frac{V\tau}{a^2}$.

On a des coefficients numériques bien moins différents les uns des autres quand on divise ceux-ci par les trois valeurs correspondantes de $\sqrt{\frac{Q}{P}}$; il en résulte, vu $\frac{V\tau}{a^2}\sqrt{\frac{Q}{P}} = \frac{1}{\sqrt{aEI}}\sqrt{\frac{QV^2}{2g}}$,

$$(s_6)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Cas de} & P = \frac{1}{2}Q \;,\quad Q \;,\quad 2Q\,; \\ \text{Plus gr. courbures} & -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 1.839\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}aI}}\sqrt{\frac{Qv^2}{2g}},\ 1.75\,\frac{1}{\sqrt{\ }}\sqrt{\ },\ 1.838\,\frac{1}{\sqrt{\ }}\sqrt{\ }. \end{array}\right.$$

En appelant c l'épaisseur de la barre dans le sens u ou de la flexion, la plus grande des dilatations des fibres sera, comme on a dit, la courbure $-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ multiplié par $\frac{c}{2}$; et c'est à ce produit qu'on doit imposer une limite de dilatation qui, au nº 7 de la note de la fin du § 57, p. 264, a été appelé $\frac{R_0}{E}$. Nous aurons ainsi, en élevant au carré et en nommant α le coefficient numérique auquel les mesurages cités ont donné les valeurs 1,839, 1,75 et 1,838, auxquelles répondent $\frac{1}{6\alpha^2} = 0,04928$; 0,05442 ; 0,04935 :

$$(t_6)\qquad Q\frac{V^2}{2g} = \frac{1}{6\alpha^2}\cdot\frac{R_0^2}{E}\cdot\frac{24aI}{c^2}.$$

Si la pièce, de longueur $2a$, est rectangulaire, $\frac{24aI}{c^2}$ *n'est autre chose que son volume*. On retrouve donc ainsi, à peu près, le théorème de Young, établi par lui en négligeant l'inertie de la barre, et d'après lequel la *resilience* d'une pièce rectangulaire heurtée au milieu, ou la limite à imposer



